Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta intermedia del 7 dicembre 2007

1. Si consideri la successione di funzioni (f_n), dove $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ è definita da

$$f_n(x) := \frac{nx}{1 + n^\alpha x^2}.$$

e dove $\alpha > 0$ è un parametro.

(a) Si trovino i valori di α per cui (f_n) converge in $L^1([0, +\infty[)$.

(b) Si trovino i valori di α per cui (f_n) converge in $L^2([0, +\infty[)$.

(c) (facoltativo) Si trovino i valori di α per cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0, +\infty[)$.

Svolgimento. A causa di una svista nel trascrivere l'esercizio il primo e il terzo punto sono BANALI (e quindi più facili: si veda alla fine qual'era il testo pensato in origine). Infatti nessuna f_n è in $L^1([0, \infty[)$ dato che per ogni n $f_n(x) \approx \dfrac{1}{x}$ per $x \to +\infty$. Dunque le funzioni, e quindi la serie , non convergono per nessun α.

Consideriamo la convergenza L^2. Dato che $\alpha > 0$ si ha, per $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{se } \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } \alpha > 1, \end{cases}$$

si deduce che, se esiste f in L^2 tale che $f_n \to f$ in L^2, deve essere, per quasi ogni x,

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nel caso } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{nel caso } \alpha = 1, \\ 0 & \text{nel caso } \alpha > 1. \end{cases}$$

(perchè la convergenza puntuale individua il limite L^2). Dato che né la funzione $f(x) = 1/x$ né tantomeno $f(x) = +\infty$ sono in $L^2([0, +\infty[)$, la successione non converge se $\alpha \le 1$. Inoltre se $\alpha > 1$ la successione, se converge, converge a zero. Vediamo per quali $\alpha > 1$ la successione converge a zero in L^2. Si ha:

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_0^{+\infty} f_n(x)^2\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{n^2x^2}{(1+n^\alpha x^2)^2}\,dx = n^{2-3\alpha/2}\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2}\,dy$$

(usando la sostituzione $y = n^{\alpha/2}x \Leftrightarrow x = n^{-\alpha/2}y \Rightarrow dx = n^{-\alpha/2}dy$; notiamo che non serve calcolare l'integrale).

Dato che $n^{2-3\alpha/2} \to 0$ se e solo se $\alpha > 4/3$, la successione converge se e solo se $\alpha > 4/3$. $\square$

2. Si consideri la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \le t \le \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{3\pi}{4}, \\ \pi - t & \text{se } \frac{3\pi}{4} \le t \le \pi. \end{cases}$$

Dopo aver tracciato il grafico di f, si dica per quali valori di $\lambda > 0$ il problema:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione.

Si dica inoltre per quali valori di $\lambda > 0$ il problema ha un unica soluzione y e in questo caso si esprima y mediante un'opportuna serie di Fourier.

Svolgimento. Per risolvere il problema con dati nulli agli estremi sull'intervallo $[0, \pi]$ esprimeremo y ed f in serie di Fourier rispetto alle funzioni $\mathrm{s}_k(t) = \sin(kt)$. Se $f = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \mathrm{s}_k$, si ha:

$$\frac{\pi}{2} f_k = \int_0^\pi f(t)\sin(kt)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\sin(kt)\,dt + \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(kt)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (\pi - t)\sin(kt)\,dt =$$

$$\left[\frac{-t\cos(kt)}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(kt)\,dt + \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(kt)\,dt +$$

$$\left[\frac{-(\pi - t)\cos(kt)}{k}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos(kt)\,dt = -\frac{\pi}{4k}\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{k}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} +$$

$$\frac{\pi}{4}\left[\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{\pi}{4k}\cos\left(k\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{k}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} =$$

$$-\frac{\pi}{4k}\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{k^2}\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4k}\cos\left(k\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4k}\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$\frac{\pi}{4k}\cos\left(k\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{k^2}\sin\left(k\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{k^2}\left(\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(k\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Dunque

$$f_k = \frac{2}{\pi k^2}\left(\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(k\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

A quest punto se scriviamo $y = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k \mathrm{s}_k$, troviamo la consueta relazione:

$$(-k^2 + \lambda) y_k = f_k \qquad \forall k \geq 1$$

Quindi si ottiene che:

- La soluzione esiste unica se e solo se λ non è il quadrato di un intero positivo ($\lambda \neq k^2\, \forall k \geq 1$);
- La soluzione esiste (non unica) anche se $\lambda = k^2$ purché $f_k = 0$, cioè se

$$\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(k\frac{3\pi}{4}\right) = 0.$$

Mettendo $k = 1, 2, 3, 4$ si trova:

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0\\
&\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0\\
&\sin\left(3\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(3\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0\\
&\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(4\frac{3\pi}{4}\right) = \sin(\pi) + \sin(3\pi) = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

(e poi la situazione si ripete). Dunque la condizione di compatibilità è verificata se e solo se k è un intero pari; ciò significa che per $\lambda = k^2$ con k intero positivo pari la soluzione esiste anche se non è unica.

- La soluzione non esiste negli altri casi, cioè se $\lambda = k^2$ con k intero dispari.

Volendo si può ragionare in maniera più formale per trovare glii f_k:

$$\frac{k^2\pi}{2} f_k = \Im m\left(e^{ik\frac{\pi}{4}} + e^{ik\frac{3\pi}{4}}\right) = \Im m\left(e^{ik\frac{\pi}{2}}(e^{-ik\frac{\pi}{4}} + e^{ik\frac{\pi}{4}})\right) = 2\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)\Im m((i)^k) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari}\\ 2\cos\left(h\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)(-1)^h & \text{se } k = 2h+1,\ h \geq 0 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari}\\ 2(-1)^h\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)(-1)^h & \text{se } k = 2h+1,\ h \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari}\\ \sqrt{2} & \text{se } k = 2h+1,\ h \geq 0 \end{cases}$$

cioè

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari,}\\ \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

□

3. Si trovi la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + 4y' = te^{-2|t|} & \text{in } \mathbf{R}\\ y(-\infty) = y(+\infty) = y'(-\infty) = y'(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Utilizziamo la trasformata di Fourier. Per prima cosa troviamo la trasformata di $f(t) = te^{-2|t|}$. Si ha

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} te^{2t}e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} te^{-2t}e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$\left[\frac{te^{(2-i\omega)t}}{2-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{te^{(-2-i\omega)t}}{-2-i\omega}\right]_{0}^{+\infty} - \frac{1}{2-i\omega}\int_{-\infty}^{0} e^{(2-i\omega)t}\,dt - \frac{1}{-2-i\omega}\int_{0}^{+\infty} e^{(-2-i\omega)t}\,dt =$$

$$-\left[\frac{e^{(2-i\omega)t}}{(2-i\omega)^2}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{(-2-i\omega)t}}{(-2-i\omega)^2}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{(2+i\omega)^2} - \frac{1}{(2-i\omega)^2} = \frac{-8\omega i}{(4+\omega^2)^2}$$

Se allora trasformiamo entrambi i termini dell'equazione otteniamo:

$$(-\omega^2 + 4i\omega)\hat{y}(\omega) = \frac{-8\omega i}{(4+\omega^2)^2} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{8i}{(\omega - 4i)(\omega^2+4)^2}$$

Tale funzione ha come poli $4i$ (semplice) e $\pm 2i$ (doppi). Allora:

$$y(t) = \begin{cases} i\mathrm{Res}\left(\frac{8ie^{izt}}{(z-4i)(z^2+4)^2}, 4i\right) + i\mathrm{Res}\left(\frac{8ie^{izt}}{(z-4i)(z^2+4)^2}, 2i\right) & \text{se } t > 0, \\ -i\mathrm{Res}\left(\frac{8ie^{izt}}{(z-4i)(z^2+4)^2}, -2i\right) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Calcoliamo i residui.

$$i\mathrm{Res}\left(\frac{8ie^{izt}}{(z-4i)(z^2+4)^2}, 4i\right) = i\left[\frac{8ie^{izt}}{(z^2+4)^2}\right]_{z=4i} = i\frac{8ie^{-4t}}{(-16+4)^2} = -\frac{8e^{-4t}}{144} = -\frac{e^{-4t}}{18},$$

$$i\mathrm{Res}\left(\frac{8ie^{izt}}{(z-4i)(z^2+4)^2}, 2i\right) = i\left[\frac{d}{dz}\frac{8ie^{izt}}{(z-4i)(z+2i)^2}\right]_{z=2i} =$$

$$-8\left[\frac{ite^{izt}}{(z-4i)(z+2i)^2} - \frac{e^{izt}}{(z-4i)^2(z+2i)^2} - 2\frac{e^{izt}}{(z-4i)(z+2i)^3}\right]_{z=2i} =$$

$$-8\left(\frac{ite^{-2t}}{(-2i)(4i)^2} - \frac{e^{-2t}}{(-2i)^2(4i)^2} - 2\frac{e^{-2t}}{(-2i)(4i)^3}\right) =$$

$$-\frac{te^{-2t}}{4} + \frac{e^{-2t}}{8} - \frac{e^{-2t}}{8} = -\frac{te^{-2t}}{4},$$

$$-i\mathrm{Res}\left(\frac{8ie^{izt}}{(z-4i)(z^2+4)^2}, -2i\right) = -i\left[\frac{d}{dz}\frac{8ie^{izt}}{(z-4i)(z-2i)^2}\right]_{z=-2i} =$$

$$8\left[\frac{ite^{izt}}{(z-4i)(z-2i)^2} - \frac{e^{izt}}{(z-4i)^2(z-2i)^2} - 2\frac{e^{izt}}{(z-4i)(z-2i)^3}\right]_{z=-2i} =$$

$$8\left(\frac{ite^{2t}}{(-6i)(-4i)^2} - \frac{e^{2t}}{(-6i)^2(-4i)^2} - 2\frac{e^{2t}}{(-6i)(-4i)^3}\right) =$$

$$\frac{te^{2t}}{12} - \frac{e^{2t}}{72} - \frac{e^{2t}}{24} = \frac{te^{2t}}{12} - \frac{e^{2t}}{18}.$$

Quindi

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{e^{-4t}}{18} - \frac{te^{-2t}}{4} & \text{se } t > 0, \\ \frac{te^{2t}}{12} - \frac{e^{2t}}{18} & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

$\square$

4. (Versione modificata del primo esercizio)
Si consideri la successione di funzioni (f_n), dove $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ è definita da

$$f_n(x) := \frac{nx}{1 + n^\alpha x^4}.$$

e dove $\alpha > 0$ è un parametro.

(a) Si trovino i valori di α per cui (f_n) converge in $L^1([0, +\infty[)$.
(b) Si trovino i valori di α per cui (f_n) converge in $L^2([0, +\infty[)$.
(c) (facoltativo) Si trovino i valori di α per cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0, +\infty[)$.

Svolgimento. Dato che $\alpha > 0$ si ha, per $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{1}{x^3} & \text{se } \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Da questo si deduce che, se esiste f in L^1/L^2 tale che $f_n \to f$ in L^1/L^2, deve essere, per quasi ogni x,

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nel caso } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{1}{x^3} & \text{nel caso } \alpha = 1, \\ 0 & \text{nel caso } \alpha > 1. \end{cases}$$

(perchè la convergenza puntuale individua il limite L^1/L^2). Dato che né la funzione $f(x) = 1/x^3$ né tantomeno $f(x) = +\infty$ sono in $L^1([0, +\infty[)/L^2([0, +\infty[)$ (a causa dell'andamento in zero), la successione non converge se $\alpha \le 1$. Inoltre se $\alpha > 1$ la successione, se converge, converge a zero.

Vediamo per quali $\alpha > 1$ la successione converge a zero in L^1. Si ha:

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{nx}{1 + n^\alpha x^4}\, dx = n^{1-\alpha/2} \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^4}\, dy$$

(abbiamo usato la sostituzione $y = n^{\alpha/4}x \Leftrightarrow x = n^{-\alpha/4}y \Rightarrow dx = n^{-\alpha/4}dy$). Dato che $n^{1-\alpha/2} \to 0$ se e solo se $\alpha > 2$, si ottiene che (f_n) converge in L^1 se e solo se $\alpha > 2$ (e il limite è zero).

Vediamo per quali $\alpha > 1$ la successione converge a zero in L^2. Si ha:

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_0^{+\infty} f_n(x)^2\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{n^2x^2}{(1 + n^\alpha x^4)^2}\, dx = n^{2-3\alpha/4} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^4}\, dy$$

(come prima $y = n^{\alpha/4}x \Leftrightarrow x = n^{-\alpha/4}y \Rightarrow dx = n^{-\alpha/4}dy$). Dato che $n^{2-3\alpha/4} \to 0$ quando $\alpha > 8/3$, (f_n) converge in L^1 se e solo se $\alpha > 8/3$ (e il limite è zero).

Per la convergenza della serie possiamo innanzitutto studiare la convergenza della serie delle norme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1} = C \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\alpha/2} < +\infty \Leftrightarrow (1 - \alpha/2) < -1 \Leftrightarrow \alpha > 4$$

(dove $C = \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^4}\, dy$). Per il criterio della convergenza assoluta si vede allora che per $\alpha > 4$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in L^1.

Facciamo vedere che tale condizione è anche necessaria; in effetti se la serie è convergente in L^1 a una somma $F(x)$ allora si può integrare per serie (dato che l'integrale è un operatore continuo su L^1) e si ha:

$$\int_0^{+\infty} F(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1}.$$

e quindi la serie delle norme deve essere convergente. In definitiva la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è convergente in L^1 se e solo se $\alpha > 4$. $\square$