Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 11 giugno 2009 FILA A

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{\sin(|x|) - |x|}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := 0$, allora (1/-1 p.)
   (a) $f$ è continua su $\mathbb{R}$; (b) $f$ è derivabile in $x = 0$;
   (c) $f$ è limitata su $\mathbb{R}$; (d) $f$ è dispari su $\mathbb{R}$.

2. Se $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3+n}, \quad n \geq 1$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a) \sup_{n\geq 1} a_n = 0, (b) \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{3}, (c) \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{4}, (d) \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{5}, (e) \sup_{n\geq 1} a_n = +\infty.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n} + n^4}{5^n - n^2}} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^3(1+n) - n}{3n+2}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (4 punti)

$$\lim_{x\to 0} \left( \frac{1+x^2}{e^{x^2}} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}}$$

---

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

$$(a) \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0, \quad (b) \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0, \quad (c)\ y''(0) = -1, \quad (d)\ y(-x) = -y(x).$$

6. Per quali valori di $\alpha$ converge la seguente serie numerica: (2/-0.5 p.) 2/

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 + n + n^{2\alpha} + n^{8-5\alpha}}$$

$$(a)\ \alpha < 1, \qquad (b)\ 1 < \alpha, \qquad (c)\ \alpha < \frac{6}{5}, \qquad (d)\ \frac{6}{5} < \alpha, \qquad (e)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (3 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(25+x^2)(x+5)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 2y + 4\frac{x+1}{x+2}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da $y_0$) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di $y_0$) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di $y_0$ (3 p.);
   (d) si dica per quali valori di $y_0$ l'equazione $y(x) + 1 = 0$ ha due soluzioni (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 11 giugno 2009 FILA B

1. Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{\sin(|x|)-|x|}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := 0$, allora (1/-1 p.)
   (a) $f$ è derivabile in $x = 0$; (b) $f$ è continua su $\mathbb{R}$;
   (c) $f$ è dispari su $\mathbb{R}$; (d) $f$ è limitata su $\mathbb{R}$.

2. Se $a_n = \dfrac{(-1)^n}{4+n}, \quad n \geq 1$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \sup_{n\geq 1} a_n = 0, (b)\ \sup_{n\geq 1} a_n = +\infty, (c)\ \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{7}, (d)\ \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{5}, (e)\ \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{6}.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^3(1+n)-n}{4n+5} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}+n^4}{4^n-n^2}}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (4 punti)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x^2}{e^{x^2}}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}}$$

---

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

$$(a)\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0, \quad (b)\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0, \quad (c)\ y(-x) = -y(x), \quad (d)\ y''(0) = -1.$$

6. Per quali valori di $\alpha$ converge la seguente serie numerica: (2/-0.5 p.) 2/

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n+n^{4\alpha}+n^{8-4\alpha}}$$

$$(a)\ \forall\alpha\in\mathbb{R}, \qquad (b)\ \alpha < \frac{1}{2}, \qquad (c)\ \frac{1}{2} < \alpha, \qquad (d)\ \frac{3}{2} < \alpha, \qquad (e)\ \alpha < \frac{3}{2}.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (3 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(16+x^2)(x+4)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 2y + 4\frac{x+1}{x+2}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da $y_0$) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di $y_0$) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di $y_0$ (3 p.);
   (d) si dica per quali valori di $y_0$ l'equazione $y(x) + 1 = 0$ ha due soluzioni (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 11 giugno 2009 FILA C

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{\sin(|x|) - |x|}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := 0$, allora (1/-1 p.)
   (a) $f$ è limitata su $\mathbb{R}$; (b) $f$ è dispari su $\mathbb{R}$;
   (c) $f$ è continua su $\mathbb{R}$; (d) $f$ è derivabile in $x = 0$.

2. Se $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{5+n}, \quad n \geq 1 \quad$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{5}, (b)\ \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{6}, (c)\ \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{7}, (d)\ \sup_{n\geq 1} a_n = 0, (e)\ \sup_{n\geq 1} a_n = +\infty.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n} + n^4}{3^n - n^2}} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^3(1+n) - n}{5n+9}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (4 punti)

$$\lim_{x\to 0} \left( \frac{1+x^2}{e^{x^2}} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}}$$

---

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

$$(a)\ y''(0) = -1, \quad (b)\ y(-x) = -y(x), \quad (c)\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0, \quad (d)\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0.$$

6. Per quali valori di $\alpha$ converge la seguente serie numerica: (2/-0.5 p.) 2/

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 + n + n^{6\alpha} + n^{8-5\alpha}}$$

$$(a)\ \forall\alpha \in \mathbb{R}, \qquad (b)\ \frac{1}{3} < \alpha, \qquad (c)\ \alpha < \frac{1}{3}, \qquad (d)\ \frac{6}{5} < \alpha, \qquad (e)\ \alpha < \frac{6}{5}.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (3 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(9+x^2)(x+3)}\,dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 2y + 4\frac{x+1}{x+2}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da $y_0$) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di $y_0$) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di $y_0$ (3 p.);
   (d) si dica per quali valori di $y_0$ l'equazione $y(x) + 1 = 0$ ha due soluzioni (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 11 giugno 2009 FILA D

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{\sin(|x|) - |x|}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := 0$, allora (1/-1 p.)

   (a) $f$ è dispari su $\mathbb{R}$; (b) $f$ è limitata su $\mathbb{R}$;
   (c) $f$ è derivabile in $x = 0$; (d) $f$ è continua su $\mathbb{R}$.

2. Se $a_n = \dfrac{(-1)^n}{6+n}, \quad n \geq 1$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \sup_{n\geq 1} a_n = 0, (b)\ \sup_{n\geq 1} a_n = +\infty, (c)\ \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{8}, (d)\ \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{7}, (e)\ \sup_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{6}.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2 punti ciascuno)

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^3(1+n) - n}{6n+3} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}+n^4}{2^n - n^2}}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (4 punti)

$$\lim_{x\to 0} \left( \frac{1+x^2}{e^{x^2}} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}}$$

---

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

$$(a)\ y(-x) = -y(x), \quad (b)\ y''(0) = -1, \quad (c)\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0, \quad (d)\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

6. Per quali valori di $\alpha$ converge la seguente serie numerica: (2/-0.5 p.) 2/

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n+n^{8\alpha}+n^{8-4\alpha}}$$

$$(a)\ \frac{1}{4} < \alpha, \qquad (b)\ \alpha < \frac{1}{4}, \qquad (c)\ \frac{3}{2} < \alpha, \qquad (d)\ \alpha < \frac{3}{2}, \qquad (e)\ \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (3 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(4+x^2)(x+2)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 2y + 4\frac{x+1}{x+2}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da $y_0$) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di $y_0$) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di $y_0$ (3 p.);
   (d) si dica per quali valori di $y_0$ l'equazione $y(x) + 1 = 0$ ha due soluzioni (1 p.).