Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Prova scritta del 29 maggio 2003
SOLUZIONI

1.

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{(x+2)\sqrt{2-x}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+1/2)(t^2+1)}\,dt$$
$$\left(t := \sqrt{\frac{x}{2-x}} \Rightarrow x = \frac{2t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}, (x+2) = \frac{4t^2+2}{1+t^2}\right) =$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+1}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1/2}\,dx \text{ (Hermite) } = \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+1}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{2}{2t^2+1}\,dx =$$
$$\left[2\arctan(t) - \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t)\right]_0^{+\infty} = \boxed{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi}$$

$$\mathcal{R} : 2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi \text{ (A) ; } \sqrt{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi \text{ (B) ; } \sqrt{6}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ (C) ; } \sqrt{2}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi \text{ (D)}$$

2. per parti:

$$\int_0^\pi x\sin(kx)\,dx = \left[\frac{-x\cos(kx)}{k}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k}\,dx = -\frac{(-1)^k\pi}{k} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^\pi = \boxed{-\frac{(-1)^k\pi}{k}}$$

$$\mathcal{R} : \frac{\pi}{5}\text{(A) ; } -\frac{\pi}{2}\text{(B) ; } \frac{\pi}{3}\text{(C) ; } -\frac{\pi}{4}\text{(D)}$$

3. con la sostituzione $x^2 = t$:

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} |x|\sin(x^2)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx = \int_0^\pi x\sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^\pi = \boxed{2}$$

similmente si vede che $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx = 0$

$$\mathcal{R} : 2 \text{ (A,B,C,D)}$$

4. se si pone $t := \tan(x)$ allora $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ per cui:

$$\int_0^a \sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx = \int_0^{\tan(a)} \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\tan(a)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt =$$
$$\boxed{\mathrm{settsinh}(\tan(a)) = \ln\left(\frac{\sin(a)+1}{\cos(a)}\right) = \ln\left(\frac{1+\tan(a/2)}{1-\tan(a/2)}\right)}$$

$\mathcal{R}$: settsinh(tan(4))(A) ; settsinh(tan(3))(B) ; settsinh(tan(2))(C) ; settsinh(tan(5))(D)

5. Convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-e^{-x}}{x^\alpha(1+x^k)}\,dx := \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$
vicino a zero:

$$f(x) = \frac{1+x^2/2+o(x^2)-1+x+o(x)}{x^\alpha(1+o(1))} = \frac{x+o(x)}{x^\alpha+o(x^\alpha)} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}(1+o(1))$$

da cui la condizione $\alpha-1<1 \Leftrightarrow \alpha<2$.
All'infinito ($\sqrt{1+x^2}=x+o(x)$, $e^{-x}=o(x)$) e quindi:

$$f(x) = \frac{x+o(x)}{x^\alpha(x^k+o(x^k))} = \frac{x(1+o(1))}{x^{\alpha+k}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{\alpha+k-1}}(1+o(1))$$

da cui la condizione $\alpha+k-1>1 \Leftrightarrow \alpha>2-k$.
In definitiva le convergenza si ha se e solo se $\boxed{2-k<\alpha<2}$

$$\mathcal{R}: -3<\alpha<2 \text{ (A) };\ 0<\alpha<2 \text{ (B) };\ -1<\alpha<2 \text{ (C) };\ -2<\alpha<2 \text{ (D)}$$

6. ricordando la somma della serie geometrica di ragione $1/a<1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{a^n} = 7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n} = 7\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n - 1\right) = 7\left(\frac{1}{1-1/a}-1\right) = \boxed{\frac{7}{a-1}}$$

$$\mathcal{R}: 7 \text{ (A) };\ \frac{7}{2} \text{ (B) };\ \frac{7}{5} \text{ (C) };\ 1 \text{ (D)}$$

7. Se $f(x,y) := xy+ay$ allora è chiaro che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+a$$

e quindi l'equazione del piano tangente in $(1,1)$ è:

$$z = f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 1+a+(x-1)+(1+a)(y-1) = \boxed{-1+x+(1+a)y}$$

$\mathcal{R}1: z=-1+x+6y$ (A) ; $z=-1+x+5y$ (B) ; $z=-1+x+4y$ (C) ; $z=-1+x+3y$ (D)

Inoltre equagliando a zero le due derivate parziali si ottiene unicamente la condizione $x=-a$, $y=0$, cioè l'unico punto critico è $\boxed{(-a,0)}$.

$$\mathcal{R}2: (-5,0) \text{ (A) };\ (-4,0) \text{ (B) };\ (-3,0) \text{ (C) };\ (-2,0) \text{ (D)}$$

Si ha inoltre $f(-a,0)=0$ e se si studia la linea di livello $f(x,y)=0$ si trova che questa è formata dai punti per cui $y(x+a)=0 \Leftrightarrow (x=-a)$ oppure $(y=0)$ (due rette perpendicolari) da cui si vede facilmente che vicino a $(-a,0)$ ci sono punti in cui $f(x,y)>0$ e punti in cui $f(x,y)<0$. Quindi $(-a,0)$ non è nè massimo nè minimo e dunque $\boxed{f \text{ non ha né massimo né minimo}}$.

8. L'equazione differenziale è:

$$y' = \frac{2}{x}y - x + 2a \quad , \quad y(a) = y_0 \qquad (x > 0)$$

Usando la formula per la soluzione delle equazioni lineari del primo ordine si ha

$$\boxed{y(x) = x^2\left(c - \frac{2a}{x} - \ln(x)\right)} \qquad , \qquad \text{dove } c := \frac{y_0}{a^2} + 2 + \ln(a)$$

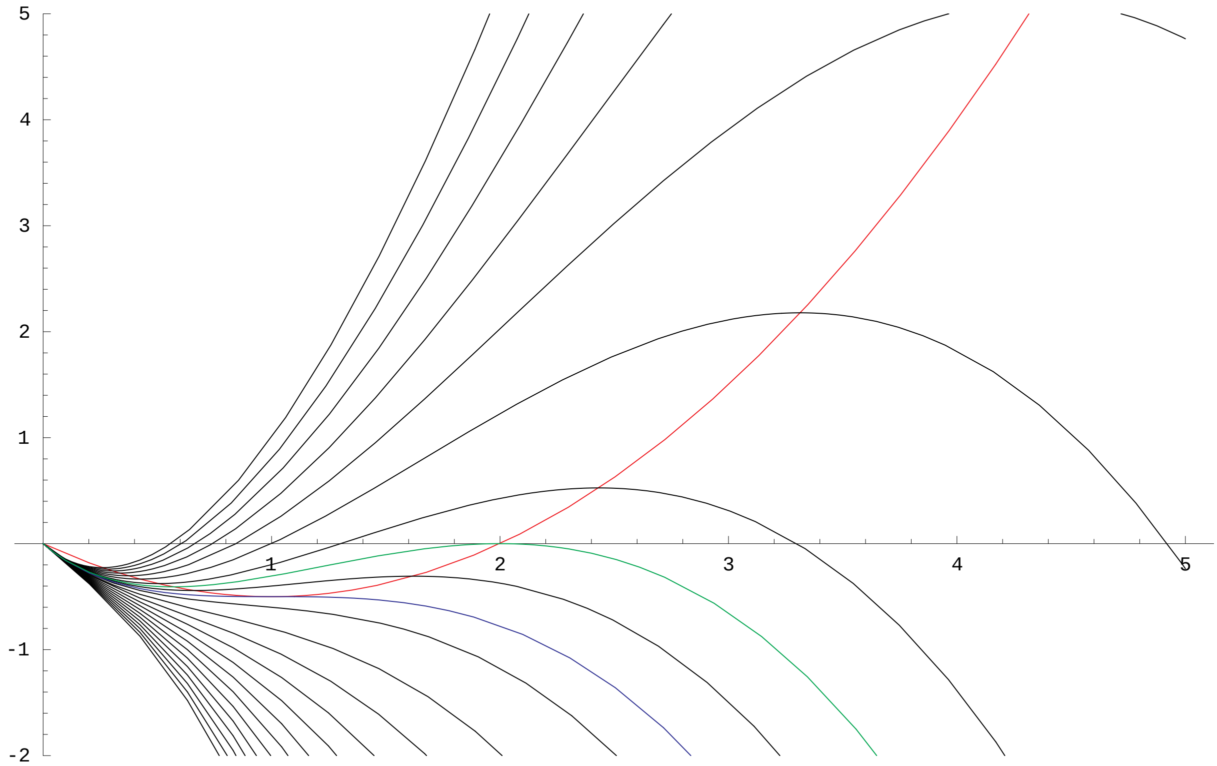
Si vede che (qualunque sia c):

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0^-} \quad , \quad \boxed{\lim_{x\to +\infty} y(x) = -\infty}$$

(per il primo limite si osservi che il termine tra parentesi tonde tende a $-\infty$ perché $1/x$ "vince" su $\ln(x)$).
A questo punto conviene tracciare il grafico della parabola $y = x(x-2a)/2$, che corrisponde ai punti (x, y) da cui le soluzioni partono con derivata zero. Tale curva ha minimo in a; ciò significa che una curva speciale è quella che passa per $(a, -a^2/2)$ cioè quella corrispondente a $y_0 = -a^2/2$. Si vede allora (cfr. i grafici della figura in cui $a = 1$; la curva rossa è la parabola, la curva blu è la soluzione con $y_0 = -a^2/2$) che per $y_0 > -a^2/2$ la y prima scende, poi risale per un po' e poi scende definitivamente, mentre, se $y_0 < -a^2/2$ la curva scende sempre.
Per rispondere all'ultimo quesito conviene tracciare la soluzione che passa per $(0, 2a)$ (curva verde in figura) - $(0, 2a)$ è una delle due intersezioni della parabola con l'asse x e questo fa sì che la soluzione suddetta sia tangente da sotto all'asse x (come mostra la figura). Ne segue che le curve con $y(2a) > 0$ passano due volte per zero mentre quelle con $y(2a) < 0$ non intersecano mai l'asse x. Quindi la condizione perché $y(x) = 0$ abbia almeno una soluzione è $y(2a) \geq 0$. Per esprimere questa condizione in termini di y_0 basta ricavare il valore di y_0 per cui la relativa y verifica $y(2a) = 0$, cioè:

$$0 = y(2a) = (2a)^2\left(c - \frac{2a}{2a} - \ln(2a)\right) \Leftrightarrow c = 1 + \ln(2a) \Leftrightarrow y_0 = a^2(\ln(2) - 1)$$

Quindi le curve che intersecano l'asse x sono tutte e sole quelle con $\boxed{y_0 \geq a^2(\ln(2) - 1)}$.


5
4
3
2
1
-1
-2
1
2
3
4
5