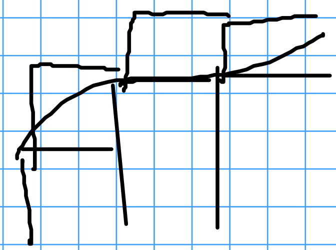
18/3/09

# Criterio di integrabilità:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, limitata. $f$ integrabile $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} S_n - s_n = 0$$



Dim. $\Leftarrow$

(I) dimostro che $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$, $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = s$ e $S = s$

considero $\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$, $\mu = \inf_{m \in \mathbb{N}} S_m$

Dal fatto che $s_n \leq S_m$ $\forall n, m$ si ricava:

$$\lambda = \sup_n s_n \leq S_m \quad \forall m \quad \text{e poi}$$

$$\lambda \leq \inf_m S_m = \mu \Rightarrow \boxed{\lambda \leq \mu}$$

$$s_n \leq \lambda \leq \mu \leq S_m \quad \forall n, m$$

DATO CHE $S_n - s_n \to 0$

si deduce che

$$\lambda = \mu = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Infatti dato $\varepsilon > 0$ trovo $\bar{n}$ tale che $S_n - s_n < \varepsilon \ \forall n \geq \bar{n}$

$$\Rightarrow \quad \lambda \leq S_n \leq s_n + \varepsilon \leq \lambda + \varepsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

$\boxed{S_n \to \lambda}$ (e per gli altri si fa nello stesso modo)

QUINDI $S_n \to \lambda = \mu \leftarrow s_n$ per $n \to +\infty$

NOTA CHE $\lambda, \mu$ sono finiti perché $s_0 \leq \lambda \leq \mu \leq S_0$

Dato poi che ogni somma di C.R. è compresa tra $s_n$ e $S_n$

si ricava che ogni somma di C.R. $\longrightarrow \lambda (= \mu)$

<u>VICEVERSA</u> $\Rightarrow$ se esiste l'integrale di $f$ allora

$$s_n \to \int_a^b f \qquad e \qquad S_n \to \int_a^b f$$

se $f$ è continua allora, dato $n$, $i = 0 \ldots n-1$ si trovano

$\xi_i'$ e $\xi_i''$ in $[x_i, x_{i+1}]$ tali che:

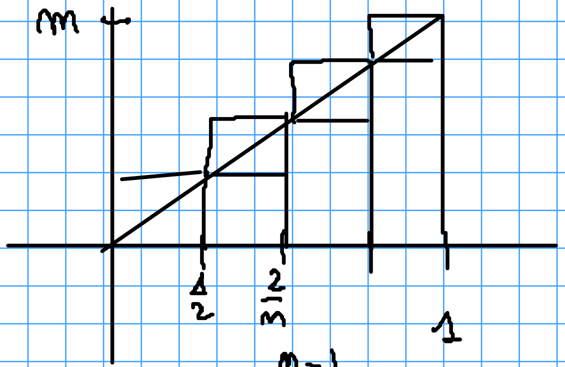
$$\min_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(\xi_i') \quad , \quad \max_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(\xi_i'')$$

$\Rightarrow$ $s_n$ e $S_n$ sono delle particolari somme di C.R.

$$\Rightarrow s_n \longrightarrow \int_a^b f \qquad S_n \longrightarrow \int_a^b f$$

(Se non è continua, la dimostrazione si aggiusta . . . .)

Esempio $\quad f(x) = m x \quad$ su $[0,1]$




Dato $n$ considero:

$$x_i := \frac{i}{n} \qquad (x_0 = 0 \,, \; x_n = 1)$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{m}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i \;; \quad S_n = \sum_{i=0}^{n-1} m \frac{i+1}{n} \frac{1}{n} = \frac{m}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\frac{m}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} \longrightarrow \frac{m}{2} \qquad\qquad \frac{m}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow \frac{m}{2}$$

( $\frac{\text{base} \times \text{altezza}}{2}$ ; qui la base è 1, l'altezza è $m$ )

(plurirettangolo ?)

Esempio più generale : $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ (usando la definizione)

$\alpha > 0$

Mi servirà una valutazione di $\sum_{i=0}^{n} i^\alpha$

Per gli $\alpha$ interi è possibile trovare esattamente quanto fa

Però a noi basta

$$(*) \qquad \boxed{\sum_{i=0}^{n} i^\alpha = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + o\left(n^{\alpha+1}\right)}$$

Dimostrazione $(*)$

chiamo $a_i = i^\alpha \qquad b_i = \underbrace{(i+1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1}}$

$$\longrightarrow \sum_{i=0}^{n} b_i = (n+1)^{\alpha+1} \quad \text{(serie telescopica)}$$

$$\longrightarrow \frac{b_i}{a_i} = \frac{(i+1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1}}{i^\alpha} = \frac{i^{\alpha+1}\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)^{\alpha+1} - 1\right]}{i^\alpha} = i\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)^{\alpha+1} - 1\right] =$$

$$\text{(Taylor)} = i\left[\frac{1}{i}(\alpha+1) + o\left(\frac{1}{i}\right)\right] = (\alpha+1) + o(1) \longrightarrow (\alpha+1)$$

Cioè $\boxed{\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = \frac{1}{\alpha+1}}$ (*) Fisso $\varepsilon>0$. Dato che

$$\frac{1-\varepsilon}{\alpha+1} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1+\varepsilon}{\alpha+1}$$

DEFINITIVAMENTE

$$\frac{1}{\alpha+1}(1-\varepsilon) \le \frac{a_i}{b_i} \le \frac{1}{\alpha+1}(1+\varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$\exists\, \bar i \quad \forall\, i \geq \bar i \quad \frac{b_i}{1+\alpha}(1-\varepsilon) \le a_i \le b_i\frac{(1+\varepsilon)}{\alpha+1}$ || Passo alle somme:

$$\sum_{i=0}^{\bar i-1} a_i + \sum_{i=\bar i}^{n} b_i\frac{(1-\varepsilon)}{\alpha+1} \le \sum_{i=0}^{m} a_i = \sum_{i=0}^{\bar i-1} a_i + \sum_{i=\bar i}^{m} a_i \le \sum_{i=0}^{\bar i-1} a_i + \frac{(1+\varepsilon)}{\alpha+1}\sum_{i=\bar i}^{m} b_i$$

$$\sum_{i=0}^{\bar i-1} a_i - b_i + \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{(1-\varepsilon)}{1+\alpha} \le \sum_{i=0}^{m} a_i \le \sum_{i=0}^{\bar i-1}(a_i-b_i) + \underbrace{\sum_{i=0}^{\bar i-1} b_i \frac{(1+\varepsilon)}{1+\alpha}}_{=(m+1)^{\alpha+1}}$$

per ogni $m \geq \bar i$

DIVIDO PER $m^{\alpha+1}$

$$\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\alpha)}\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}+\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{i=0}^{\bar{n}-1} a_i - b_i \leq \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{i=10}^{n} i^{\alpha} \leq \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{i=0}^{\bar{i}-1} a_i - b_i}_{\to 0} + \frac{(1+\varepsilon)}{1+\alpha}\underbrace{\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}}_{\to 1}$$

Al limite per $n \to \infty$

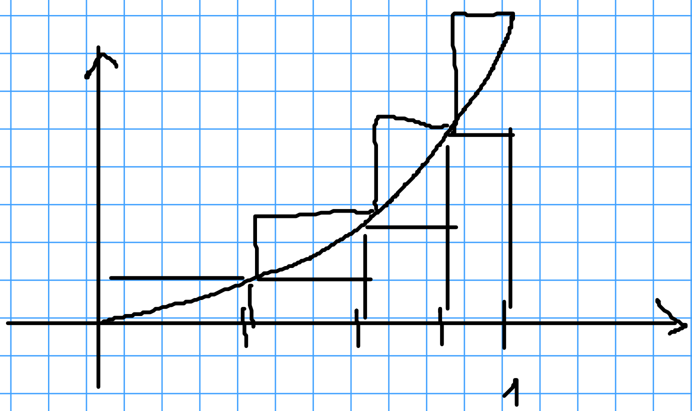
$$\frac{1-\varepsilon}{\alpha+1} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{i=0}^{n} i^{\alpha} \leq \frac{1+\varepsilon}{\alpha+1}$$

Dato che $\varepsilon$ è arbitrario trovo

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{i=0}^{n} i^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^{\alpha} \overset{(!!)}{=} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + o\left(n^{\alpha+1}\right) \qquad (\alpha > -1 \;!!)$$

Torniamo al calcolo di $\int_0^1 x^{\alpha}\,dx$ $\quad(\alpha > 0)$




DIVIDO $[0,1]$ in $n$ sottointervalli

$$\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \qquad i = 0 \ldots n-1$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{i=0}^{n-1} i^\alpha \; ; \; S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{i+1}{n}\right)^\alpha = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{i=1}^{n} i^\alpha$$

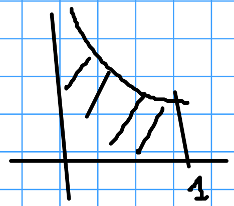
$S_n \to \frac{1}{\alpha+1}$ per la formula di prima, invece:

$$S_n = \underbrace{\frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}}_{\downarrow \, 1} \underbrace{\frac{1}{(n-1)^\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} i^\alpha}_{\downarrow \, 1/\alpha+1} \longrightarrow \frac{1}{\alpha+1}$$

DUNQUE $x^\alpha$ è INTEGRABILE E $\int_0^1 x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}$ $(\alpha > 0)$

<u>OSS.</u> La formula suggerisce che si possa prendere $\alpha > -1$ (?)

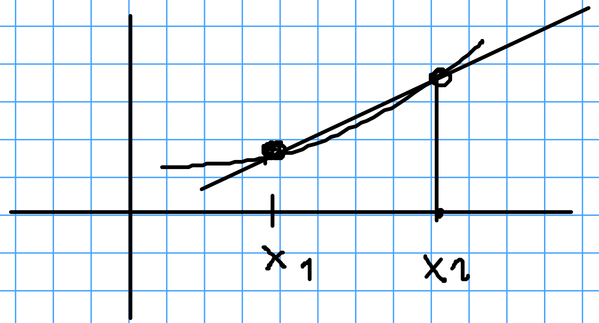
Ma in questo caso $(-1 < \alpha < 0)$
$f$ non è limitata. Non posso usare la def. di integrale di Riemann




$\alpha < 0$
(sembra finita!)

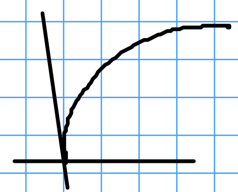
G Lipschitziana vuol dire che $\exists$ $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$|G(x_1) - G(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$




L blocca l'inclinazione tra $x_1$ e $x_2$

- $\sqrt{x}$ NON È LIPSCHITZIANA (VICINO A ZERO)

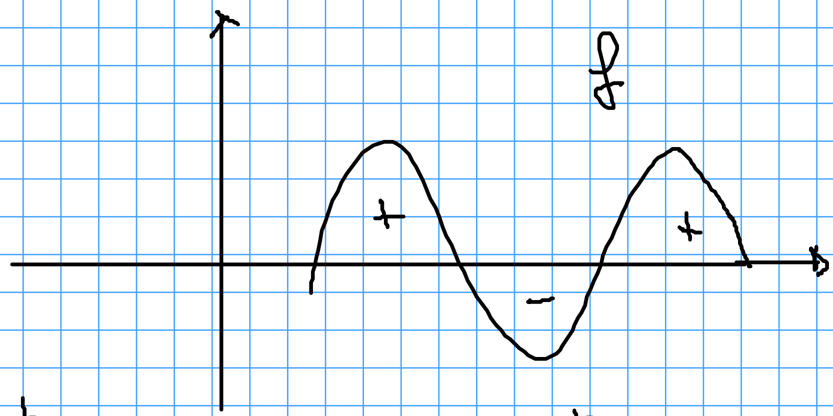


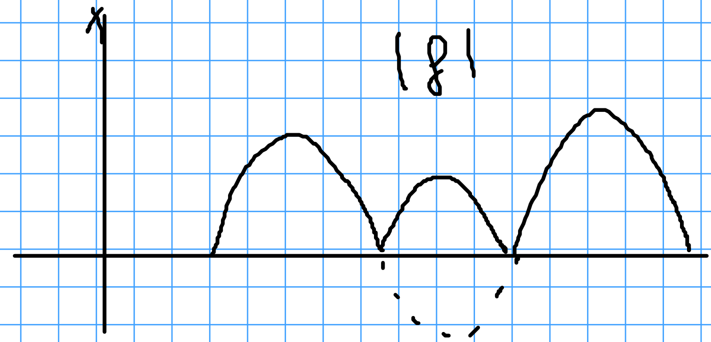
- Se G HA DERIVATA CONTINUA SU $[a\ b]$ $\Rightarrow$

G è Lipschitziana su $[a\ b]$, perché (per Lagrange) $\exists\ t$ :

$$\left|\frac{G(x_1) - G(x_2)}{x_1 - x_2}\right| = |G'(t)| \leq \max_{[a,b]} G' \quad (=: L)$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$




$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$