Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 5 giugno 2007

PRIMA PARTE (per tutti)

1. Si dica se la serie di funzioni
$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^4+1}$$
converge puntualmente su $\mathbf{R}$. In caso affernativo si dica se la sua somma $f(x)$ definisce una funzione derivabile ed eventualmente quanto fa $f'(0)$.

Svilgimento. Indichiamo $f_n(x) := \dfrac{\cos(n^2 x)}{n^4+1}$: Allora
$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| \le \frac{1}{n^4}, \qquad f'_n(x) = -\frac{n^2\sin(n^2 x)}{1+n^4} \Rightarrow \sup_{x\in\mathbf{R}} |f'_n(x)| \le \frac{1}{n^2}.$$
Ne segue che sia la serie delle f_n che la serie delle f'_n convergono uniformemente su $\mathbf{R}$ e da questo si ricava che f è derivabile e $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ In particolare $f'(0) = 0$ (perch'e $f'_n(0) = 0$ per ogni n). □

2. Si consideri la serie definita da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$. Si dica se converge e in caso affermativo se ne trovi la somma.

Svolgimento. Usando ripetutamente la derivazione per serie si ottiene:
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad \Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{(1-z)^3} \qquad \Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$
Mettendo $z = \frac{1}{3}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{3}{2}.$$
□

3. Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(4x^2+1)^2}\,dx$

Svolgimento.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(4x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{16}\frac{z^2}{(z^2+1/4)^2}, \frac{i}{2}\right) = \frac{\pi i}{8}\left[\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+i/2)^2}\right]_{z=i/2} =$$
$$\frac{\pi i}{8}\left[\frac{2z(z+i/2)^2 - z^2 2(z+i/2))}{(z+i/2)^4}\right]_{z=i/2} = \frac{\pi i}{8}\frac{2(i/2)(i)^2 - 2(i/2)^2(i)}{i^4} =$$
$$\frac{\pi i}{8}(-i+(i/2)) = \frac{\pi i}{8}\frac{(-i)}{2} = \frac{\pi}{16}$$
□

4. Si trovi la soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + 2y' = te^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

Svolgimento. Se $b(t) := te^{-|t|}$ si ha

$$\hat{b}(\omega) = \frac{-4i\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

Per vederlo si applica la definizione di trasformata:

$$\hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} te^{t}e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} te^{-t}e^{-i\omega t}\,dt$$

e si calcola per parti gli integrali, oppure ci si ricorda che, posto $b_1(t) = e^{-|t|}$, si ha $\hat{b}_1(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2+1}$ da cui:

$$\hat{b}(\omega) = \mathcal{F}(tb_1(t))(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\hat{b}_1(\omega) = i\frac{2(-2\omega)}{(\omega^2+1)^2} = \frac{-4i\omega}{(\omega^2+1)^2}.$$

Allora trasformando secondo Fourier entambi i lati dell'equazione:

$$(-\omega^2 + 2i\omega)\hat{y}(\omega) = \frac{-4i\omega}{(\omega^2+1)^2} \Leftrightarrow (\omega - 2i)\hat{y}(\omega) = \frac{4i}{(\omega^2+1)^2} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{4i}{(\omega^2+1)^2(\omega-2i)}.$$

Tale $\hat{y}$ presenta i due poli $\pm i$ doppi e il polo semplice $2i$. Calcoliamo i residui:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{4ie^{it\omega}}{(\omega^2+1)^2(\omega-2i)}, i\right) = \left[\frac{d}{d\omega}\frac{4ie^{it\omega}}{(\omega+i)^2(\omega-2i)}\right]_{\omega=i} =$$
$$4i\left[\frac{ite^{it\omega}(\omega+i)^2(\omega-2i) - e^{it\omega}(2(\omega+i)(\omega-2i) + (\omega+i)^2)}{(\omega+i)^4(\omega-2i)^2}\right]_{\omega=i} =$$
$$4i\frac{ite^{-t}(2i)^2(-i) - e^{-t}(2(2i)(-i) + (2i)^2)}{(2i)^4(-i)^2} = 4i\frac{te^{-t}(-4) - e^{-t}(4-4)}{-16} = ite^{-t}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{4ie^{it\omega}}{(\omega^2+1)^2(\omega-2i)}, -i\right) = \left[\frac{d}{d\omega}\frac{4ie^{it\omega}}{(\omega-i)^2(\omega-2i)}\right]_{\omega=-i} =$$
$$4i\left[\frac{ite^{it\omega}(\omega-i)^2(\omega-2i) - e^{it\omega}(2(\omega-i)(\omega-2i) + (\omega-i)^2)}{(\omega-i)^4(\omega-2i)^2}\right]_{\omega=-i} =$$
$$4i\frac{ite^{t}(-2i)^2(-3i) - e^{t}(2(-2i)(-3i) + (-2i)^2)}{(-2i)^4(-3i)^2} = 4i\frac{te^{t}(-12) - e^{t}(-12-4)}{16(-9)} = i\frac{te^t}{3} - i\frac{4e^t}{9}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{4ie^{it\omega}}{(\omega^2+1)^2(\omega-2i)}, 2i\right) = \left[\frac{4ie^{it\omega}}{(\omega^2+1)^2}\right]_{\omega=2i} = \frac{4ie^{-2t}}{(-4+1)^2} = i\frac{4e^{-2t}}{9}$$

Ne segue

$$y(t) = \begin{cases} i\mathrm{Res}\left(\frac{4ie^{it\omega}}{(\omega^2+1)^2(\omega-2i)}, i\right) + i\mathrm{Res}\left(\frac{4ie^{it\omega}}{(\omega^2+1)^2(\omega-2i)}, 2i\right) = -te^{-t} - \dfrac{4e^{-2t}}{9} & \text{se } t \geq 0 \\ -i\mathrm{Res}\left(\frac{4ie^{it\omega}}{(\omega^2+1)^2(\omega-2i)}, -i\right) = \dfrac{te^t}{3} - \dfrac{4e^t}{9} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

□

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

1. Si trovino le soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Svolgimento. Applicando Fourier

$$(-\omega^2 + 4i\omega + 5)\hat{y}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 4i\omega + 5}$$

Il polinomio $-\omega^2 + 4\omega i + 5$ ha le due radici in $2i \pm 1$, che sono quindi poli semplici per $\hat{y}$, entrambi con parte immaginaria positiva. Dunque se $t < 0$ $y(t) = 0$ mentre se $t > 0$

$$y(t) = i\text{Res}\left(\frac{e^{it\omega}}{-\omega^2 + 4i\omega + 5}, 2i - 1\right) + i\text{Res}\left(\frac{e^{it\omega}}{-\omega^2 + 4i\omega + 5}, 2i + 1\right) =$$
$$i\left(\left[\frac{e^{it\omega}}{-2\omega + 4i}\right]_{\omega=2i-1} + \left[\frac{e^{it\omega}}{-2\omega + 4i}\right]_{\omega=2i+1}\right) = i\left(\frac{e^{(-2-i)t}}{2} + \frac{e^{(-2+i)t}}{-2}\right) =$$
$$e^{-2t}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) = e^{-2t}\sin(t)$$

Quindi

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t}\sin(t) & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} = H(t)e^{-2t}\sin(t)$$

□

2. Si trovino le soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = H(t)\cos(3t) \\ y(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Applicando la trasformata di Laplace si ottiene

$$(z^2 + 4z + 5)\breve{y}(z) = \frac{z}{z^2 + 9} \Leftrightarrow \breve{y}(z) = \frac{z}{(z^2 + 4z + 5)(z^2 + 9)}$$

La funzione da antitraformare ha quattro poli semplici $\pm 3i$ e $-2 \pm i$. Si ha

$$\text{Res}\left(\frac{ze^{tz}}{(z^2 + 4z + 5)(z^2 + 9)}, 3i\right) = \left[\frac{ze^{tz}}{(2z + 4)(z^2 + 9) + (z^2 + 4z + 5)2z}\right]_{z=3i} =$$
$$\frac{(3i)e^{3it}}{0 + (-9 + 12i + 5)2(3i)} = \frac{e^{3it}}{(-4 + 12i)2} = \frac{1}{8}\frac{e^{3it}}{(-1 + 3i)} = \frac{1}{80}(-1 - 3i)e^{3it}$$

$$\text{Res}\left(\frac{ze^{tz}}{(z^2 + 4z + 5)(z^2 + 9)}, -2 + i\right) = \left[\frac{ze^{tz}}{(2z + 4)(z^2 + 9) + (z^2 + 4z + 5)2z}\right]_{z=-2+i} =$$
$$\frac{(-2 + i)e^{(-2+i)t}}{(-4 + 2i + 4)(4 - 4i - 1 + 9) + 0} = \frac{(-2 + i)e^{(-2+i)t}}{(2i)(12 - 4i)} = \frac{1}{8}\frac{(-2 + i)e^{(-2+i)t}}{(1 + 3i)} =$$
$$\frac{1}{80}(-2 + i)(1 - 3i)e^{(-2+i)t} = \frac{1}{80}(-2 + 3 + i + 6i)e^{(-2+i)t} = \frac{1}{80}(i + 7i)e^{(-2+i)t}$$

Dato che i residui nei poli coniugati sono i coniugati dei residui (perchè la funzione è reale), allora, per $t > 0$

$$y(t) = \sum_{w=\pm 3i/-2\pm i} \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{tz}}{(z^2+4z+5)(z^2+9)}, w\right) =$$
$$2\Re e\left(\frac{1}{80}(-1-3i)e^{3it}\right) + 2\Re e\left(\frac{1}{80}(1+7i)e^{(-2+i)t}\right) =$$
$$\frac{-\cos(3t) + 3\sin(3t) + e^{-2t}(\cos(t) - 7\sin(t))}{40}$$

mentre naturalmente $y(t) = 0$ se $t < 0$. $\square$

3. Si trovi la soluzione del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$$

Svolgimento. Supponiamo che y sia soluzione e poniamo $v(t) := H(t)y(t)$. Allora $v' = \delta y(0) + Hy' = \delta + Hy'$ e $v'' = \delta' + \delta y'(0) + Hy'' = \delta' - \delta + Hy''$ di modo che v risolve

$$\begin{cases} v'' + 4v' + 5v = \delta' - \delta + 4\delta = \delta' + 3\delta \\ v(t) = 0 \text{ per } t < 0 \end{cases}$$

Usando Laplace

$$\breve{v} = \frac{z+3}{z^2+4z+5}$$

da cui, per $t > 0$

$$v(t) = \operatorname{Res}\left(\frac{(z+3)e^{tz}}{(z^2+4z+5)}, -2+i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{(z+3)e^{tz}}{(z^2+4z+5)}, -2-i\right) =$$
$$2\Re e \operatorname{Res}\left(\frac{(z+3)e^{tz}}{(z^2+4z+5)}, -2+i\right) = 2\Re e\left(\left[\frac{(z+3)e^{tz}}{(2z+4)}\right]_{z=-2+i}\right) =$$
$$2\Re e\left(\frac{(1+i)e^{(-2+i)t}}{(2i)}\right) = e^{-2t}\Re e((1-i)e^{it}) = e^{-2t}(\cos(t) + \sin(t));$$

Quindi $v(t) = H(t)e^{-2t}(\cos(t) + \sin(t))$. Per semplici motivi ne segue $y(t) = e^{-2t}(\cos(t) + \sin(t))$. $\square$