Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 23 giugno 2003 Soluzioni (A/B/C/D)

- Se f è definita da $f(x) = x - a\arctan(x)$ si ha $f'(x) = 1 - \dfrac{a}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-a}{1+x^2}$. Se $0 \le x \le 1$ si ha allora $f'(x) < 0$, dunque f è decrescente (perché $a > 2$) per cui:

$$\boxed{\min_{[0,1]} f = f(1) = 1 - \frac{a\pi}{4}} \quad , \quad \boxed{\max_{[0,1]} f = f(0) = 0}$$

- Data f definita da $f(x) = (\ln(1+x) + ax + 2)^2$ si ha $f(0) = 4$, $f'(0) = 4(1+a)$. Allora $f^{-1}(2) = 0$ e $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \boxed{\dfrac{1}{4(a+1)}}$

- Si calcoli l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{ax}+1}}\, dx$$

Usando la sostituzione $t = e^{ax}$, poi $\sqrt{t+1} = s$, infine Hermite l'integrale diventa:

$$\frac{1}{a}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\, dt = \frac{2}{a}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{(s^2-1)}\, ds =$$
$$\frac{1}{a}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) ds = \frac{1}{a}\left[\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} =$$
$$\boxed{\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{2}{a}\ln\left(\sqrt{2}+1\right) = \frac{2}{a}\text{settsenh}(1)}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge la seguente serie (3p.):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{\alpha} - 1 + \frac{a}{n}\right)$$

Notiamo che $\sqrt[n]{\alpha} = e^{\frac{\ln(\alpha)}{n}}$. Usando lo sviluppo di Taylor si trova:

$$e^{x\ln(\alpha)} - 1 + ax = 1 + x\ln(\alpha) + O(x^2) - 1 + ax = (\ln(\alpha) + a)\,x + O(x^2)$$

Allora se $(\ln(\alpha) + a) \neq 0$ il termine generale della serie è asintotico a $(\ln(\alpha) + a)\,\dfrac{1}{n}$, da cui la serie diverge. Se invece vale l'equaglianza tale termine è asintotico a $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ e in questo unico caso la serie converge. In definitiva deve essere: $(\ln(\alpha) + a) = 0$ e cioè $\boxed{\alpha = e^{-a}}$.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^\alpha\cos(n\pi) + n}{n^k - n + 1}$ si ha:

$$a_n \text{ è limitata per } \boxed{\alpha \le k} \quad , \quad a_n \text{ ha limite } (=0) \text{per } \boxed{\alpha < k}$$

in quanto $\dfrac{n}{n^k - n + 1} \to 0$ mentre $\dfrac{n^\alpha}{n^k - n + 1}$ tende a $0/1/+\infty$ se $\alpha < k/\alpha = k/\alpha > k$; però quest'ultimo termine, moltiplicato per $\cos(n\pi) = (-1)^n$, converge se e solo se tende a zero.

- Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6\ln(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1}-6+x^2}{x^2}=\boxed{0}$$

Infatti:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\quad ;\quad \sqrt{1+2x}=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\qquad\Rightarrow$$
$$\frac{6\ln(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1}-6+x^2=\frac{6x-3x^2+2x^3+o(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}-6+x^2=$$
$$\frac{12-6x+4x^2+o(x^2)}{2-x+x^2+o(x^2)}-6+x^2=\frac{12-6x+4x^2+o(x^2)+(2-x+x^2+o(x^2))(x^2-6)}{2-x+x^2+o(x^2)}=$$
$$\frac{12-6x+4x^2+o(x^2)+2x^2-x^3+x^4+o(x^4)-12+6x-6x^2+o(x^2)}{2+o(1)}=\frac{o(x^2)}{2+o(1)}$$

per cui, dividendo per x^2, il tutto tende a zero.

- Sia data la funzione $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ definita da $f(x,y)=x^2-y^2+a(x^2+y^2)^2$.
Allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+a2(x^2+y^2)2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y+a2(x^2+y^2)2y$. Ne segue che il piano tangente nel punto $(1,1)$ ha equazione:

$$z=4a+(8a+2)(x-1)+(8a-2)(y-1)=\boxed{-12a+(8a+2)x+(8a-2)y}$$

Per quanto riguarda i punti critici, eguagliando a zero entrambe le derivate parziali si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\Leftrightarrow(x=0)\text{ oppure }(1+2a(x^2+y^2)=0\text{ (impossibile) })\Leftrightarrow x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0\Leftrightarrow(y=0)\text{ oppure }1=2a(x^2+y^2)$$

Quindi i punti critici per f f sono:

$$\boxed{(x_1,y_1)=(0,0)}\quad,\quad\boxed{(x_1,y_1)=\left(0,\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)}\quad,\quad\boxed{(x_1,y_1)=\left(0,-\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)}$$

Inoltre si vede facilmente che f tende a $+\infty$, dunque deve avere minimo e dunque

$$\boxed{f\text{ ha minimo in }\mathbf{R}^2\boxed{\text{si}}}$$

(si potrebbe vedere che il minimo si realizza nei punti simmetrici $\left(0,\pm\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$, che $(0,0)$ è punto di sella e dunque che f non ha nessun massimo locale).

- Si consideri l'equazione differenziale

$$y'=\frac{3}{x}y-\sqrt{x^2+1}\quad,\quad y(1)=y_0\qquad x>0$$

· La soluzione è:

$$y(x) = x^3 \left(c + \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right) \right)$$

dove $c := y_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. Per questo si noti che:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}\, dx = (\text{ sostituzione } y = \sqrt{1+x^2}\ ) \int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}\, dy = \text{ (per parti)}$$
$$y\frac{-1}{2(y^2-1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2-1}\, dy = -\frac{y}{2(y^2-1)} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) =$$
$$-\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1}\right) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}\right)$$

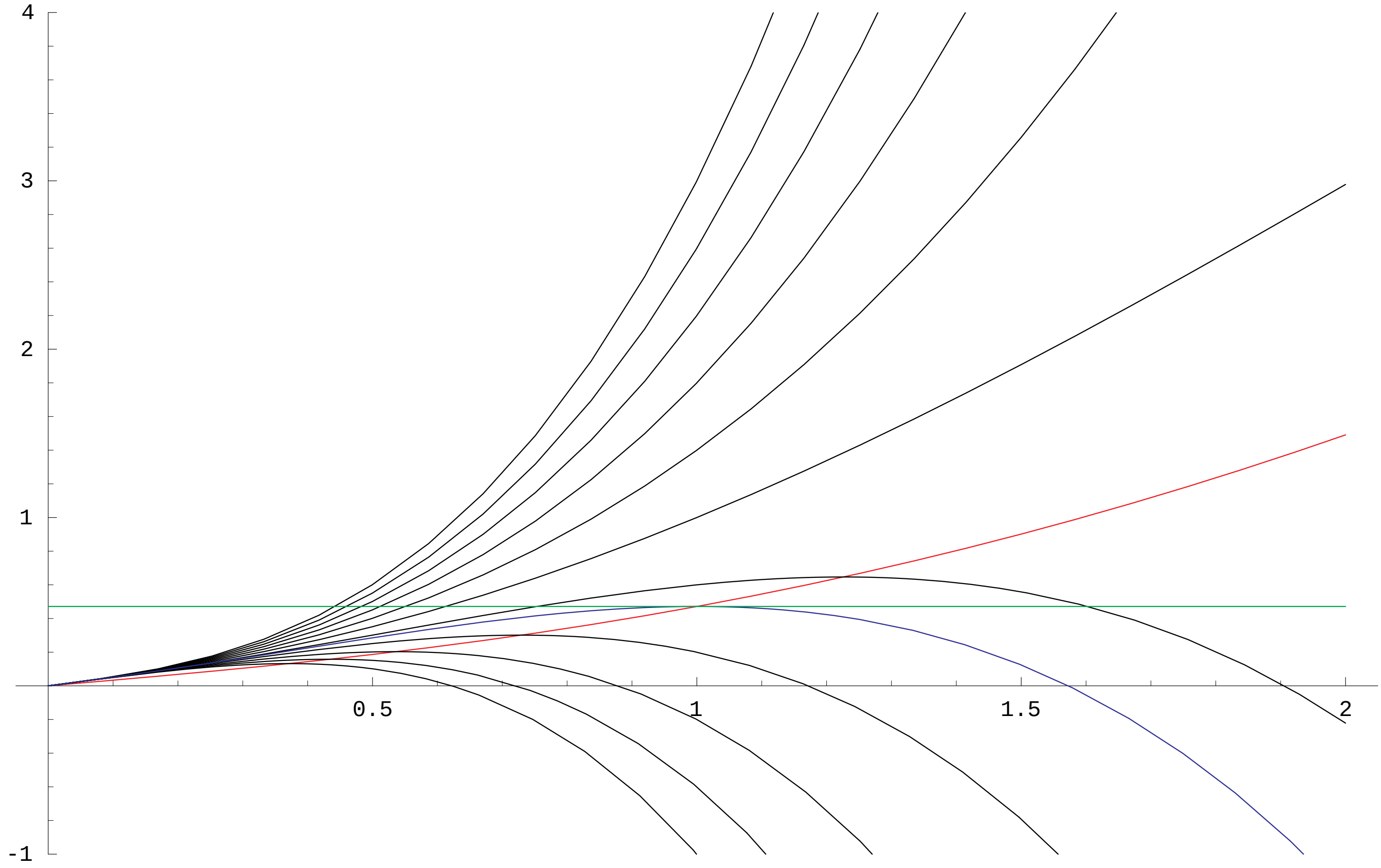
· I limiti sono:

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0^+ \text{ (per qualunque } y_0\text{)}, \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 \geq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \\ -\infty & \text{se } y_0 < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

(il caso $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$ richiede di usare la regola dell'Hospital).

· Vedi figura; la curva rossa è $g(x) := \dfrac{x\sqrt{1+x^2}}{3}$; la curva blu è quella relativa a $y_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; la curva verde è la retta $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; queste due ultime curve servono per rispondere all'ultima domanda).

· Dalla figura *si vede che* l'equazione $y(x) = 0$ non ha nessuna soluzione per $y_0 < \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, ha una soluzione (*di molteplicità due*) per $y_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ha due soluzioni per $\dfrac{\sqrt{2}}{3} < y_0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$ e di nuovo una soluzione per $y_0 \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. Quindi l'ultima risposta è $\boxed{y_0 \geq \dfrac{\sqrt{2}}{3}}$



4
3
2
1
-1
0.5
1
1.5
2