ANALISI 1 [1]
VENTIQUATTRESIMA LEZIONE
Esercizi di riepilogo

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Nel test proposto di seguito:

- Il tempo concesso è di un'ora.
- La scrittura p. 3/-1 (per esempio) significa 3 punti se la risposta è corretta, -1 punto se la risposta è errata – in caso di mancata risposta il punteggio è zero.
  Invece p. 6 significa 6 punti in caso di risposta corretta e zero punti in caso di risposta errata o mancante.
- Nel problema sulle serie
  - $\boxed{\text{AC}} \longrightarrow$ "assolutamente convergente;
  - $\boxed{\text{C}} \longrightarrow$ "convergente ma non assolutamente convergente";
  - $\boxed{\text{NC}} \longrightarrow$ "non convergente".
- $\boxed{\text{NDP}}$ sta per "nessuna delle precedenti".
- Il punteggio dipende solo dalle risposte (in questo test non contano i procedimenti).

1. Studiare il carattere delle serie seguenti (p. 3/-1 ciascuna)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{n^n+1}{n^{2n}-n!}$$

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$

2. L' integrale improprio (dipendente dal parametro reale α)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)+x}{x^{\alpha}(1+x^2)}\,dx \qquad \text{converge per}$$

$\boxed{-1<\alpha<1}$ $\boxed{0<\alpha<1}$ $\boxed{0<\alpha<2}$ $\boxed{-1<\alpha<2}$ $\boxed{0<\alpha<2}$

$\boxed{\text{NDP}}$ (p. 6/-1))

3. Calcolare il seguente integrale improprio (p. 12):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \underline{\hspace{8cm}} / \boxed{\text{non esiste}}$$

1. Studiare il carattere delle serie seguenti (p. 3/-1 ciascuna)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

AC | C | NC   AC | C | NC NO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{n^n+1}{n^{2n}-n!}$$

AC | C | NC NO   AC | C | NC

2. L' integrale improprio (dipendente dal parametro reale α)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)+x}{x^{\alpha}(1+x^2)}\,dx \qquad \text{converge per}$$

$-1<\alpha<1$ | $0<\alpha<1$ | $0<\alpha<2$ | $-1<\alpha<2$ | $0<\alpha<2$

NDP   (p. 6/-1))

3. Calcolare il seguente integrale improprio (p. 12):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

Correzione

$$\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n}{1+n^2}\right)}_{a_n}$$ convergente assoluta

$$|a_n| = \frac{1}{n}\left|\sin\left(\frac{n}{1+n^2}\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{n}{1+n^2} + o\left(\frac{n}{1+n^2}\right)\right|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1+n^2}}_{b_n} + o\left(\frac{1}{1+n^2}\right)$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1$$

Dato che $\sum_1^\infty \frac{1}{1+n^2} \leq \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < +\infty$

$\Rightarrow$ la serie $\sum a_n$ conv. assolutamente

Correzione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)}{n} \cos\left(\frac{n}{1+n^2}\right)}_{a_n}$$

$$|a_n| = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n}{1+n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(1+o(1)\right) \simeq \frac{1}{n}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum |a_n| = +\infty \quad \text{NON A.C.}$$

Vedo se converge. Si può vedere che

$|a_n|$ decrescente in n. Per farlo cerco di dimostrare

che la funzione $f(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$ è decrescente

quando x è grande. Calcoliamo $f'(x)$

Correzione

$$f'(x) = \frac{-\sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2-2x\cdot x}{(1+x^2)^2}\cdot x - \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{x^2} =$$

$$\frac{-\sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,x - \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{x^2}$$

Si può notare che il denominatore tende a -1 se $x \to +\infty$ dato che $\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \to 0$, $\sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \to 0$, $\cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \to 1$

Dunque $f'(x) < 0$ se x è grande $\Rightarrow |a_{n+1}| \leq |a_n|$ $n \geq \bar{n}$

$\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ converge per Leibniz (ma non assolutamente).

$\Rightarrow$ $\boxed{C}$

Correzione

$$\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{1+n^2}\right)}_{a_n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{arctg}(x) = x + o(x) \\ \text{x} \quad x \to 0 \end{array}}$$

$$|a_n| = \frac{1}{n} \operatorname{artg}\left(\frac{n}{1+n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{1+n^2} + o\left(\frac{n}{1+n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1+n^2} + o\left(\frac{1}{1+n^2}\right) \simeq \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{A.C.}}$$

Correzione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n} \, \frac{n^n+1}{n^{2n}-n!}}_{a_n} \qquad \boxed{AC}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \, \frac{n^n}{n^{2n}} \, \frac{1+\frac{1}{n^n}}{1-\frac{n!}{n^{2n}}} =$$

$$\frac{1}{n^n} \to 0 \qquad \frac{n!}{n^{2n}} \to 0 \ \text{limite notevole}$$

$$\frac{(-1)^n}{n^{n+1}}\left(1+o(1)\right) \Rightarrow |a_n| = \frac{1+o(1)}{n^{n+1}}$$

(per n grande)

$$|a_n| \simeq \frac{1}{n^{n+1}} = b_n \ ; \ \text{crit. radice} \ \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \, \frac{1}{n} \to 0$$

Correzione

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

$\Rightarrow \sum a_n$ conv. assolutamente.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) + x}{x^\alpha (1 + x^2)}\, dx$$

VA STUDIATO A $+\infty$ E A ZERO (se $\alpha > 0$)

$\boxed{\text{A } +\infty}$

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(x) + x}{x^\alpha (1 + x^2)}}_{f(x)}\, dx \qquad f(x) = \frac{x}{x^\alpha x^2} \frac{\frac{\sin(x)}{x} + 1}{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{x^{\alpha+1}} (1 + o(1))$$

Correzione

$$f(x) \simeq g(x) := \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

SO CHE $\int_1^{+\infty} g(x) < +\infty$ PER $\alpha+1 > 1 \iff \boxed{\alpha > 0}$

DUNQUE $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ CONV. $\iff \boxed{\alpha > 0}$

PASSIAMO A $x \simeq 0$

$$\int_0^1 \frac{\sin(x) + x}{x^\alpha (1+x^2)}\,dx$$

per $x \to 0$ $f(x) = \frac{x + o(x) + x}{x^\alpha (1 + o(1))} = \frac{x}{x^\alpha}\left(\frac{2+o(1)}{1+o(1)}\right)$

$= \frac{1}{x^{\alpha-1}}\left(2 + o(1)\right) \longrightarrow$ DEVO VEDERE PER QUALI α $\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ INT. IN $]0,1] \iff \alpha - 1 < 1$

$\iff \boxed{\alpha < 2}$

L'INTEGRALE SU $]0,+\infty[$ CONVERGE $\iff \boxed{0 < \alpha < 2}$

Correzione

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx$$

<u>NOTA</u> l'integrando $f(x) \simeq \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}$ VICINO A ZERO

DUNQUE $f(x)$ INTEGRABILE SU $]0,1]$

$\left(f(x) \simeq \frac{1}{4} \frac{1}{x^{1/2}} \text{ e } 1/2 < 1 \right)$, mentre

x $x \to +\infty$ $f(x) \simeq \frac{1}{x^2} \Rightarrow f$ È INTEGRABILE

SU $[1, +\infty[$, dato che $f(x) \simeq \frac{1}{x^2}$ $2 > 1$

FACCIAMO I CONTI; pongo $t = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

$x t^2 = x + 1 \iff x = \frac{1}{t^2 - 1} \Rightarrow dx = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\, dt$

Correzione

$$x+2=\frac{1}{t^2-1}+2=\frac{1+2t^2-2}{t^2-1}=\frac{2t^2-1}{t^2-1} \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx=\int_{+\infty}^{1}\frac{\cancel{(t^2-1)^2}}{(2t^2-1)^2}\,t\,\frac{(-2t)}{\cancel{(t^2-1)^2}}\,dt=$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{2t^2}{(2t^2-1)^2}\,dt=$$

$$s^2=2t^2 \Leftrightarrow s=\sqrt{2}\,t$$

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{s^2}{(s^2-1)^2}\,\frac{ds}{\sqrt{2}}$$

USO LA FORMULA DI HERMITE

$$\frac{s^2}{(s^2-1)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{d}{ds}\,\frac{Cs+D}{s^2-1}=$$

Correzione
$$\frac{A(s+1)(s^2-1)+B(s-1)(s^2-1)}{(s^2-1)^2}+\frac{C(s^2-1)-(Cs+D)2s}{(S^2-1)^2}$$

$$\begin{array}{ll} s^3 \to & \\ s^2 \to & \\ s \to & \\ 1 \to & \end{array}\begin{cases} A+B=0 \\ A-B-C=1 \\ -A-B-2D=0 \\ -A+B-C=0 \end{cases}$$

$\to D=0,\ A+B=0$

$\to C=-\frac{1}{2},\ A-B=\frac{1}{2}$

$$A=\frac{1}{4}\quad B=-\frac{1}{4}\quad C=-\frac{1}{2}\quad D=0$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{s^2}{(s^2-1)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{4}\ln(s-1)-\frac{1}{4}\ln(s+1)-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

Esempio

Per quali valori di α e β in $\mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_{1\;\;2}^{+\infty} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}}\,dx \quad ?$$

Analogamente per quali valori di α e β in $\mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha}} \quad ?$$

(gli stessi per cui converge l'integrale!!)

VERIFICHE

Verifiche

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha}\,dx$$

RICORDIAMO CHE QUALUNQUE $\varepsilon > 0$

$$\frac{\ln(x)}{x^\varepsilon} \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty$$

(limite notevole / de l'Hôpital)

- $\boxed{\text{Se } \alpha > 1 \quad \text{CONV. QUALUNQUE SIA } \beta \in \mathbb{R}}$

Dato $\alpha > 1$ prendo α_1 con $1 < \alpha_1 < \alpha$.

So che $\frac{1}{x^{\alpha_1}}$ è integrabile su $[1, +\infty[$.

Allora (suppongo $\beta > 0$, se no è ovvio)

$$\frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha} = \frac{\ln^\beta(x)}{x^{\alpha-\alpha_1}} \frac{1}{x^{\alpha_1}} = o(1)\frac{1}{x^{\alpha_1}} \quad \text{INTEGRABILE}$$

$$\text{MA} \quad \frac{\ln^\beta(x)}{x^{\alpha-\alpha_1}} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\ln(x)}{x^\varepsilon}\right)^\beta \to 0^\beta = 0$$

• se $\alpha < 1$ DIVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Infatti prendo α_1 con $\alpha < \alpha_1 < 1$.

Posso supporre $\beta < 0$ (altrimenti è ovvio). Allora

$$\frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha} = \frac{\ln^\beta(x)}{x^{\alpha-\alpha_1}} \frac{1}{x^{\alpha_1}} = \frac{x^{\alpha_1-\alpha}}{\ln^{-\beta}(x)} \frac{1}{x^{\alpha_1}} =$$

$$\underbrace{\left(\frac{x^\varepsilon}{\ln(x)}\right)^{-\beta}}_{\to +\infty} \underbrace{\frac{1}{x^{\alpha_1}}}_{\text{DIVERGE}} \qquad \text{dove } \varepsilon = \frac{\alpha_1 - \alpha}{-\beta_1} > 0$$

QUINDI SE $\alpha \neq 1$ le cose vanno come se non ci fosse $\ln^\beta(x)$

Verifiche

- $\alpha = 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x}\,dx \qquad \text{sostituisco } y = \ln(x)$$

$$dy = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_2^{+\infty} y^\beta\,dy$$

CONV. se $-\beta > 1 \iff \beta < -1$

DIVERGE se $\beta \geq -1$

QUINDI

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha}\,dx$$

CONVERGE $\alpha > 1$ o $\alpha = 1$ $\beta < -1$

DIVERGE $\alpha < 1$ o $\alpha = 1$ $\beta \geq -1$

$\boxed{\text{lo stesso per la serie}}$