Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 23 giugno 2003 -A-

Cognome ____________________ Nome ____________________

- Si consideri la funzione f definita da $f(x) = x - 3\arctan(x)$. Allora (1,5+1,5p.):

$$\min_{[0,1]} f = \underline{\qquad\qquad\qquad} \quad , \quad \max_{[0,1]} f = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

- Data f definita da $f(x) = (\ln(1+x)+2x+2)^2$ si ha (3p.): $(f^{-1})'(4) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$
- Si calcoli l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{3x}+1}}\,dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α converge la seguente serie (3p.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{\alpha} - 1 + \frac{4}{n} \right)$$

: α ____________________.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^\alpha \cos(n\pi) + n}{n^3 - n + 1}$ si ha (1,5+1,5p:):

a_nè limitata per ____________________

$a_n$ha limite per ____________________

- Si calcoli (6p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{6\ln(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1} - 6 + x^2}{x^2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2(x^2+y^2)^2$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

$z = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ (1,5 p.)

Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (2,5 p.):

$(x_1, y_1) = \underline{\qquad}$, $(x_2, y_3) = \underline{\qquad}$, $(x_3, y_3) = \underline{\qquad}$, $(x_4, y_4) = \underline{\qquad}$,

Si dica se (1 p.)

f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 8 p. in tutto)

$$y' = \frac{3}{x}y - \sqrt{x^2+1} \quad , \quad y(1) = y_0 \qquad x > 0$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{2cm}} \end{cases}, \quad \lim_{x\to +\infty} y(x) = \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ha almeno una

soluzione____________________

Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 23 giugno 2003 -B-

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

- Si consideri la funzione f definita da $f(x) = x - 4\arctan(x)$. Allora (1,5+1,5p.):

$$\min_{[0,1]} f = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad , \quad \max_{[0,1]} f = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Data f definita da $f(x) = (\ln(1+x)+4x+2)^2$ si ha (3p.): $(f^{-1})'(4) =$ ____________________

- Si calcoli l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{4x}+1}}\, dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α converge la seguente serie (3p.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{\alpha} - 1 + \frac{9}{n} \right)$$

: α ____________________.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^\alpha \cos(n\pi) + n}{n^4 - n + 1}$ si ha (1,5+1,5p:):

a_nè limitata per ______________________________

$a_n$ha limite per ______________________________

- Si calcoli (6p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{6\ln(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1} - 6 + x^2}{x^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4(x^2+y^2)^2$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

$z =$ ______________________________ (1,5 p.)

Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (2,5 p.):

$(x_1, y_1) =$ ________ , $(x_2, y_3) =$ ________ , $(x_3, y_3) =$ ________ , $(x_4, y_4) =$ ________ ,

Si dica se (1 p.)

f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 8 p. in tutto)

$$y' = \frac{3}{x}y - \sqrt{x^2+1} \quad , \quad y(1) = y_0 \qquad x > 0$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_ \end{cases}, \quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ha almeno una

soluzione____________________

Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 23 giugno 2003 -C-

Cognome ______________________ Nome ______________________

- Si consideri la funzione f definita da $f(x) = x - 6\arctan(x)$. Allora (1,5+1,5p.):

$$\min_{[0,1]} f = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad , \quad \max_{[0,1]} f = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Data f definita da $f(x) = (\ln(1+x)+5x+2)^2$ si ha (3p.): $(f^{-1})'(4) =$ ______________
- Si calcoli l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{6x}+1}}\, dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α converge la seguente serie (3p.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{\alpha} - 1 + \frac{16}{n} \right)$$

: α ______________.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^\alpha \cos(n\pi) + n}{n^6 - n + 1}$ si ha (1,5+1,5p:):

a_nè limitata per ______________________

$a_n$ha limite per ______________________

- Si calcoli (6p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{6\ln(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1} - 6 + x^2}{x^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 - y^2 + 5(x^2+y^2)^2$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

$z =$ ______________________ (1,5 p.)

Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (2,5 p.):

$(x_1, y_1) =$ ________ , $(x_2, y_3) =$ ________ , $(x_3, y_3) =$ ________ , $(x_4, y_4) =$ ________ ,

Si dica se (1 p.)

f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 8 p. in tutto)

$$y' = \frac{3}{x}y - \sqrt{x^2+1} \quad , \quad y(1) = y_0 \qquad x > 0$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} & \text{se } y_0\underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} & \text{se } y_0\underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} & \text{se } y_0\underline{\qquad\qquad} \end{cases}, \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} & \text{se } y_0\underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} & \text{se } y_0\underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} & \text{se } y_0\underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ha almeno una

soluzione____________________

Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 23 giugno 2003 -D-

Cognome ______________________ Nome ______________________

- Si consideri la funzione f definita da $f(x) = x - 5\arctan(x)$. Allora (1,5+1,5p.):

$$\min_{[0,1]} f = \_\_\_\_\_\_\_\_ \quad , \quad \max_{[0,1]} f = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Data f definita da $f(x) = (\ln(1+x)+3x+2)^2$ si ha (3p.): $(f^{-1})'(4) =$ ______________________
- Si calcoli l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{5x}+1}}\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α converge la seguente serie (3p.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{\alpha} - 1 + \frac{25}{n} \right)$$

: α______________________.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^\alpha \cos(n\pi) + n}{n^5 - n + 1}$ si ha (1,5+1,5p:):

a_nè limitata per ______________________

$a_n$ha limite per ______________________

- Si calcoli (6p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{6\ln(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1} - 6 + x^2}{x^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3(x^2 + y^2)^2$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1, 1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

$z =$ ______________________ (1,5 p.)

Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (2,5 p.):

$(x_1, y_1) =$ ________ , $(x_2, y_3) =$ ________ , $(x_3, y_3) =$ ________ , $(x_4, y_4) =$ ________ ,

Si dica se (1 p.)

f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 8 p. in tutto)

$$y' = \frac{3}{x}y - \sqrt{x^2+1} \quad , \quad y(1) = y_0 \qquad x > 0$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_ \end{cases}, \quad \lim_{x\to +\infty} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ha almeno una

soluzione____________________