LA PROPRIETÀ DI STEINER PER CLUSTER MINIMALI

Consideriamo un cluster minimale in $\mathbb{R}^2$. La prima cosa che possiamo dimostrare è la seguente semplice proprietà.

Lemma 1. *Esiste una funzione* $L : \left[0, \frac{2}{3}\pi\right] \to \mathbb{R}^+$ *strettamente crescente tale che* $L(0) = 1$ *ed* $L\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2$ *con la seguente proprietà. Se due punti* A *e* B *distano* 1 *da* O, *e* $A\widehat{O}B = \theta \leq \frac{2}{3}\pi$, *allora esiste un insieme connesso (l'albero di Steiner) che contiene tutti e tre i punti e di lunghezza* $L(\theta)$.

Proof. Un banale conto trigonometrico assicura che l'insieme connesso più corto che contiene A, B ed O è dato dall'unione dei tre segmenti AC, BC e OC, dove C è l'unico punto del triangolo AOB tale che $A\widehat{C}O = O\widehat{C}B = B\widehat{C}A = \frac{2}{3}\pi$. La funzione $L(\theta)$ quindi non è altro che la lunghezza di tale insieme. □

Possiamo poi notare come non ci sia troppa frontiera su palle piccole, grazie al prossimo risultato.

Lemma 2. *Esiste un raggio* $R_1 \ll 1$ *tale che in ogni cerchio* $B(x, r)$ *di raggio* $r < R_1$ *si ha* $\mathscr{H}^{N-1}(\partial^*\mathcal{E} \cap B(x, r)) < 13/2r$.

Proof. Se in un cerchio valesse il contrario, potremmo definire $\mathcal{F}$ il cluster identico ad $\mathcal{E}$ fuori dalla palla e vuoto nella palla. Si ha chiaramente

$$P(\mathcal{F}) \leq P(\mathcal{E}) + 2\pi r - \mathscr{H}^{N-1}(\partial^*\mathcal{E} \cap B(x, r)) \leq \left(2\pi - \frac{13}{2}\right) r\,,$$

e visto che $\big||\mathcal{E}| - |\mathcal{F}|\big| < \pi r^2$ si può trovare un cluster $\mathcal{E}'$ strettamente migliore di $\mathcal{E}$ sistemando l'area grazie alla proprietà "$\varepsilon - \varepsilon$" con esponente $1/2$ e costante più piccola di $\frac{13}{2} - 2\pi$. □

Possiamo allora dedurre che ci sono cerchi sufficientemente piccoli che contengono solo tre punti della frontiera del cluster minimale.

Lemma 3. *Esistono una costante* C_1 *ed un raggio* $R_2 \leq R_1$ *tale che per ogni* $x \in \mathbb{R}^2$ *ed ogni* $r < R_2$ *esiste* $r/C_1 < \rho < r$ *tale che* $\partial^*\mathcal{E} \cap \partial B(x, r)$ *contiene al più tre punti.*

Proof. Innanzitutto, la tesi è facilmente vera per sei punti invece che tre, con costanti $R_2' = R_1$ e $C_1' = 14$. Infatti, se per ogni $r/14 < \rho < r$ si avessero almeno sette punti in $\partial^*\mathcal{E} \cap \partial B(x, r)$, si avrebbe

$$\mathscr{H}^1(\partial^*\mathcal{E} \cap B(x, r)) \geq \int_{r/14}^{r} \mathscr{H}^0(\partial^*\mathcal{E} \cap \partial B(x, s))\, ds \geq 7r\left(1 - \frac{1}{14}\right) = \frac{13}{2}\, r\,,$$

in contraddizione con il Lemma 2.

Esiste allora sicuramente un raggio $r/14 < r_1 < r$ tale che $\partial^*\mathcal{E} \cap \partial B(x, r_1)$ contiene al più sei punti. Vogliamo ora dimostrare che, per un opportuno C_1'' esista $r_1/C_1'' < r_2 \leq r_1$ tale che $\partial^*\mathcal{E} \cap \partial B(x, r_2)$ contiene al più cinque punti. Se non fosse così (e quindi in particolare $\partial^*\mathcal{E} \cap \partial B(x, r_1)$ deve contenere sei punti) esattamente come prima otterremmo

$$\mathscr{H}^1(\partial^*\mathcal{E} \cap B(x, r_1)) > 6r_1\left(1 - \frac{1}{C_1''}\right).$$

Tuttavia, tra i sei punti di $\partial^*\mathcal{E} \cap \partial B(x, r_1)$ ce ne sono almeno due che formano con x un angolo $\theta \leq \pi/3$. Si può quindi modificare il cluster $\mathcal{E}$ all'interno di $B(x, r_1)$ in modo che $\partial^*\mathcal{E} \cap B(x, r_1)$ sia formato dall'albero di Steiner corrispondente a questi due punti, più i quattro segmenti che connettono i restanti quattro punti al centro. Detto $\mathcal{F}$ questo nuovo cluster, si ha chiaramente

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) - P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{F}; B(x, r_1)) - P(\mathcal{E}; B(x, r_1)) &\leq \left(4 + L(\theta) - 6\left(1 - \frac{1}{C_1''}\right)\right) r_1 \\ &\leq \left(4 + L(\pi/3) - 6\left(1 - \frac{1}{C_1''}\right)\right) r_1 . \end{aligned}$$

Purché la costante C_1'' sia stata presa abbastanza grande, in particolare serve

$$C_1'' > \frac{1}{2 - L(\pi/3)},$$

il termine in parentesi è negativo, e quindi si conclude l'assurdo come prima, usando di nuovo la proprietà "$\varepsilon - \varepsilon$" con esponente $1/2$ e costante abbastanza piccola. L'argomento per passare da cinque punti a quattro e poi da quattro a tre è ancora lo stesso, ovviamente usando $2\pi/5$ e $2\pi/4 = \pi/2$ al posto di $2\pi/6 = \pi/3$. Si noti che invece l'argomento non funziona per passare da tre punti a due perché non è vero che $L(2\pi/3) < 2$. $\square$

Osserviamo adesso che non esistono "isole".

Lemma 4. *Esiste $R_3 < R_2$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}^2$, ogni $r < R_3$ ed ogni $0 \leq i \leq m$, si ha*

$$\mathscr{H}^2\big(B(x, r) \cap E_i\big) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{H}^1\big(\partial B(x, r) \cap \partial^* E_i\big) > 0 .$$

Proof. Supponiamo che x, r ed i rappresentino un controesempio, e chiamiamo $F = E_i \cap B(x, r)$. Si noti che $\mathscr{H}^1$-q.o. punto di ∂F appartiene a $\partial^* E_j$ per esattamente un valore di $0 \leq j \leq m$ diverso da i. Esiste allora un j tale che

$$\mathscr{H}^1\big(\partial^* F \cap \partial^* E_j\big) \geq \frac{1}{m}\, \mathscr{H}^1(\partial^* F).$$

Definiamo allora $\mathcal{F}$ come il cluster identico ad $\mathcal{E}$ eccetto che per il fatto che l'insieme F viene tolto da E_i ed aggiunto ad E_j. Si ha che

$$P(\mathcal{E}) - P(\mathcal{F}) = \mathscr{H}^1\big(\partial^* F \cap \partial^* E_j\big) \geq \frac{1}{m}\, \mathscr{H}^1(\partial^* F) \geq \frac{1}{m}\, 2\sqrt{\pi}\, \sqrt{\mathscr{H}^2(F)},$$

ed allora si conclude nuovamente usando la proprietà "$\varepsilon - \varepsilon$". $\square$

Remark 5. *Si noti che lo stesso risultato vale non solo per $B(x, r)$ e $\partial B(x, r)$, ma anche più in generale per G e ∂G dove G è un qualunque insieme Lipschitziano contenuto in $B(x, r)$.*

Corollary 6. *Ogni cerchio di raggio minore di $R_4 = R_3/C_1$ interseca al più tre insiemi E_i.*

Possiamo allora chiamare *tripunto* ogni punto $x \in \mathbb{R}^2$ tale che $B(x,r)$ interseca esattamente tre degli insiemi E_i per qualunque $r > 0$. Si può osservare che per i tripunti la costante C_1 può essere sostituita da un qualunque numero più grande di 1.

Lemma 7. *Se x è un tripunto e $r < R_4$, allora esiste $\frac{99}{100}\, r < \rho < r$ tale che $\partial^* \mathcal{E} \cap \partial B(x,\rho)$ contiene esattamente tre punti.*

Proof. Sappiamo già che esiste un qualche raggio $R_4 \le R \le R_3$ tale che $\partial B(x,R)$ contiene al più tre punti; si noti che i punti devono necessariamente essere tre, perché altrimenti x non potrebbe essere un tripunto grazie al Lemma 4. Supponiamo allora che esista un $\bar r \le R_3$ tale che $\partial^* \mathcal{E} \cap \partial B(x,\bar r)$ contiene tre punti, ma tutti gli insiemi $\partial^* \mathcal{E} \cap \partial B(x,r)$ con $\frac{99}{100}\, \bar r < r < \bar r$ contengono almeno quattro punti. Allora si avrebbe

$$P(\mathcal{E}; B(x,\bar r)) \ge \left(3 + \frac{1}{100}\right) \bar r\,,$$

e quindi si trova un assurdo definendo $\mathcal{F}$ in modo che $\partial \mathcal{F} \cap B(x,\bar r)$ sia formato dai tre segmenti che connettono x con i tre punti di $\partial^* \mathcal{E} \cap \partial B(x,\bar r)$ e ragionando come al solito. La tesi cercata segue subito. $\square$

Lemma 8. *Esiste una costante $R_5 < R_4$ tale che due qualsiasi tripunti distano almeno R_5.*

Proof. Sia $R_5 < R_4/2$ abbastanza piccolo, sia x un tripunto, e sia $\rho < 2R_5$ un raggio tale che $\partial B(x,\rho)$ contiene tre punti su $\partial^* \mathcal{E}$. Chiamando A, B e C questi tre punti, grazie al Lemma 1 sappiamo che gli angoli $A\widehat{x}B$, $B\widehat{x}C$ e $C\widehat{x}A$ sono tutti compresi tra $\frac{2}{3}\,\pi - \frac{1}{100}$ e $\frac{2}{3}\,\pi + \frac{1}{100}$, eventualmente rimpicciolendo R_5 se necesario. Consideriamo adesso tutti i punti $P \in \partial B(x,\rho)$ tali che l'angolo $P\widehat{x}A$ sia minore di $4/9$ e P sia dalla parte di B, quindi punti più vicini ad A che a B. Per ciascun tale punto, chiamiamo S_P il segmento che unisce P al punto $x + \frac{9}{10}\,(P - x)$. Vogliamo mostrare che almeno uno di questi segmenti non interseca $\partial^* \mathcal{E}$: se infatti non fosse così, allora si avrebbe

$$\mathscr{H}^1\Big(\partial^* \mathcal{E} \cap \big(B(x,\rho) \setminus B(x, 9/10\,\rho)\big)\Big) \ge \frac{2}{5}\,\rho\,.$$

Tuttavia, visto che x è un tripunto, allora $\partial^* \mathcal{E} \cap \partial B(x,\sigma)$ contiene almeno tre punti per qualunque $\sigma < \rho$, e dunque si avrebbe

$$\mathscr{H}^1\Big(\partial^* \mathcal{E} \cap B(x,\rho)\Big) \ge \frac{2}{5}\,\rho + \int_{\sigma=0}^{\frac{9}{10}\,\rho} \mathscr{H}^0\big(\partial^* \mathcal{E} \cap \partial B(x,\sigma)\big)\, d\sigma \ge \frac{31}{10}\,\rho\,,$$

e questo come al solito si può escludere per R_5 piccolo perché sostituendo $\partial^* \mathcal{E} \cap B(x,\rho)$ con i tre segmenti xA, xB e xC la lunghezza di $\mathscr{H}^1\big(\partial^* \mathcal{E} \cap B(x,\rho)\big)$ diventerebbe di 3ρ.

Abbiamo quindi mostrato che c'è un segmento, chiamiamolo S_A^+, che non interseca $\partial^* \mathcal{E}$, ed è l'ultimo tratto di lunghezza $\rho/10$ di un raggio che unisce x ad un qualche punto sul bordo di $B(x,\rho)$, tra A e B e che faccia con A un angolo minore di $4/9$. Lo stesso identico discorso fatto per punti vicini ad A ma dalla parte di C ci fa trovare un analogo segmento che possiamo chiamare S_A^-. Adesso, per ogni $\frac{9}{10}\rho \le t \le \rho$, consideriamo il "rettangolo curvilineo" ottenuto prendendo la parte dell'anello $B(x,\rho) \setminus B(x,t)$ che sta tra S_A^+ ed S_A^-. Consideriamo l'intersezione tra il bordo di tale rettangolo curvilineo e $\partial^*\mathcal{E}$: questa intersezione contiene esattamente un punto, ossia A, nell'arco esterno, e nessun punto nei segmenti contenuti in S_A^+ e S_A^-. Ci deve quindi essere almeno un altro punto nell'arco interno. Chiamando R_A il rettangolo curvilineo corrispondente a $t = \frac{9}{10}\,\rho$, ed integrando, abbiamo quindi che

$$\mathscr{H}^1\big(\partial^*\mathcal{E} \cap R_A\big) \geq \frac{1}{10}\,\rho\,. \tag{1}$$

Lo stesso identico risultato si deduce ovviamente per altri due rettangoli curvilinei R_B vicino a B, e R_C vicino a C.

Supponiamo adesso per assurdo che esistano due tripunti x ed y a distanza $d < R_5$. Applichiamo il lemma 7 con $r = \frac{20}{19}\,d = \frac{100}{95}\,d$, trovando quindi

$$\frac{99}{95}\,d \leq \rho \leq \frac{100}{95}\,d$$

tale che $\partial^*\mathcal{E} \cap \partial B(x,\rho)$ contenga tre punti A, B e C. Si noti che

$$\frac{95}{100}\,\rho \leq d \leq \frac{95}{99}\,\rho\,. \tag{2}$$

Consideriamo adesso la palla $B(y, \frac{4}{99}\,\rho)$, che grazie a (2) è interamente contenuta nell'anello $B(x,\rho) \setminus B(x, \frac{9}{10}\,\rho)$. Per costruzione, tale palla può intersecare al massimo uno dei tre rettangoli curvilinei R_A, R_B ed R_C definiti prima, diciamo ad esempio che non interseca R_A né R_B. Ma allora, usando il fatto che sia x che y sono tripunti, e quindi $\partial B(x,\sigma)$ e $\partial B(y,\sigma)$ contengono almeno tre punti per ogni $\sigma < R_3$ e ricordando la (1), si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^1\big(\partial^*\mathcal{E} \cap B(x,\rho)\big) &\geq \mathscr{H}^1\bigg(\partial^*\mathcal{E} \cap B(x, \frac{9}{10}\,\rho)\bigg) + \mathscr{H}^1\bigg(\partial^*\mathcal{E} \cap \big(B(x,\rho) \setminus B(x, \frac{9}{10}\,\rho)\big)\bigg)\\
&\geq \frac{27}{10}\,\rho + \mathscr{H}^1(\partial^*\mathcal{E} \cap R_A) + \mathscr{H}^1(\partial^*\mathcal{E} \cap R_B) + \mathscr{H}^1\bigg(B\bigg(y, \frac{4}{99}\,\rho\bigg)\bigg)\\
&\geq \frac{27}{10}\,\rho + \frac{2}{10}\,\rho + \frac{4}{33}\,\rho = 3\rho + \frac{7}{330}\,\rho\,,
\end{aligned}$$

e si conclude l'assurdo come al solito. □

Corollary 9. *Visto che sappiamo che i cluster minimali sono limitati, deduciamo che esistono finiti tripunti.*

Possiamo adesso fare un'osservazione fondamentale.

Lemma 10. *Sia Γ una palla di raggio minore di R_5 che contenga sul bordo esattamente due punti di $\partial^*\mathcal{E}$. Allora $\partial^*\mathcal{E} \cap \Gamma$ è un arco di cerchio.*

Proof. Chiamiamo A e B i due punti su $\partial^*\mathcal{E} \cap \partial\Gamma$, e fissiamo uno dei due archi di $\partial\Gamma \setminus \{A, B\}$, chiamiamolo $\partial^-\Gamma$. Tale arco appartiene interamente ad un certo insieme E_i con $0 \leq i \leq m$. Sia $V = |E_i \cap \Gamma|$, che per costruzione verifica $0 < V < \pi r^2$, essendo r il raggio di Γ. Esiste un unico arco di cerchio γ contenuto in Γ e che unisce A e B tale che l'area della parte di Γ che sta "sotto" a questo arco (cioè l'insieme il cui bordo sia $\gamma \cup \partial^-\Gamma$) abbia area esattamente V. E' elementare osservare che $\mathscr{H}^1(\gamma) \leq \mathscr{H}^1(\partial^*\mathcal{E} \cap \Gamma)$, con uguaglianza se e solo se $\gamma = \partial^*\mathcal{E} \cap \Gamma$: se γ

è un segmento è ovvio, altrimenti segue dalla proprietà isoperimetrica delle palle. Ma visto che $\mathcal{E}$ è un cluster minimale, la disuguaglianza stretta non può valere, e questo conclude la tesi. $\square$

A questo punto, segue in modo immediato il risultato finale.

Theorem 11. *Sia $\mathcal{E}$ un cluster minimale in $\mathbb{R}^2$. Allora $\partial^*\mathcal{E}$ è un'unione finita di archi di cerchio, che si incontrano in un numero finito di tripunti, con tangenti che fanno tre angoli di $\frac{2}{3}\pi$. Inoltre, per ogni coppia $0 \leq i < j \leq m$, tutti gli archi di cerchio che appartengono a $\partial E_i \cap \partial E_j$ hanno lo stesso raggio (con segno).*