$$a y'' + b y' + c y = 0 \qquad (Eq.-II-0)$$

$a, b, c \in \mathbb{C}$ cerco $y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Ricordiamo che, se $z = a + ib$, $e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$

CERCO SOL. Dell' eq. della forma $\boxed{y(x) = e^{z_0 x}}$

con $z_0 \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow$

$$y'(x) = z_0 e^{z_0 x} \quad ; \quad y''(x) = z_0^2 e^{z_0 x}$$

Allora $a y'' + b y' + c y = a z_0^2 e^{z_0 x} + b z_0 e^{z_0 x} + c e^{z_0 x} =$

$$(a z_0^2 + b z_0 + c)\, e^{z_0 x} = P(z_0)\, e^{z_0 x} = (*)$$

Se $(*)$ deve essere zero $\Leftrightarrow$ $P(z_0) = 0$, z_0 radice di P.

QUINDI $P(z_0) = 0 \Rightarrow e^{z_0 x}$ risolve $(EQ-II-0)$

<u>SE</u> P ha DUE radici distinte z_1 e z_2, le due

funzioni $y_1(x) = e^{z_1 x}$ e $y_2(x) = e^{z_2 x}$ sono indipendenti

Infatti se $\lambda_1 e^{z_1 x} + \lambda_2 e^{z_2 x} = 0 \iff$ (Moltiplico per $e^{-z_2 x}$)

$$\lambda_1 e^{(z_1 - z_2)x} + \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow$ NON PUÒ ESSERE COSTANTE $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \Rightarrow \lambda_2 = 0$

Dato che lo spazio delle sol. ha dimensione 2, esso è

$$S = \{ c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \}$$

TORNIAMO AI REALI : $a, b, c \in \mathbb{R}$

① CASO le radici di P sono due, e sono reali $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Per i discorsi sopra le sol. reali sono

$$y(x) = c_1 e^{x_1 x} + c_2 e^{x_2 x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

② CASO le radici di P sono complesse (non reali)

Dato che P è a coeff. reali, se z è radice anche $\bar{z}$ è radice.

Dunque P ha due radici coniugate $a+ib$, $a-ib$

$\Rightarrow$ le soluzioni complesse sono

$$\underline{c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ibx)}} = e^{ax}\left(c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}\right) =$$

$$e^{ax}\left(c_1\left(\cos(bx) + i\sin(bx)\right) + c_2\left(\cos(bx) - i\sin(bx)\right)\right) =$$

$$e^{ax}\left[\underbrace{(c_1+c_2)}_{d_1}\cos(bx) + \underbrace{i(c_1-c_2)}_{d_2}\sin(bx)\right] =$$

$$e^{ax}\left(d_1\cos(bx) + d_2\sin(bx)\right) \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} d_1 &= c_1+c_2 \\ d_2 &= i(c_1-c_2) \end{aligned}$$

dato che $(c_1, c_2) \leftrightarrow (d_1, d_2)$ (corrispondenza biunivoca)

le soluzioni complesse si possono scrivere

$$(*) \quad y(x) = e^{ax}\left(d_1\cos(bx) + d_2\sin(bx)\right) \quad d_1, d_2 \in \mathbb{C}$$

GIR

Nell'ultima formula, x, d_1, d_2 variano in $\mathbb{R}$, $y(x) \in \mathbb{R}$

Dato che $e^{ax}\cos(bx)$ e $e^{ax}\sin(bx)$ sono indipendenti (per esercizio) $\Rightarrow$ la formula $(*)$ descrive TUTTE le soluzioni reali.

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Il pol. car. è

$$P(z) = z^2 + 4$$

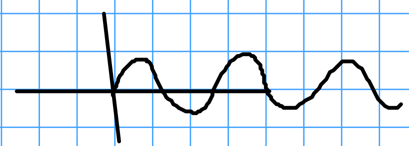
le radici sono $\pm 2i$

(le sol. complesse sono $c_1 e^{2ix} + c_2 e^{-2ix}$;) quelle reali sono $y(x) = d_1 \cos(2x) + d_2 \sin(2x)$

IMPONGO LE COND. INIZIALI.

$y(0) = d_1 = 0$ $\qquad y'(x) = d_2 \cos(2x) \cdot 2 \Rightarrow 2d_2 = 1$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ $\left(y'' = -4y \right.$



$$a y'' + b y' + c\,y$$

$$P(z) = a z^2 + b z + c$$

CASO DI UNA SOLA RADICE (DOPPIA) $\quad z_0 = \dfrac{-b}{2a}$

$$P(z) = a z^2 + b z + c \qquad \underline{b^2 = 4ac}$$

CONOSCO UNA SOL. $\quad y_1(x) = e^{z_0 x}$

ME NE SERVE UN'ALTRA INDIPENDENTE DA QUESTA

Proviamo $\quad y_2(x) = x\, e^{z_0 x}$; facciamo dei calcoli ...

$$y_2'(x) = e^{z_0 x} + x z_0 e^{z_0 x}$$

$$y_2''(x) = z_0 e^{z_0 x} + z_0 e^{z_0 x} + x z_0^2 e^{z_0 x} = 2 z_0 e^{z_0 x} + x z_0^2 e^{z_0 x}$$

$$a y_2'' + b y_2' + c y_2 = \left[a\left(2 z_0 + x z_0^2\right) + b\left(1 + x z_0\right) + c x \right] e^{z_0 x} =$$

$$= \left[\left(2 a z_0 + b\right) + x\left(a z_0^2 + b z_0 + c\right) \right] e^{z_0 x} = \left[\underset{=0}{P'(z_0)} + x \underset{=0}{P(z_0)} \right] e^{z_0 x}$$

$P(z_0)=0$ perché z_0 è radice

$P'(z_0)=0$ " " " " doppia $(\Delta=0)$

$$\left(\begin{array}{l} P(z)= a(z-z_0)^2 \\ P'(z) = 2a(z-z_0) \end{array}\right)$$

Quindi anche y_2 è soluzione ; y_1 e y_2 sono indip.

Se $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \iff$

$(\lambda_1 + \lambda_2 x) e^{z_0 x} = 0 \iff$

$\lambda_1 + \lambda_2 x = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

DUNQUE LE SOL. SONO

$$S = \left\{ (c_1 + c_2 x) e^{z_0 x} , c_1, c_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R} \right\}$$

c_1, c_2 variano in $\mathbb{C}$ se scelgo le sol complesse

$c_1 \, c_2$ variano in $\mathbb{R}$ se scelgo le sol reali

Per esempio

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad P(z) = z^2 + 2z + 1 \Rightarrow$$

$$(z+1)^2$$

-1 radice doppia

$\Rightarrow$ le soluzioni sono date da $y(x) = (c_1 + x c_2)\, e^{-x}$

QUESTO CONCLUDE LO STUDIO DELL'OMOGENEA

EQUAZIONE NON OMOGENEA

$$a y'' + b y' + c y = f(x) \qquad (EQ - II - NO)$$

ESISTE UN PROCEDIMENTO GENERALE (VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE)

NOI PERÒ CONSIDERIAMO SOLO DEI CASI PARTICOLARI.

① $f(x) = \boxed{e^{wx}}$ $\qquad \underline{w \in \mathbb{C}}$ $\qquad$ (TORNIAMO AL CASO COMPLESSO $a, b, c \in \mathbb{C}$)

CERCHIAMO UNA SOL. PARTICOLARE "DELLA STESSA FORMA"

$$\bar{y}(x) = \gamma e^{wx} \qquad \text{con } \gamma \in \mathbb{C} \text{ (da trovare)}$$

Facendo i conti

$\bar{y}'(x) = \gamma w e^{wx}$ $\qquad$ $\bar{y}''(x) = \gamma w^2 e^{wx}$. Metto $\bar{y}$ nell'equaz.

$$a \gamma w^2 e^{wx} + b \gamma w e^{wx} + c \gamma e^{wx} = \underbrace{\gamma P(w) e^{wx} = e^{wx}}_{\text{CONDIZIONE}}$$

MI VIENE $\gamma P(w) = 1$ $\quad \gamma = \dfrac{1}{P(w)}$

a patto che $P(w) \neq 0$ (w non deve essere radice di P)

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(x) = \frac{1}{P(w)} e^{wx}$$

ESEMPIO

(*) $y'' + 4y = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ se faccio i calcoli di prima

$\bar{y}(x) = \gamma e^{ix}$; $\bar{y}'(x) = \gamma i e^{ix}$, $\bar{y}''(x) = \gamma (i)^2 e^{ix} = -\gamma e^{ix}$

$\bar{y}'' + 4\bar{y} = -\gamma e^{ix} + 4\gamma e^{ix} = 3\gamma e^{ix}$ deve fare e^{ix}

$\Rightarrow \quad 3\gamma = 1 \quad \gamma = \dfrac{1}{3}$. Dunque $\bar{y}(x) = \dfrac{1}{3} e^{ix}$

se faccio parte reale / parte immaginaria di *, trovo

$(\mathrm{Re}\,\bar{y})'' + 4(\mathrm{Re}\,\bar{y}) = \cos(x)$ / $(\mathrm{Im}\,\bar{y})'' + 4(\mathrm{Im}\,\bar{y}) = \sin(x)$

Quindi $\frac{1}{3}\cos(x)$ risolve $y'' + 4y = \cos(x)$ (I)

$\frac{1}{3}\sin(x)$ risolve $y'' + 4y = \sin(x)$ (II)

Quindi si parte dall'eq. (I) più conveniente passare all'eq. complessa $y'' + 4y = e^{ix}$ e prendere la parte reale della sol.

<u>Più in generale</u> se ho

$$a y'' + b y' + c y = \underline{e^{\alpha x}\cos(\beta x)} \;/\; \underline{e^{\alpha x}\sin(\beta x)}$$

Posso considerare $w = \alpha + i\beta$ e risolvere

$$a y'' + b y' + c y = \underline{e^{wx}}$$

e, alla fine, prendere la parte reale / immaginaria della sol.

TUTTO FUNZIONA se $P(w) \neq 0$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{x}\sin(x) \\ y(0)=0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad P(z) = z^2+4$$

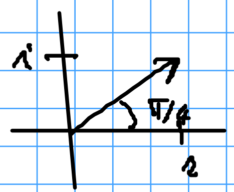
(I) Sol. dell'omogenea: $\quad y_0(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R} / \mathbb{C}$$

(II) Sol. particolare. Conviene prendere $w = 1+i$ e considerare l'eq.

$$y'' + 4y = e^{wx} \quad \Rightarrow \quad P(w) = w^2+4 = (1+i)^2+4 =$$

$$1+2i-1+4 = 4+2i \neq 0$$



Quindi trovo $\bar{y}(x) = \dfrac{e^{x(1+i)}}{4+2i} =$

$$e^{x}\, e^{ix}\, \frac{(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{e^{x}\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)(4-2i)}{16+4} =$$

$$\frac{1}{20}e^{x}\left\{ \left(4\cos(x) + 2\sin(x)\right) + i\left(4\sin(x) - 2\cos(x)\right) \right\}$$

DUNQUE

$$\bar{y}_1(x) = \frac{e^x}{10}\left(2\sin(x) - \cos(x)\right)$$ è la sol. cercata

(mentre $\bar{y}_0(x) = \frac{e^x}{10}\left(2\cos(x) + \sin(x)\right)$ è sol. particolare di

$$y'' + 4y = e^x \cos(x) = \mathrm{Re}\left(e^{wx}\right) \Big)$$

(3) Allora la soluzione generale dell'eq. è

$$y(x) = \frac{e^x}{10}\left(2\sin(x) - \cos(x)\right) + c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

$$y(0) = 0 \implies c_1 = \frac{1}{10};$$

$$y'(x) = \frac{e^x}{10}\left(2\sin(x) - \cos(x)\right) + \frac{e^x}{10}\left(2\cos(x) + \sin(x)\right) - 2c_1 \sin(2x) + c_2 \cdot 2\cos(2x)$$

$$y'(0) = 0 = -\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + 2c_2 = 0 \qquad c_2 = -\frac{1}{20}$$

$$\implies y(x) = \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) + \frac{e^x}{10}\left(2\sin(x) - \cos(x)\right) \quad \#$$