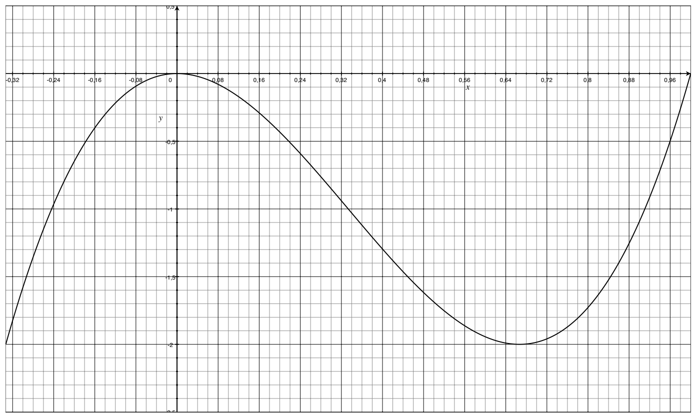
Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 11 febbraio 2008

1. Se $f : [-1/3, 1] \to \mathbf{R}$ è definita da $f(x) := \frac{27}{2}(x^3 - x^2)$, allora (PUNTI: 1/-1/0 a risposta)

f ha un unico massimo relativo	$\boxed{\text{si}}$	f ha un unico minimo relativo	$\boxed{\text{si}}$
f ha un unico punto di massimo	$\boxed{\text{no}}$	f ha un unico punto di minimo	$\boxed{\text{no}}$
1 è stazionario per f	$\boxed{\text{no}}$	-2 è minimo per f	$\boxed{\text{si}}$

Spiegazione. Vedere il grafico di f (che si ricava con un semplice studio di funzione).



$\square$

2. Si trovi il valore dei seguenti limiti (si usi "N.E." per indicare che il limite non esiste)(PUNTI: 2/-0/0 ciascuno)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{n^6 + 12n^5 + 1} - n =$	2	$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3^n + 1)}{n + 1} =$	$\ln(3)$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9^n + 1}}{4^n + n} =$	0	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! - 6^n} =$	$+\infty$

Spiegazione.

-
$$\sqrt[6]{n^6 + 12n^5 + 1} - n = n\left(\left(1 + \frac{12}{n} + \frac{1}{n^6}\right)^{\frac{1}{6}} - 1\right) = n\left(1 + \frac{1}{6}\frac{12}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \to 2;$$

-
$$\frac{\ln(3^n + 1)}{n + 1} = \frac{\ln(3^n) + \ln(1 + 3^{-n})}{n + 1} = \frac{n\ln(3) + \ln(1 + 3^{-n})}{n} \to \ln(3);$$

-
$$\frac{\sqrt{9^n + 1}}{4^n + n} = \frac{3^n\sqrt{1 + 9^{-n}}}{4^n + n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\sqrt{1 + 9^{-n}}}{1 + n4^{-n}} \to 0;$$

- dato che $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ e che $\frac{6^n}{n!} \to 0$, come si è visto a lezione (usando Cesaro) si ha:
$$\sqrt[n]{n! - 6^n} = \sqrt[n]{n!}\sqrt[n]{1 - \frac{6^n}{n!}} \to +\infty.$$

$\square$

3. Si calcoli il limite seguente - questo esercizio va svolto e vale 6 punti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(3+\sqrt{1+8x^2})-\ln(4)-x^2}{2-2\cos(x)-x^2}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+8x^2} =& 1+\frac{8x^2}{2}-\frac{(8x^2)^2}{8}+o(x^4)=1+4x^2-8x^4+o(x^4);\\
\ln(3+\sqrt{1+8x^2}) =& \ln\left(3+1+4x^2-8x^4+o(x^4)\right)=\ln\left(4\left(1+x^2-2x^4+o(x^4)\right)\right)=\\
& \ln(4)+\left(x^2-2x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(x^2+o(x^2)\right)^2+o\left(O(x^2)^2\right)=\\
& \ln(4)+x^2-2x^4-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=\ln(4)+x^2-\frac{5x^4}{2}+o(x^4);\\
2-2\cos(x)-x^2 =& -\frac{x^4}{12}+o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi considerando l'espressione da mandare al limite:

$$\frac{\ln(3+\sqrt{1+8x^2})-\ln(4)-x^2}{2-2\cos(x)-x^2}=\frac{\ln(4)+x^2-\frac{5x^4}{2}+o(x^4)-\ln(4)-x^2}{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}=\frac{-\frac{5x^4}{2}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}\to\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{12}}=\boxed{30.}$$

□

4. Si trovi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$) converge assolutamente/ $\boxed{\text{C}}$ converge ma non assolutamente/ $\boxed{\text{NC}}$ non converge) (PUNTI: 2/-1/0 per ciascuna).

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \boxed{\text{C}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-1\right) \quad \boxed{\text{AC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+1}{4^n-n} \quad \boxed{\text{AC}}$$

Spiegazione.

- Dato che $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\to 1\neq 0$ la serie non può convergere;
- dato che $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\approx\frac{\pi}{n}$ e che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, la serie dei valori assoluti diverge, cioè la serie non è assolutamente convergente; viceversa essa è convergente in quanto è a segni alterni e $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ è decrescente in n;
- dato che $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-1\right)\approx-\frac{2\pi^2}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, allora la serie è assolutamente convergente;
- posto $a_n:=(-1)^n\frac{3^n+1}{4^n-n}$ si vede che $\sqrt[n]{|a_n|}\to\frac{3}{4}<1$ per cui la serie è assolutamente convergente, per il criterio della radice.

□

5. Siano $f(x,y):=2e^{x^2-1}-e^{2y^2}$ e $A:=\{(x,y)\mid x^2-y^2\leq 1\}$. Allora (PUNTI: 3/-1/0 per quesito).

$$\max_A f=\boxed{1},\quad \min_A f\ \boxed{\text{non esiste}}$$

Spiegazione. È evidente che la retta con $x=0$ è contenuta in A e che

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y)=\lim_{y\to\pm\infty} 2e^{-1}-e^{y^2}=-\infty$$

per cui il minimo di f su A NON ESISTE. Vediamo se c'è e quanto fa il massimo. È facile verificare che $\nabla f(x,y) = \binom{24xe^{x^2-1}}{-4ye^{y^2}}$ e quindi l'unico punto stazionario è $\binom{0}{0}$, in cui f fa $2e^{-1}-1<1$. Studiamo f sulla frontiera di A, cioè nei punti in cui $x^2 = 1+y^2$. In tali punti f fa $2e^{y^2} - e^{2y^2} = 2t - t^2$ dove $t = e^{y^2}$ Facendo variare $\binom{x}{y}$ tra i punti della frontiera di A il parametro t varia su $[1,+\infty[$. Dato che $2t-t^2$ ̀decrescente per $t \geq 1$ essa ha massimo in $t=1$ e questo massimo fa 1. Ciò significa che la restrizione di f sulla froniera di A HA MASSIMO 1 (assunto nel punto in cui $1 = t = e^{y^2}$, cioè in $x = \pm 1$, $y = 0$). Dato che $1 > f(0,0) = 2e^{-1}-1$ tale massimo deve essere il massimo su A. □

6. Si calcoli il seguente integrale (PUNTI: 4/-0/0) Si calcoli il seguente integrale (PUNTI: 5/-0/0)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+x)(1+x)}\,dx = \frac{\pi}{6}.$$

Spiegazione. Se operiamo la sostituzione $y = \sqrt{x}$ troviamo $x = y^2$ e $dx = 2ydy$ e quindi l'integrale diventa:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2y}{y(4+y^2)(1+y^2)}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+4}\right)dy = \frac{2}{3}\left[\arctan(y) - \frac{1}{2}\arctan(y/2)\right]_{y=0}^{y\to+\infty} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

□

7. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2+1} \qquad x > 0.$$

Si studino le soluzioni trovando in particolare (8 punti in tutto - da svolgere):

- l'espressione delle soluzione con condizione iniziale $y(1) = y_0$, dato y_0 in $\mathbf{R}$;
- i limiti a 0^+ e a $+\infty$ della soluzione (al variare di y_0);
- i grafici (per $x \geq 0$) relativi alle soluzioni *più significative*;
- per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha una soluzione $x > 0$.

Svolgimento. Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(y_0 + \int_1^x \frac{t^2}{t^2+1}\,dt\right) = \frac{1}{x^2}\left(y_0 + \int_1^x\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) =$$
$$\frac{1}{x^2}\left(y_0 + [t - \arctan(t)]_1^x\right) = \frac{1}{x^2}\left(C + x - \arctan(x)\right)$$

dove $C = y_0 - 1 + \frac{\pi}{4}$. Dalle formule scritte sopra si ricava facilmente che:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{C}{x} + 1 - \frac{\arctan(x)}{x}\right) = 0^+$$

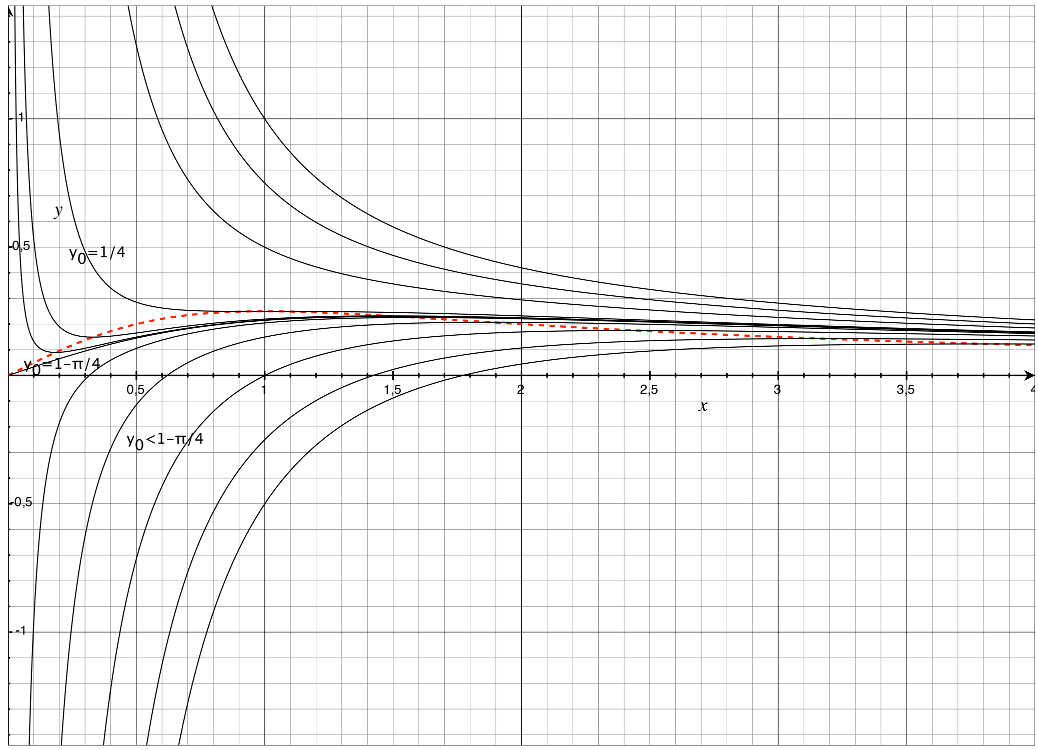
(qualunque sia C, cioé qualunque sia y_0) mentre

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } C > 0 \Leftrightarrow y_0 > 1 - \frac{\pi}{4} \\ 0^+ & \text{se } C = 0 \Leftrightarrow y_0 = 1 - \frac{\pi}{4} \\ -\infty & \text{se } C < 0 \Leftrightarrow y_0 < 1 - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

nel caso di mezzo il limite segue mediante Hospital:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x - \arctan(x)}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{2(1+x^2)} = 0^+.$$

Per tracciare i grafici delle soluzioni conviene introdurre la curva g di equazione $g(x) = \frac{x}{2(x^2+1)}$; per la forma dell'equazione é chiaro che $y'(x) > 0$ se e solo se $y(x) < g(x)$, $y'(x) < 0$ se e solo se $y(x) > g(x)$ e $y'(x) = 0$ se e solo se $y(x) = g(x)$. Se tracciamo il grafico di g (vedi curva rossa tratteggiata nella figura) e teniamo conto dei limiti a 0^+ e all'infinito, troviamo i grafici delle soluzioni come rappresentati nella figura.



Dai grafici risulta chiaro che le soluzioni intersecano l'asse x in un punto positivo se e solo se tendono a meno infinito in zero, cioé se $y_0 < \frac{3}{2}$. $\square$