Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 23 giugno 2008

1. Se $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := 2x^4 - 4x^2 + 1$, allora (1/-1 punti a risposta)

   (a) f ha un unico punto di massimo: $\boxed{\text{NO}}$;

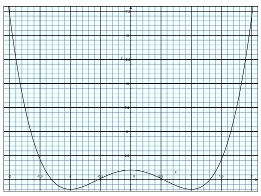
   (b) f ha un unico minimo: $\boxed{\text{SÌ}}$;

   (c) 1 è un massimo per f: $\boxed{\text{NO}}$;

   (d) 2 è un massimo relativo per f: $\boxed{\text{SÌ}}$.

   Spiegazione. Facendo un rapido studio di funzione (vedi la figura) si vede che:

   - il massimo di f vale 17 ed è assunto nei punti -2 e 2 che sono due e non sono stazionari;
   - il minimo di f vale -1 ed è assunto nei punti -1 e 1 che sono stazionari;
   - il punto 0 è stazionario ed è di massimo relativo per f di valore 1 (che dunque è un massimo relativo ma non assoluto);
   - come fatto generale il massimo e il minimo (se esistono) sono unici, essendo i *valori* massimo e minimo.



$\square$

2. Se $$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{1+n}$$ allora (indicare la risposta esatta - 2/-.5 punti) :

   $(a)\ \sup_n a_n = 0, (b)\ \sup_n a_n = 1, (c)\ \sup_n a_n = -1, (d)\ \sup_n a_n = (-1)^n, (e)\ \sup_n a_n = \boxed{+\infty}$.

   Spiegazione. Se si considera la sottosuccessione relativa agli indici n pari si ottiene:

   $$a_{2k} = \frac{4k^2}{1+2k} \to +\infty.$$

   Quindi (a_n) non è limitata superiormente, cioè il suo estremo superiore è $+\infty$. $\square$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (2 punti ciascuno)

   (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n^2+1)} = \boxed{1}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{n^6 - 6n^5 + 1} - n = \boxed{-1}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n^4} = \boxed{4}$ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9^n + n}}{4^n + 1} = \boxed{0}$

   Spiegazione.
   - dato che, per $n \to +\infty$,

   $$\ln(n^2+1) \to +\infty, \text{ ma } \ln(n^2+1) - n = n\left(\frac{\ln(n^2+1)}{n} - 1\right) \to +\infty(0-1) = -\infty$$

   allora per n grande vale $1 \le \ln(n^2+1) \le n$, da cui $1 \le \sqrt[n]{\ln(n)} \le \sqrt[n]{n}$; essendo $\sqrt[n]{n} \to 1$ si deduce $\sqrt[n]{\ln(n)} \to 1$, per i due carabinieri;

- si ha:

$$\sqrt[6]{n^6-6n^5+1}-n = n\left(\left(1-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^6}\right)^{\frac{1}{6}}-1\right) = n\left(1-\frac{1}{6}\frac{6}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \to -1;$$

- $\sqrt[n]{4^n+n^4} = 4\sqrt[n]{1+n^4/4^n} \to 4;$
- si ha:

$$\frac{\sqrt{9^n+n}}{4^n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\sqrt{1+\frac{n}{9^n}}}{1+\frac{1}{4^n}} \to 0\cdot 1 = 0$$

□

4. Calcolare il limite (6 punti – DA SVOLGERE)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin(4x)+\cos(2x))-4x}{1-\sqrt{\cos(5x)}}$$

Svolgimento. Il limite proposto è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applichiamo (due volte) il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin(4x)+\cos(2x))-4x}{1-\sqrt{\cos(5x)}} \overset{\text{(Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{4\cos(4x)-2\sin(2x)}{\sin(4x)+\cos(2x)}-4}{\dfrac{5\sin(5x)}{2\sqrt{\cos(5x)}}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(4x)-2\sin(2x)-4\sin(4x)-4\cos(2x)}{\sin(4x)+\cos(2x)}\frac{2\sqrt{\cos(5x)}}{5\sin(5x)} =$$

$$\frac{4}{5}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(4x)-\sin(2x)-2\sin(4x)-2\cos(2x)}{\sin(5x)} \overset{\text{(Hôpital)}}{=}$$

$$\frac{4}{5}\lim_{x\to 0}\frac{-8\sin(4x)-2\cos(2x)-8\cos(4x)+4\sin(2x)}{5\cos(5x)} = \frac{4}{5}\frac{-10}{5} = \boxed{-\frac{8}{5}}.$$

□

---

5. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC) (punti 1.5/-0.75 per ognuna).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n^n}$ $\boxed{\text{AC}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-1\right)$ $\boxed{\text{AC}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)$ $\boxed{\text{C}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{n+1}{n^3+1}\right)$ $\boxed{\text{NC}}$

Spiegazione.
- Applicando il criterio del rapporto:

$$\frac{\dfrac{(n+1+3)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n+3)!}{n^n}} = \frac{n+4}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{\dfrac{n+4}{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

per cui la serie (a temini positivi) converge assolutamente.

- Consideriamo il valore assoluto del termine generale:

$$|a_n| = 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \simeq \frac{\pi^2}{2n^2}$$

per cui la serie converge assolutamente per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2} < +\infty$.

- Consideriamo il valore assoluto del termine generale:
$$|a_n| = \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) \simeq \frac{3\pi}{n}$$
per cui la serie non converge assolutamente, per confronto con la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\pi}{n} = +\infty$; però si vede facilmente che $|a_n|$ è decrescente rispetto a n e tende a zero, per cui, essendo la serie a segni alterni, essa converge per il criterio di Leibniz.
- Consideriamo il valore assoluto del termine generale:
$$|a_n| = \cos\left(\frac{n+1}{n^3+1}\right) \to \cos(0) = 1 \neq 0;$$
ne segue che il termine generale non tende a zero (se $a_n \to 0$ anche $|a_n| \to 0$) e quindi la serie non converge.

$\square$

6. Date due funzioni f e g definite in un intorno di zero tali che $f(x) = 1 + 3x - x^2 + o(x^2)$, $g(x) = 1 - 3x - 2x^2 + o(x^2)$ e posto $h(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si ha (punti 2/-0.5):

(a) $h''(0) = 18$, (b) $h''(0) = 19$, (c) $h''(0) = 4$, (d) $h''(0) = \boxed{38}$, (e) $h''(0) = 12$.

Spiegazione. Si ha:
$$h(x) = \frac{1+3x-x^2+o(x^2)}{1-3x-2x^2+o(x^2)} = 1 + \frac{1+3x-x^2+o(x^2)}{1-3x-2x^2+o(x^2)} - 1 =$$
$$1 + \frac{6x+x^2+o(x^2)}{1-3x-o(x)} = 1 + x\frac{6+x+o(x)}{1-3x+o(x)} = 1 + 6x + x\left(\frac{6+x+o(x)}{1-3x-o(x)} - 6\right) =$$
$$1 + 6x + x\frac{19x+o(x)}{1+o(1)} = 1 + 6x + 19x^2\frac{1+o(1)}{1+o(1)} =$$
$$1 + 6x + 19x^2(1+o(1)) = 1 + 6x + 19x^2 + o(x^2).$$

Ne segue che $\dfrac{h''(0)}{2} = 19 \Leftrightarrow h''(0) = 38$. $\square$

7. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio (punti 4):
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(a^2+x)}\,dx = \boxed{\frac{\sqrt{2}\pi}{2a}}$$

Spiegazione. Se operiamo la sostituzione $y = \sqrt{x}/a$ troviamo $x = a^2y^2$ e $dx = 2a^2y dy$ e quindi:
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(a^2+x)}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2a^2y}{\sqrt{2}a^3y(1+y^2)}\,dy = \frac{\sqrt{2}}{a}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\arctan(y)\right]_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2a}.$$

$\square$

8. Si consideri l'equazione differenziale (punti 8 in tutto DA SVOLGERE)
$$y' = \frac{2}{x^2-1}y - x^2 \qquad -1 < x < 1.$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y_0$.

(b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$.

(c) Si traccino i grafici delle soluzioni più signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.

(d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) la soluzione $y(x)$ è strettamente crescente in $]-1,1[$.

Svolgimento. Applichiamo la formula risolutiva con $a(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ e $b(x) = -x^2$ (seguendo le notazioni delle dispense). Allora (usando $x_0 = 0$)

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Ne segue (ricordando che $-1 < x < 1$ e prendendo il giusto valore del modulo):

$$y(x) = \frac{1-x}{1+x}\left(y_0 - \int_0^x t^2\frac{1+t}{1-t}\,dt\right).$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^x t^2\frac{1+t}{1-t}\,dt = \int_0^x t^2\left(-1 + \frac{2}{1-t}\right) dt = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_0^x + \int_0^x \frac{2t^2}{1-t}\,dt =$$
$$-\frac{x^3}{3} + 2\int_0^x \left(\frac{t^2-1}{1-t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = -\frac{x^3}{3} - 2\int_0^x (t+1)\,dt + 2\left[-\ln|t-1|\right]_0^x =$$
$$-\frac{x^3}{3} - x^2 - 2x - \ln((x-1)^2).$$

Quindi

$$y(x) = \frac{1-x}{1+x}\left(y_0 + \frac{x^3+3x^2+6x}{3} + \ln((x-1)^2)\right).$$

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > \frac{4}{3} - \ln(4), \\ 0 & \text{se } y_0 = \frac{4}{3} - \ln(4), \\ -\infty & \text{se } y_0 < \frac{4}{3} - \ln(4). \end{cases}$$

(dove il caso con "=" si discute facilmente con de l'Hôpital), mentre

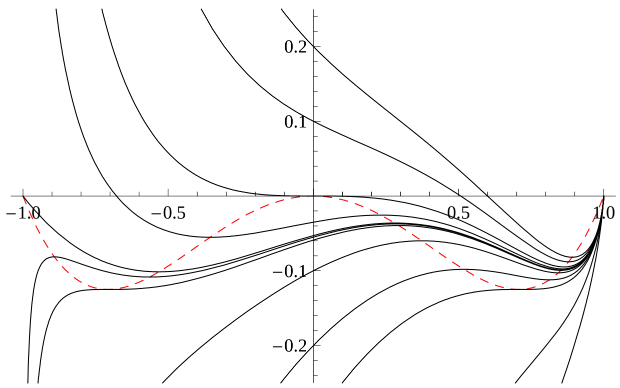
$$\lim_{x\to 1^-} y(x) = 0^-$$

(il polinomio $x-1$ "vince" su $\ln((x-1)^2)$, che comunque, andando a $-\infty$ determina il segno negativo).

Per discutere la monotonia introducuamo la funzione ausiliaria $g(x) := \dfrac{x^2(x^2-1)}{2}$, per $-1 < x < 1$, che per come è scritta l'equazione differenziale, ha la proprietà:

$$y'(x) > 0 \Leftrightarrow y(x) < g(x), \qquad y'(x) < 0 \Leftrightarrow y(x) > g(x), \qquad y'(x) = 0 \Leftrightarrow y(x) = g(x).$$

per tutte le x tra -1 e 1. Facendo un rapido studio di funzione si può tracciare il grafico di g (curva tratteggiata rossa nella figura) e di conseguenza i grafici delle soluzioni. Notiamo che i due punti di minimo per g sono $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ in cui la g vale $-\frac{1}{8}$. Dunque, nella figura, le soluzioni importanti sono le quattro curve con $y_0 = 0$ (che passa per $(0,0)$, quella con $y_0 = -\frac{7}{8} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$ (che passa per $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{8}\right)$), quella con $y_0 = -\frac{7}{8} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \ln\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$ (che passa per $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{8}\right)$) e quella con $y_0 = \frac{4}{3} - \ln(4)$ (che divide le curve che vanno a $-\infty$ da quelle che vanno a $+\infty$, nel punto $x = -1$).



In particolare le soluzioni sono strettamente crescenti su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $y_0 \leq -\frac{7}{8} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \ln\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$. $\square$