

Percorso di Eccellenza - Esempio di prova d'esame

1. Si consideri la serie di potenze definita da  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{n!}$ . Si trovi il raggio di convergenza  $R$  della serie e si trovi l'espressione di  $f$  all'interno del disco di convergenza.
2. Si calcoli la serie di Fourier della seguente funzione periodica di periodo  $2\pi$

$$f(t) = \pi - |x| \quad \text{se } 0 \leq 2\pi$$

(ed estesa per periodicità a tutto  $\mathbf{R}$ ). Si consiglia di farsi un grafico della  $f$ . Si dica se la serie di Fourier converge uniformemente a  $f$ .

3. Usando i metodi visti a lezione si studi l'equazione delle corde vibranti con termine noto  $g$ , dove  $g$  è una costante (per esempio la forza di gravità).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + g & \text{per ogni } (t, x) \text{ con } 0 \leq x \leq L, t \in \mathbf{R} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & \text{per ogni } t \in \mathbf{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in [0, L] \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = v_0(x) & \text{per ogni } x \in [0, L] \end{cases} \quad (1)$$

Si scriva per esempio la soluzione in termini di una serie di Fourier rispetto alla variabile spaziale.

Si trovi anche, se c'è, l'espressione della posizione iniziale  $u_0$  tale che la relativa soluzione, abbinata alla condizione  $v_0 = 0$ , rimane costante nel tempo (posizione a riposo della corda). Suggerimento: Che equazione risolve  $u_0$ ?