Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 15 settembre 2008

1. Se $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := x^2 - 2x^3$, allora (1/-1 punti a risposta)

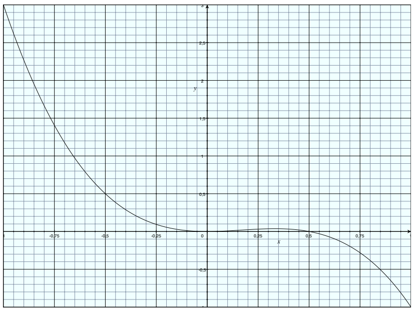
   (a) 0 è di minimo per f $\boxed{\text{NO}}$;

   (b) f ha un unico minimo relativo $\boxed{\text{NO}}$;

   (c) 1 è un punto di massimo per f $\boxed{\text{NO}}$;

   (d) f ha due punti stazionari $\boxed{\text{SI'}}$.

   Spiegazione. Facendo un rapido studio di funzione (vedi la figura) si perviene al grafico mostrato nella figura, da cui si traggono tutte le conclusioni indicate sopra.



□

2. Data la successione (a_n) definita da $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ si indichi quale tra le seguenti sia una successione estratta da (a_n) (2/-.5 punti)

$$(a)\ \frac{n+1}{n}, \quad (b)\ \boxed{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}}, \quad (c)\ \frac{2n}{n+1}, \quad (d)\ \frac{n+1}{2n+3}, \quad (e)\ \frac{n}{2n+3}.$$

   Spiegazione. La (a) non va bene in quanto $\dfrac{n+1}{n} \geq 1$ mentre $a_n = \dfrac{n}{n+1} \leq 1$. Anche le (c), (d), ed (e) non possono essere estratte da (a_n) in quanto tendono a 2, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, mntre $a_n \to 1$. Invece

$$a_{2n} = \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{n+\frac{1}{2}}$$

   e dunque la successione in (b) si ottiene come estratta di (a_n). □

3. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (2 punti ciascuno)

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+2)!}}{n} = \boxed{\frac{1}{e}}$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^6+1)}{n+1} = \boxed{0}$

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^8 - 2n^6 + n^2 - 5} - n^2 + 1 = \boxed{+\infty}$

   (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n - 5^n n!}{n^n} = \boxed{-\infty}$

   Spiegazione.
   - Usiamo Cesaro per la successione $a_n := \dfrac{(n+2)!}{n^n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n+2)!} = \frac{n+3}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

   per cui $\dfrac{\sqrt[n]{(n+2)!}}{n} = \sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{1}{e}$;

- ricordando che $\dfrac{\ln(n)}{n} \to 0$, si ha:

$$\frac{\ln(n^6+1)}{n+1} = \frac{6\ln(n) + \ln(1+1/n^6)}{n+1} = 6\frac{\ln(n)}{n}\frac{1+o(1)}{1+o(1)} \to 0$$

- si ha $\sqrt{n^8 - 2n^6 + n^2 - 5} - n^2 + 1 = n^4\left(\sqrt{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^6} - \frac{5}{n^8}} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right) \to +\infty$;
- posto $a_n := \dfrac{5^n n!}{n^n}$ si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{5^n n!} = 5\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{5}{e} > 1$$

  per cui $a_n \to +\infty$; d'altra parte se $b_n := \dfrac{e^n}{n^n}$ come noto si ha che $b_n \to 0$; allora

$$\frac{e^n - 5^n n!}{n^n} = b_n - a_n \to -\infty.$$

$\square$

4. Calcolare il limite (6 punti – DA SVOLGERE)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\sqrt[3]{1+3x} - 1}{\sin(x^2)} = -\frac{3}{2}.$$

Svolgimento. Usiamo gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}
&e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2);\\
&\sqrt[3]{1+3x} = 1 + \frac{1}{3}3x + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)(3x)^2 + o(x^2) = 1 + x - x^2 + o(x^2)\\
&\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

da cui

$$e^{-x}\sqrt[3]{1+3x} = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + x - x^2 + o(x^2)\right) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

e infine

$$\frac{e^{-x}\sqrt[3]{1+3x} - 1}{\sin(x^2)} = \frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \to -\frac{3}{2}.$$

$\square$

5. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC) (punti 2/-1 per ognuna).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ $\boxed{\text{C}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n n!}{n^n}$ $\boxed{\text{NC}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2+2}\right) - 1\right)$ $\boxed{\text{AC}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n n!}{3^n n^n}$ $\boxed{\text{AC}}$

Spiegazione.
- Poniamo $a_n := (-1)^n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$; allora

$$|a_n| = 2^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln(2)}{n}} - 1 \approx \frac{\ln(2)}{n}$$

  e dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$ si ha che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge assolutamente; Peraltro si vede facilmente che $|a_n|$ decresce rispetto a n e tende a zero, e quindi la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

- Poniamo $a_n := \dfrac{4^n n!}{n^n}$ e notiamo che $a_n \geq 0$ per ogni n; usando il criterio del rapporto
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^n}{(n+1)^n} \to \frac{4}{e} > 1$$
per cui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge;
- Poniamo $a_n := (-1)^n n \left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2+2}\right) - 1\right)$; allora
$$|a_n| = n \left(\cos\left(\frac{1}{n^2+2}\right) - 1\right) \approx n\frac{1}{2}\frac{1}{(n^2+2)^2} \approx \frac{1}{2n^3}$$
e quindi la serie converge assolutamente, dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3} < +\infty$.
- Applicando il criterio del rapporto, esattamente come nel caso (b) si trova $\dfrac{4}{3e} < 1$, per cui la serie converge assolutamente.

□

6. Data la funzione f definita da $f(x) := 3^x - x^3 - 2$ si trovi il valore di $(f^{-1})'(0)$ tra quelli riportati di seguito (punti 2/-0.5):
$$(a)\ \ln(3) - 3,\ (b)\ \frac{1}{\ln(3) - 3},\ (c)\ \ln(27) - 3,\ (d)\ \boxed{\frac{1}{\ln(27) - 3}},\ (e)\ \frac{1}{\ln(3)}.$$
Spiegazione. Si ha $f(1) = 3-1-2 = 0$, $f'(x) = \ln(3)3^x - 3x^2$ e quindi $f'(1) = 3\ln(3) - 3 = \ln(27) - 3$. Applicando la formula sulla derivata della funzione inversa:
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\ln(27) - 3}.$$

□

7. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio (punti 4):
$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx = \boxed{6}.$$
Spiegazione. Integrando varie volte per parti:
$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx = \underbrace{\left[-x^3 e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 3\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx =$$
$$\underbrace{\left[-3x^2 e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 6\int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx = \underbrace{\left[-6x e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 6\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \left[-6e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 6.$$

□

8. Si consideri l'equazione differenziale (punti 6 in tutto DA SVOLGERE)
$$y' = \frac{2x}{x^2 - 1} y - x \qquad -1 < x < 1.$$
   (a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y_0$.

(b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$.

(c) Si traccino i grafici delle soluzioni pi signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.

(d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) la soluzione $y(x)$ strettamente crescente in $]0,1[$.

Svolgimento. Applichiamo la formula risolutiva con $a(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ e $b(x) = -x$ (seguendo le notazioni delle dispense). Allora (usando $x_0 = 0$)

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \ln\left|x^2-1\right|.$$

Ne segue (ricordando che $-1 < x < 1$ e prendendo il giusto valore del modulo):

$$y(x) = (1-x^2)\left(y_0 - \int_0^x \frac{t}{1-t^2}\,dt\right) =$$
$$(1-x^2)\left(y_0 + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|\right) = (1-x^2)\left(y_0 + \ln(\sqrt{1-x^2})\right).$$

Possiamo notare che la soluzione risulta pari e quindi il comportamento per le $x < 0$ si ricava per simmetria da quello nelle $x > 0$. SI vede facilmente che:

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = \lim_{x\to 1^-} y(x) = 0^-$$

(il polinomio $x-1$ "vince" su $\ln((x-1)^2)$, che comunque, andando a $-\infty$ determina il segno negativo).

Per discutere la monotonia introduciamo la funzione ausiliaria $g(x) := \dfrac{(x^2-1)}{2}$, per $-1 < x < 1$, che per come scritta l'equazione differenziale, implica che

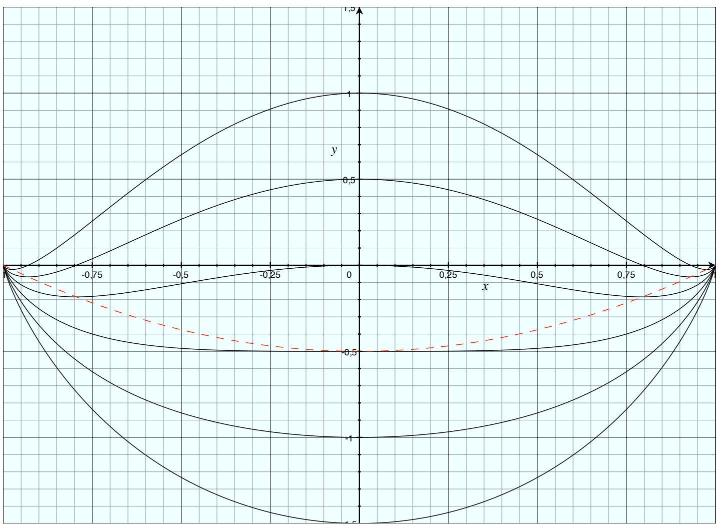
$$y'(x) > 0 \Leftrightarrow y(x) > g(x), \qquad y'(x) < 0 \Leftrightarrow y(x) < g(x), \qquad y'(x) = 0 \Leftrightarrow y(x) = g(x).$$

per tutte le x tra -1 e 0 e

$$y'(x) > 0 \Leftrightarrow y(x) < g(x), \qquad y'(x) < 0 \Leftrightarrow y(x) > g(x), \qquad y'(x) = 0 \Leftrightarrow y(x) = g(x).$$

per tutte le x tra 0 e 1. Tracciato il grafico di g (parabola tratteggiata rossa nella figura) si possono disegnare di conseguenza i grafici delle soluzioni.

In particolare le soluzioni sono strettamente crescenti tra 0 e 1 se e solo se $y_0 \le -\dfrac{1}{2}$.



$\square$