(1) $f_n(x) = x e^{-n^2x^2}$ Studiamo f_n

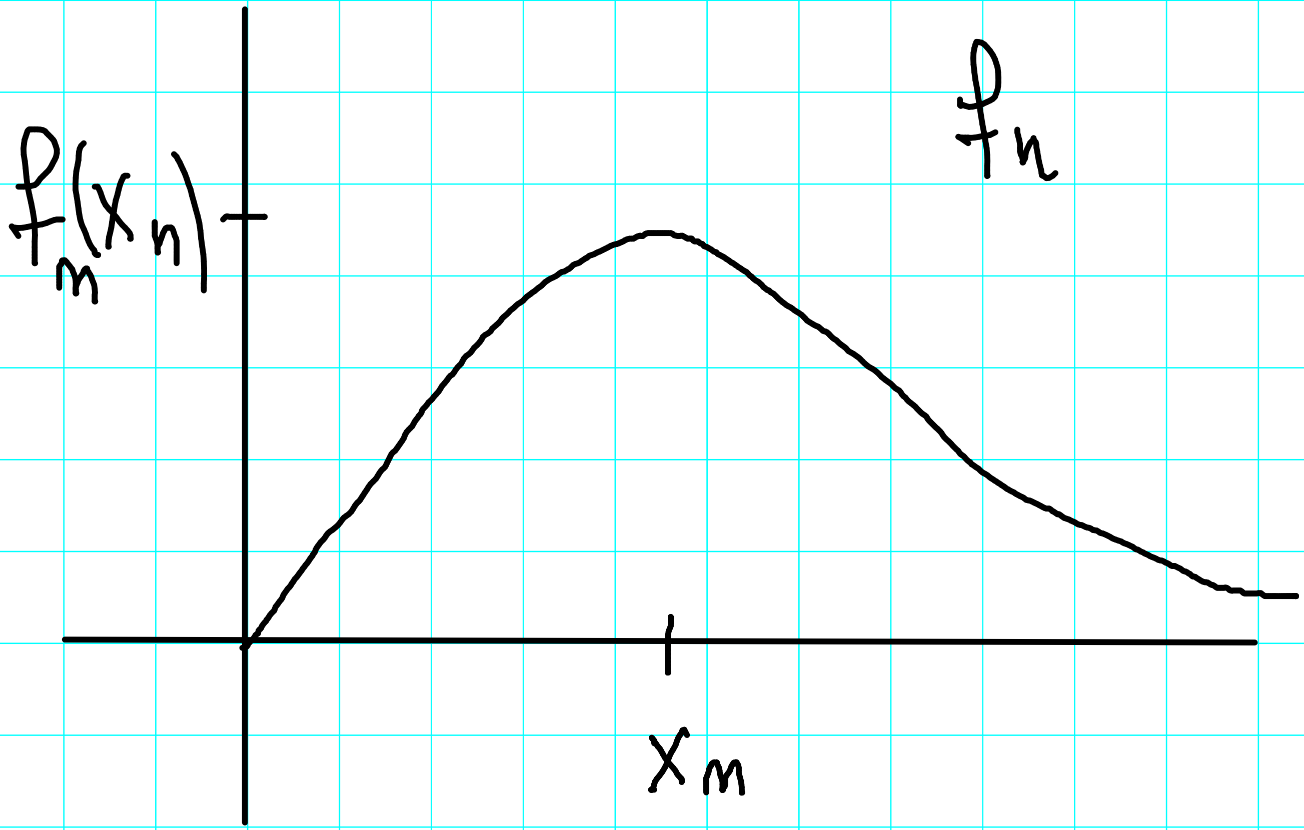
$f_n(0) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

$f_n'(x) = e^{-n^2x^2} + x(-2n^2x)e^{-n^2x^2} =$

$e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$

$f_n'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{\sqrt{2}n} =: x_n$

$f_n(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2e}\, n}$



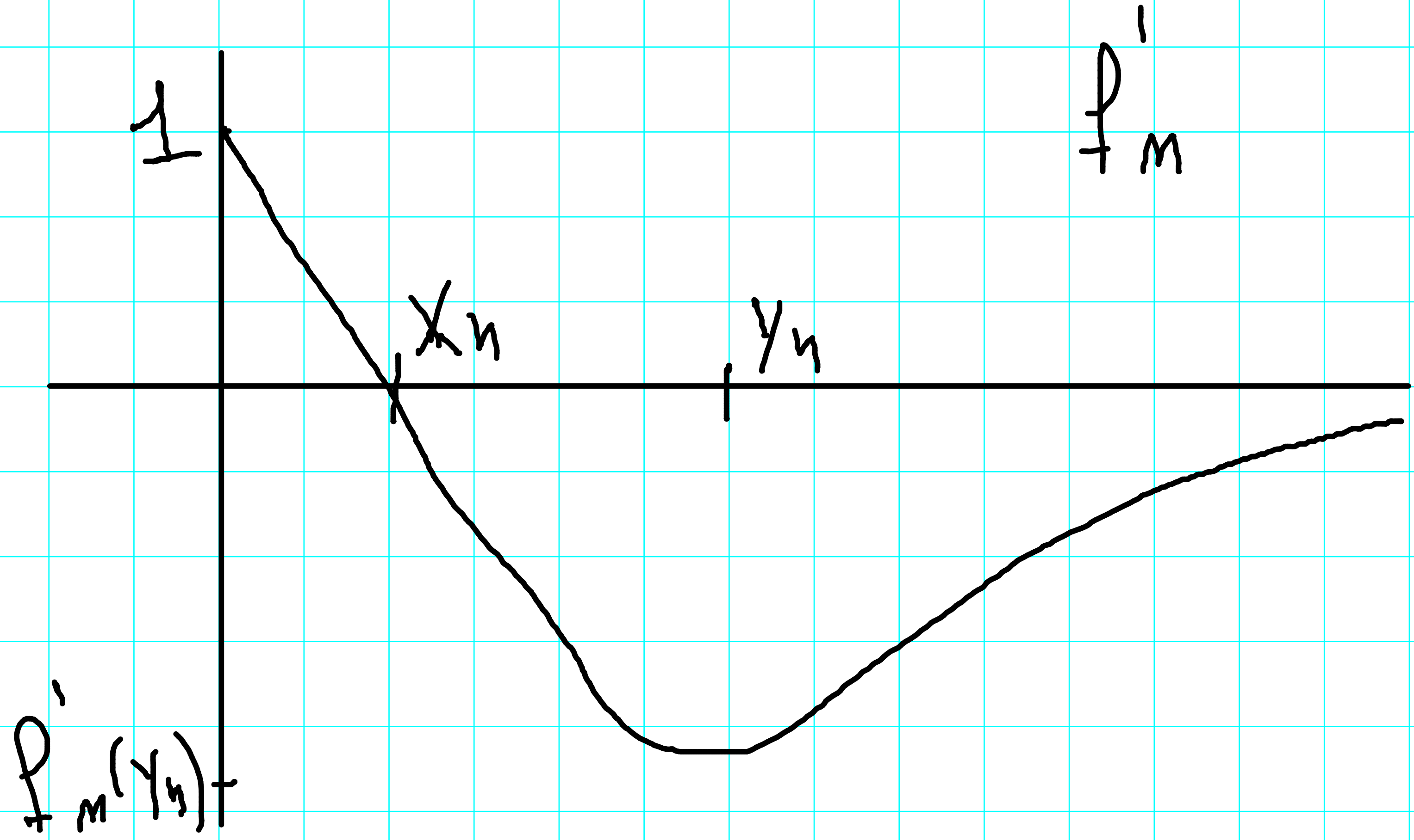
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}\, n}$$

$$f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2e}\, n}$$

Studiamo anche f_n' : $\quad f_n'(0) = 1, \quad f_n'(\infty) = 0$

$$f_n''(x) = e^{-n^2x^2}\left(-4n^2x - 2n^2x\left(1 - 2n^2x^2\right)\right) =$$

$$2n^2x\, e^{-n^2x^2}\left(2n^2x^2 - 3\right)$$



$$y_n = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{n}$$

$$f'_n(y_n) = -2\,e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Dunque: $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2e}\,n} \to 0$ e quindi $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0$

Però $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2e}\,n} = +\infty$ (BRUTTO!)

Se però fissiamo $a>0$ allora per n grande $x_n < a$

e quindi $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a) = a e^{-na^2}$

da cui $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = +\infty$

$\Rightarrow F = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $[a,+\infty[$

$\Rightarrow F$ è continua su $[a,+\infty[$. Analogamente

per n grande $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = |f_n'(a)| = e^{-n^2a^2}(1-2n^2a^2)$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} < +\infty \Rightarrow F$ derivabile su $[a,+\infty[$

Dato che $a>0$ è arbitrario F è derivabile su $]0,+\infty[$.

Vediamo che F non è continua in zero. Intanto $F(0)=0$

Se poi $x>0$

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-n^2x^2} \geq \sum_{n=0}^{[1/x]} x e^{-n^2x^2} \geq x \sum_{n=0}^{[1/x]} e^{-1} =$$

$$x\, e^{-1}\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right) \geq x e^{-1} \frac{1}{x} = e^{-1} > 0$$

"Volendo" si potrebbe anche calcolare $F(0^+)=\lim_{x\to 0^+} F(x)$

Infatti $F(x)=x\int_0^{+\infty} e^{-[y]^2x^2}\,dy$ da cui

$$x\int_0^{+\infty} e^{-y^2x^2}\,dy \le F(x) \le x\int_0^{+\infty} e^{-(y-1)^2x^2}\,dy$$

(dato che $y-1 < [y] \le y$) e usando le sostituzioni

$xy = t$ / $x(y-1) = t$ si trova

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \le F(x) \le \int_{-x}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

da cui $\quad F(0^+) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

---

(4) Supponiamo che $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

e supponiamo che il raggio di convergenza R della serie di potenze sia >0. Allora

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow x y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

Se vogliamo che y risolva l'equazione, allora

$$x y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-1) x^n = \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

da cui eguagliando i termini delle due serie

(a) $(n-1)\,a_n = 0$ se n è pari

(b) $(n-1)\,a_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{1}{n!}$ se n è dispari

Dalla a si ottiene $a_n = 0$ per ogni n pari

Purtroppo la (b) NON è verificabile per $n = 1$

dato che viene $0 = 1$

DUNQUE L'EQUAZIONE NON HA SOLUZIONI

Se si considera l'equazione con dato $\cos(x)$

si trova (con ragionamenti analoghi)

(a) $(n-1)\, a_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$ se n è pari

(b) $(n-1)\, a_n = 0$ per n dispari

Dalla (a) si ottiene $a_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)\, n!}$ se n è pari

mentre dalla (b) $a_n = 0$ per ogni n dispari con $n \neq 1$. Per quanto riguarda $n=1$ si può notare che

QUALUNQUE a_1 VA BENE dato che $(1-1)\, a_1 = 0$

Dunque

$$y(x) = a_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k-1)(2k)!}$$

è soluzione per ogni a_1 ; dato che $y(0) = -1$, tale y NON RISOLVE il problema di Cauchy e quindi anche in questo caso non c'è soluzione.

Se avessimo messo $y(0) = -1$ la y scritta sopra sarebbe stato soluzione e si sarebbe potuto assegnare arbitrariamente $y'(0) = a_1$

(3) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x+x^2+x^3}\,dx = (*)$$

È facile vedere che il denominatore si annulla per $x=-1$, $x=\pm i$, tutte radici semplici.

Per la formula vista a lezione $\left(\text{posto } f(z)=\frac{\sqrt{z}}{1+z+z^2+z^3}\right)$

$$(*) = \frac{2\pi i}{2}\Big(\mathrm{Res}(f,-1) + \mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\Big)$$

$$= \pi i \sum_{z\in\{-1,i,-i\}} \frac{\sqrt{z}}{1+2z+3z^2} =$$

$$= \pi i \left(\frac{\sqrt{-1}}{1-2+3} + \frac{\sqrt{i}}{1+2i+3i^2} + \frac{\sqrt{-i}}{1-2i+3(-i)^2} \right) =$$

(ricordiamo che $\sqrt{e^{i\theta}} = e^{i\theta/2}$ per $0 < \theta < 2\pi$)

$$\pi i \left(\frac{i}{2} + \frac{e^{\frac{\pi}{4} i}}{2i-2} + \frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{-2i-2} \right) =$$

$$\frac{\pi i}{2} \left(i + \frac{i\, e^{-\frac{\pi}{4} i}}{i-1} + \frac{i\, e^{\frac{\pi}{4} i}}{-i-1} \right) = \frac{\pi}{2} \left(-1 + \frac{e^{-\frac{\pi}{4} i}}{1-i} + \frac{e^{\frac{\pi}{4} i}}{1+i} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(-1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4} i}}{1+i} \right) \right) = -\frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{Re} \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}(1+i)} \right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi$$

---

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2-2x+5)^2}\,dx = (*)$$

Consideriamo $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+5)^2}\,dx = (**)$$

Il denominatore ha tre radici: $x=0$ (semplice)

e $x = 1 \pm 2i$ (doppie). Se $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2-2z+5)^2}$

allora (per le formule note)

$$(*) = \pi i \operatorname{Res}(f, 0) + 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+2i)$$

Il residuo in zero è abbastanza facile

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \left.\frac{e^{iz}}{(z^2-2z+5)^2}\right|_{z=0} = \frac{1}{25}$$

Per il residuo in $1+2i$

$$\operatorname{Res}(f, 1+2i) = h'(1+2i) \quad \text{dove}$$

$$h(z) = \frac{e^{iz}}{z(z-1+2i)^2} = e^{iz} z^{-1} (z-1+2i)^{-2}$$

$$\Rightarrow h'(z) = ie^{iz} z^{-1} (z-1+2i)^{-2} - e^{iz} z^{-2} (z-1+2i)^{-2}$$
$$- 2e^{iz} z^{-1} (z-1+2i)^{-3}$$
$$\Rightarrow h'(1+2i) = \frac{i e^{i(1+2i)}}{(1+2i)(4i)^2} - \frac{e^{i(1+2i)}}{(1+2i)^2 (4i)^2} - \frac{2e^{i(1+2i)}}{(1+2i)(4i)^3}$$
$$= e^{-2+i}\left(\frac{i}{(1+2i)(-16)} - \frac{1}{(1+4i-4)(-16)} - \frac{2}{(1+2i)(-64i)}\right)$$
$$= e^{-2+i}\left(\frac{i(1-2i)}{-16\cdot 5} - \frac{-3-4i}{-16\cdot 25} - \frac{2i(1-2i)}{64\cdot 5}\right)$$
$$= e^{-2+i}\left(\frac{-2-i}{16\cdot 5} + \frac{-3-4i}{16\cdot 25} + \frac{-4-2i}{64\cdot 5}\right) = \frac{e^{-2+i}(-72-46i)}{64\cdot 5}$$

da cui $(**) = \dfrac{\pi i}{25} - \dfrac{\pi i}{400} e^{-2} e^{i} \left(36 + 23 i \right) =$

$$\frac{\pi i}{25} + \frac{\pi}{400} e^{-2} \left(\cos(1) + i \sin(1) \right) \left(23 - 36 i \right) =$$

$$\frac{\pi i}{25} + \frac{\pi}{400 e^{2}} \left[\left(23 \cos(1) + 36 \sin(1) \right) + i \left(-36 \cos(1) + 23 \sin(1) \right) \right]$$

e allora $(*) = \operatorname{Im}((**)) =$

$$\frac{\pi}{25} + \frac{\pi}{400 e^{2}} \left(23 \sin(1) - 36 \cos(1) \right)$$