Scritto per il corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
31/1/2019

(Seconda parte)

Tempo a disposizione: 120 minuti.
E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

`Nome:`
`Cognome:`
`Numero di matricola:`
`Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome):`
`sì` ☐ `no` ☐

Esercizio 1 (12 punti)**.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita come

$$f(x) = x(x-1)e^{-x^2}.$$

(i) Si dimostri che f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, e si calcolino $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(ii) Si dimostri che f ammette minimo globale e massimo globale.
(iii) Si dimostri che f deve avere almeno tre punti critici.
(iv) Si dimostri che f ha esattamente tre punti critici, e si discuta la loro natura.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Per ogni parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ si studi il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\cos(x^2) + \operatorname{sen}(x^3) - e^{-x^4/2} - \ln(1+x^3) - \frac{x^6}{2} \right) x^\gamma .$$

Esercizio 3 (10 punti)**.** Fissato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisce la funzione $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) + \ln(1+x)}{|x|^\alpha} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(i) Si dica, al variare del valore di α, se l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

converge, diverge a $+\infty$, diverge a $-\infty$, oppure oscilla.
(ii) Si dica per quali valori di α la funzione f è continua in un intorno di 0.
(iii) Si dica per quali valori di α la funzione f è derivabile infinite volte in un intorno di 0.
(iv) Per i valori di α trovati al punto precedente, si scriva la serie di Taylor di f in $x = 0$.
(v) Per i valori di α trovati sopra, si determini il raggio di convergenza della serie di Taylor.