ANALISI 1 [1]
TERZA LEZIONE

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Estremi superiore e inferiore

Sia A un insieme con $A \neq \emptyset$

Definizione Un numero reale $\bar{a}$ si dice l'**estremo superiore** di A se

$$\bar{a} = \min\{M : M \text{ è maggiorante per } A\}$$

e in tal caso si scrive $\bar{a} = \sup A$.

Definizione Un numero reale $\underline{a}$ si dice l'**estremo inferiore** di A se

$$\underline{a} = \max\{M : M \text{ è minorante per } A\}$$

e in tal caso si scrive $\underline{a} = \inf A$. Notiamo che:

- $\bar{a} = \max A \Leftrightarrow (\bar{a} = supA) \wedge (\bar{a} \in A)$
- $\underline{a} = \min A \Leftrightarrow (\underline{a} = infA) \wedge (\bar{a} \in A)$

Fino a ora sarebbe stato lo stesso se ci fossimo messi $\mathbb{Q}$.
Però se insistessimo nel rimanere in $\mathbb{Q}$ troveremmo subito degli insiemi limitati che non hanno estremo superiore:

$$A := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA Ogni insieme limitato superiormente e non vuoto in $\mathbb{R}$ **ammette** estremo superiore.

Ogni insieme limitato inferiormente e non vuoto in $\mathbb{R}$ **ammette** estremo inferiore.

FORMULAZIONE EQUIVALENTE Supponiamo che A e B siano una *sezione* di $\mathbb{R}$, cioè $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

Allora esiste un *elemento separatore*, cioè un numero $c \in \mathbb{R}$ t.c :

$$\forall a \in A \ \forall b \in b \ a \leq c \leq b$$

Caratterizzazioni

Se A è un insieme non vuoto e superiormente limitato e $\bar{a} \in \mathbb{R}$

$$\bar{a} = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \bar{a} \ \forall a \in A \\ \forall a' < \bar{a} \ \exists a : (a \in A) \wedge (a' < a) \end{cases}$$

La prima riga dice che $\bar{a}$ è un maggiorante per A, la seconda che tutti numeri più piccoli di $\bar{a}$ non sono maggioranti.
Dunque $\bar{a}$ è il minimo dei maggioranti. Analogamente

$$\underline{a} = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \underline{a} \ \forall a \in A \\ \forall a' > \underline{a} \ \exists a : (a \in A) \wedge (a' > a) \end{cases}$$

Casi infiniti Se A **non** è limitato superiormente si pone $\boxed{\sup A = +\infty}$

Se A **non** è limitato inferiormente si pone $\boxed{\inf A = -\infty}$

Inoltre si conviene che $\sup \emptyset = -\infty, \qquad \inf \emptyset = +\infty$

Nei casi infiniti le caratterizzazioni precedenti diventano: sia $A \neq \emptyset$, allora

$$\sup A = +\infty \Leftrightarrow \forall a' \in \mathbb{R}\ \exists a : (a \in A) \wedge (a' < a)$$

Questa è in effetti la caratterizzazione del fatto che A non è limitato superiormente.

Analogamente

$$\inf A = -\infty \Leftrightarrow \forall a' \in \mathbb{R}\ \exists a : (a \in A) \wedge (a' > a)$$

Estremo superiore di una funzione a valori reali

Se $a \neq \emptyset$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione, definiamo l'estremo superiore di f in A:

$$\boxed{\sup_A f := \sup f(A)} \qquad \text{indicato anche con } \sup_{x \in A} f(x).$$

Questa definizione si applica anche nel casi infinito. In particolare:

f si dice **limitata superiormente su** A se $\sup\limits_A f < +\infty$

$$\Updownarrow$$

$f(A)$ è limitato superiormente

$$\Updownarrow$$

$$\exists M : (\forall a \in A \; f(a) \leq M).$$

Estremo inferiore di una funzione a valori reali

Analogamente definiamo l'estremo inferiore di f in A:

$\boxed{\inf_A f := \inf f(A)}$ indicato anche con $\inf\limits_{x \in A} f(x)$. Allora

$$f \text{ si dice } \textbf{limitata inferiormente su } A \text{ se } \inf_A f > -\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$f(A) \text{ è limitato inferiormente}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists m : (\forall a \in A \ f(a) \geq m).$$

Infine f si dice **limitata su** A se è limitata sia sup. che inf. $\Leftrightarrow$

$$\exists m, M : (\forall a \in A \ m \leq f(a) \leq M).$$

Caratterizzazione degli estremi di una funzione

$$M = \sup_A f \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \leq M \ \forall a \in A \\ \forall M' < M \ \exists a : (a \in A) \wedge (M' < f(a)) \end{cases}$$

Analogamente

$$m = \inf_A f \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \geq m \ \forall a \in A \\ \forall m' > m \ \exists a : (a \in A) \wedge (m' > f(a)) \end{cases}$$

Nei casi infiniti

$$\sup_A f = +\infty \Leftrightarrow \forall M' \in \mathbb{R} \ \exists a : (a \in A) \wedge (M' < f(a))$$

e

$$\inf_A f = -\infty \Leftrightarrow \forall m' \in \mathbb{R} \ \exists a : (a \in A) \wedge (m' > f(a))$$

Massimi e minimi per una funzione

DEFINIZIONE Un numero reale M si dice **massimo** per f su A se $M = \max f(A)$, cioè se

$$f(a) \le M \quad \forall a \in A \quad \text{e} \quad \exists \bar{a} \in A : M = f(\bar{a})$$

in tal caso scriviamo $\boxed{M = \max_A f}$ o anche $\boxed{M = \max_{a \in A} f(a)}$.

Un punto $\bar{a}$ in A (non per forza unico) in cui $f(\bar{a}) = \max_A f$ si chiama punto di massimo per f su A - DA NON CONFONDERE con il massimo. Analogamente:

$\boxed{m = \min_A f}$ o anche $\boxed{m = \min_{a \in A} f(a)}$,detto il **minimo** di f su A, $\rightarrow$

$$f(a) \ge m \quad \forall a \in A \quad \text{e} \quad \exists \underline{a} \in A : m = f(\underline{a})$$

Se $\underline{a} \in A$ e $\min_A f = f(\underline{a})$, $\underline{a}$ si dice **punto di minimo** per f su A.

Alcune proprietà

Se $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, allora

$$\inf B \leq \inf A, \qquad \sup A \leq \sup B, \qquad \inf A \leq \sup A$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ allora

$$\inf_A f \leq \sup_A f$$

Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ e se $f(a) \leq g(a)$ per ogni a in A, allora

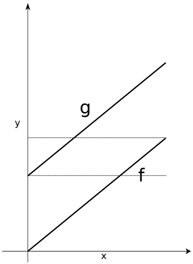
$$\inf_A f \leq \inf_A g, \qquad \sup_A f \leq \sup_A g$$

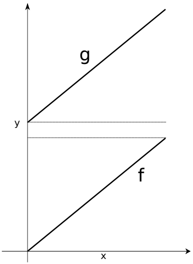
ATTENZIONE, NON VALE:

$$\sup_A f \leq \inf_A g$$

PER QUESTO CI VUOLE

$$f(a') \leq g(a'') \qquad \forall a', a'' \in A$$





$$f(a) \leq g(a) \quad \forall a \in A$$

$$f(a') \leq g(a'') \quad \forall a', a'' \in A$$

Alcune proprietà

Se $f, g : A \to \mathbb{R}$, allora

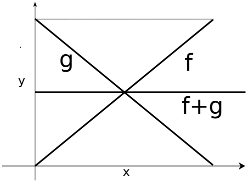
$$\inf_A f + \inf_A g \leq \inf_A (f+g) \leq \sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g$$

POSSONO ESSERE DIVERSI:

$f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$ in $A = [0,1]$, allora $f(x) + g(x) = 1$ e:

$$0 = 0 - 0 = \inf_A f + \inf_A g < 1 = \inf_A (f+g)$$

$$1 = \sup_A (f+g) < \sup_A f + \sup_A g = 1 + 1 = 2$$



ESEMPIO

$$A := \left\{ \frac{n}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\} \qquad \text{o (detto meglio)}$$

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} : \left(\exists n \in \mathbb{N} : (n \geq 2) \wedge \left(x = \frac{n}{n-1} \right) \right) \right\}$$

$$\inf A = ??? \qquad \sup A = ????$$

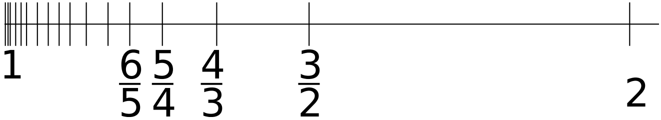
Notiamo che (vedi le definizioni)

$$\sup A = \sup_{n \geq 2} \frac{n}{n+1}$$

Se proviamo a mettere qualche valore di n:

$$n = 2 \to \frac{2}{1} = 2, \quad n = 3 \to \frac{3}{2}, \quad n = 4 \to \frac{4}{3}, \quad \ldots . \to 1 + \frac{1}{n-1}$$

SEMBRA CHE $\inf A = 1$



Per dimostrare che $1 = \inf A$ bisogna verificare che:

(1) $\quad 1 \leq a \ \forall a \in A$ cioè $1 \leq \dfrac{n}{n-1}$ per ogni $n \geq 2$ intero $\Leftrightarrow$

$$0 \leq \frac{n}{n-1} - 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n-1} \text{ VERO per } n \geq 2$$

(2) $\quad$ se $m > 1$ esiste a in A con $a < m$ cioè:

($*$) $\quad \forall m > 1 \ \exists n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \qquad \dfrac{n}{n-1} < m$

Esaminiamo la diseguaglianza (ricordando che si vuole $n \geq 2$)

$\dfrac{n}{n-1} < m \Leftrightarrow \ n < m(n-1) \Leftrightarrow \ m < (m-1)n$

$\Leftrightarrow (m > 1 \text{ !!}) \ \dfrac{m}{m-1} < n$ $\boxed{\text{TALE } n \text{ si trova sempre}}$ $\Rightarrow (*)$ VALE.

DOMANDE/ESERCIZI[2]

Proposizione	Vera	Falsa
$A \subset [0,2]$ implica $\exists\ \sup A$	$\square$	$\square$
$A \subset [0,2]$ implica $\exists\ \max A$	$\square$	$\square$
$A \subset [0,2[$ implica $\exists\ \sup A$	$\square$	$\square$
$A \subset [0,2[$ implica ˜$(\exists\ \max A)$	$\square$	$\square$
$\sup A = 3$ implica $3 \in A)$	$\square$	$\square$
$\sup A = 3$ implica $3 \notin A)$	$\square$	$\square$
$(\sup A = 3) \wedge (3 \in A)$ implica $3 = \max A$	$\square$	$\square$

[2]cfr. http://www2.ing.unipi.it/ d8702/matematica/test00.html (prof. M. Franciosi)

DOMANDE/ESERCIZI

Proposizione	Vera	Falsa
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ implica $\sup\limits_{[0,1]} \leq 1$	$\square$	$\square$
$f : [0,1] \to]-1,1[$ implica f limitata	$\square$	$\square$
$f : [0,1] \to]0,2[$ implica $\sup\limits_{[0,1]} f \leq 2$	$\square$	$\square$
$f : [0,1] \to]0,2[$ implica $\sup\limits_{[0,1]} f = 2$	$\square$	$\square$
$f : [0,1] \to]0,2[$ implica che non esiste $\max\limits_{[0,1]} f$	$\square$	$\square$

DOMANDE/ESERCIZI

$\sup\{y : (\exists x \in \mathbb{R} : y = \cos(x))\} =$	
$\sup\{x : (\exists y \in \mathbb{R} : x = \cos(y))\} =$	
$\sup\{x : \cos(x) = 1\} =$	
$\sup\{x : (\exists y \in \mathbb{R} : \cos(y) = 1)\} =$	
$\inf\{y : (\exists x \in [0,2[: y = -x^2 + 4)\} =$	
$\inf\{x : 4x - 2 \geq 10\} =$	
$\inf\{y : \forall x \in]-1,[\quad 1 - x^2 < y)\} =$	

DOMANDE/ESERCIZI

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

funzione	iniettiva ?	surgettiva ?
$f(x) = 2x - 5$		
$f(x) = x^2$		
$f(x) = x^3$		
$f(x) = x^2 + 4x + 4$		
$f(x) = \cos(x)$		
$f(x) = x^3 - x^2$		
$f(x) = x^3 - x$		

DOMANDE/ESERCIZI

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

funzione	iniettiva ?	surgettiva ?
$f(x) = 2^x$		
$f(x) = 3^{-x}$		
$f(x) = 2^{1+x^2}$		
$f(x) = \ln(1 + x^2)$		
$f(x) = \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$		
$f(x) = \lvert x - 3 \rvert$		
$f(x) = x^{2000} + 2000$		

DOMANDE/ESERCIZI

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f(x)$	A	$f(A)$	B	$f^{-1}(B)$
$2x - 4$	$[0, 3]$		$[0, 2]$	
x^2	$[0, 3]$		$[0, 4]$	
x^3	$[0, 3]$		$[0, 27]$	
$x^2 + 4x + 4$	$[-2, 1]$		$[0, 4]$	
$\cos(x)$	$[0, \pi]$		$[-2, 2]$	

DOMANDE/ESERCIZI

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f(x)$	A	$f(A)$	B	$f^{-1}(B)$
$\sin(x)$	$[0, \pi]$		$[1, 2]$	
2^x	$]-\infty, 0[$		$[1, +\infty[$	
$\ln(x)$	$]0, 1]$		$[1, e^2]$	
$\lvert x-3 \rvert$	$[2, 4]$		$[0, 2]$	
3^x	$\mathbb{R}$		$[1, 3]$	

I NUMERI INTERI

$\boxed{\mathbb{N} = \text{insieme dei numeri interi}}$ Come possiamo caratterizzare $\mathbb{N}$?

Dal nostro punto di vista ($\mathbb{R}$ è già noto) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ e valgono:

$0 \in \mathbb{N}$;

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; n + 1 \in \mathbb{N}$.

Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ tale che $\forall a \; (a \in A) \to (a + 1 \in A)$ si dice **induttivo**.

Dunque $0 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ è un insieme induttivo, ma questo non basta ad individuarlo. Anche $[0, +\infty[$ o $\mathbb{Q}$ sono induttivi (facile).

3. $\mathbb{N}$ è il **"minimo" insieme induttivo contenente lo zero** – formalmente $\mathbb{N}$ è l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi contenenti zero.

Questo si esprime dicendo che: **Principio di induzione**

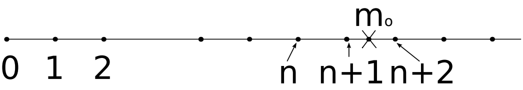
$$\text{Se } A \subset \mathbb{N}, 0 \in A, \; A \text{ è induttivo} \to A = \mathbb{N}$$

$$(A \subset \mathbb{N}) \wedge (0 \in A) \wedge ((n \in A) \to (n + 1 \in A)) \to A = \mathbb{N}$$

Se $A \subset \mathbb{N}$, A contiene 0 e per ogni elemento di A il suo successivo è ancora in A, ALLORA $A = \mathbb{N}$

Alcune proprietà di $\mathbb{N}$

- Tutti gli interi sono maggiori o eguali a zero.
  DIM Se no $\mathbb{N} \cap [0, +\infty[$conterrebbe zero e sarebbe un insieme induttivo più piccolo di $\mathbb{N}$.
- Sia $n \in \mathbb{N}$; allora $]n, n+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$
  DIM Poniamo $A := \{n \in \mathbb{N} :]n, n+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset\}$.
  (1) $\boxed{0 \in A}$, perché se ci fosse un m_0 in $\mathbb{N}$ con $0 < m_0 < 1$, allora per nessun $m \in \mathbb{N}$ potrebbe essere $m_0 = m + 1$ (m dovrebbe essere negativo) e allora $0 \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$ e $\mathbb{N} \setminus \{n_0\}$sarebbe un insieme induttivo più piccolo di $\mathbb{N}$.
  (2) $\boxed{\text{se }]n, n+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset \text{ allora }]n+1, n+2[\cap \mathbb{N} = \emptyset}$
  infatti se ci fosse un m_0 in $\mathbb{N}$ con $n+1 < m_0 < n+2$ non potrebbe essere $m_0 = m + 1$ per nessun $m \in \mathbb{N}$ (tale m dovrebbe stare in $]n, n+1[$) e di nuovo potrei togliere m_0 da $\mathbb{N}$ ottenendo un insieme induttivo più piccolo.



Quindi A è induttivo e deve necessariamente essere tutto $\mathbb{N}$

Alcune proprietà di $\mathbb{N}$

- Se $n, m \in \mathbb{N}$, allora $n + m \in \mathbb{N}$.
  DIM Fissiamo m e poniamo $A_m := \{n \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}\}$.
  (1) $0 \in A_m$ (perché $m + 0 = m \in \mathbb{N}$)
  (2) A_m è induttivo, infatti:
  se $n \in A_m \Rightarrow n + m \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 + m \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in A_m$.

  Quindi $A_m = \mathbb{N}$, cioè vale la tesi.

Alcune proprietà di $\mathbb{N}$

- Se $n, m \in \mathbb{N}$ e $n \geq m$, allora $n - m \in \mathbb{N}$.
  DIM Fissiamo $m \in \mathbb{N}$ e poniamo
  $B_m := \{n \in \mathbb{N} : n < m\} \cup \{n \in \mathbb{N} : (n \geq m) \wedge (n - m \in \mathbb{N})\}$.
  (1) $0 \in B_m$ perché o $0 < m$ oppure $m = 0$ e $0 - 0 \in \mathbb{N}$
  (2) B_m è induttivo:
  sia $n \in B_m$ può essere (a) $n + 1 < m$, e allora $n + 1 \in B_m$;
  o (b) $n + 1 = m$, e allora $n + 1 - m = 0 \in \mathbb{N}$ da cui
  $n + 1 \in B_m$;
  o infine (c) $n + 1 > m$ nel qual caso $n + 1 \geq m + 1$ (perché
  $]m, m + 1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$) da cui $n \geq m \in \mathbb{N}$ e allora $n - m \in \mathbb{N}$
  (perché $n \in B_m$) e quindi $n + 1 - m = (n - m) + 1 \in \mathbb{N}$
  IN OGNI CASO $n + 1 \in B_m$

  Per il principio di induzione ne segue $B_m = \mathbb{N}$, cioè la tesi.

Conseguenze del principio di induzione

PRINCIPIO DI INDUZIONE PER I PREDICATI
Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato definito per n intero. Allora se

(1) $\mathcal{P}(0)$ è vero
(2) per ogni n intero vale l'implicazione $\mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n intero.
Una proprietà $\mathcal{P}(n)$ che verifichi (2) si dice induttiva.

DEFINIZIONI RICORSIVE Siano dati un numero reale x_0 e una funzione $F : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ($(x, n) \mapsto F(x, n)$). La scrittura:

$$\begin{cases} f(0) := x_0 \\ f(n+1) := F(f(n), n) \end{cases}$$

definisce univocamente una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Diseguaglianza di Bernoulli

Per ogni $a > -1$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Fissiamo $a > -1$ e cerchiamo di applicare il principio di induzione al predicato:

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}(1+a)^n \geq 1 + na\text{”}$$

(1) $\mathcal{P}(0)$ è vera infatti $(1+a)^0 = 1 = 1 + a \cdot 0$
(2) $\mathcal{P}(n)$ è induttiva. Infatti supponiamo che $\mathcal{P}(n)$ sia vera.
Allora
$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \boxed{\geq (1+na)(1+a)} =$
$(1 + na + a + na^2) \geq (1 + na + a) = 1 + (n+1)a.$
(al passo evidenziato abbiamo usato la validità di $\mathcal{P}(n)$),
Dunque $\mathcal{P}(0)$ vera, $\mathcal{P}(n)$ induttiva. $\Rightarrow \mathcal{P}(n)$ vera per ogni n.

Somma dei primi n interi

$$\boxed{0 + 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}}$$

Per esempio

$$\begin{aligned}
1 + 2 = 3 &= \frac{2 \cdot 3}{2}, \\
1 + 2 + 3 = 6 &= \frac{3 \cdot 4}{2}, \\
1 + 2 + 3 + 4 = 10 &= \frac{4 \cdot 5}{2}, \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 &= \frac{5 \cdot 6}{2} \ldots
\end{aligned}$$

Somma dei primi n interi

Dimostriamolo per induzione sulla proprietà

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\text{”}$$

(1) $\mathcal{P}(0)$ è vera: $0 = \dfrac{0(0+1)}{2}$

(2) $\mathcal{P}(n)$ è induttiva. Infatti se $\mathcal{P}(n)$ vale

$0 + 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$

$(n+1)\left[\dfrac{n}{2} + 1\right] = (n+1)\dfrac{n+2}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

da cui $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

A causa del principio di induzione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n intero.

Provare a dimostrare che

$$\boxed{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Le formule sopra si possono anche scrivere

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Mediante il simbolo di **sommatoria**.

SIMBOLO DI SOMMATORIA

Se a_0, $a_1, \ldots a_i$ sono dei numeri dipendenti da un indice intero i (formalmente $i \mapsto a_i$ è una funzione da $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{R}$) allora scriviamo

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Tale notazione si può generalizzare nei modi seguenti; se $k \leq h$:

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_h = \sum_{i=k}^{h} a_i$$

o anche

$$\sum_{i \in I} a_i, \qquad \sum_{i : \mathcal{P}(i)} a_i$$

per indicare che si prende la somma di tutti i numeri a_i individuati dagli indici i appartenenti a I, oppure verificanto la proprietà $\mathcal{P}$.
Per esempio

$$\sum_{i \in \{3,5,7\}} i^2 = \sum_{2 \leq i \leq 8, i \text{ dispari}} i^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2$$

Alcune definizioni ricorsive

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = (n+1)f(n) \end{cases}$$

Allora $f(n)$ è il **fattoriale** di n

$$f(n) = n! = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

Fissati A e a_0 in $\mathbb{R}$ consideriamo:

$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f(n+1) = Af(n) \end{cases}$$

Allora $\boxed{f(n) = a_0 A^n}$. Dimostriamolo per induzione:
(1) $a_0 = f(0) = a_0 A^0$ O.K.
(2) PASSO INDUTTIVO Se $f(n) = a_0 A^n$ allora
$f(n+1) = Af(n) = A \cdot a_0 A^n = a_0 A^{n+1}$ O.K.
Quindi $f(n) = a_0 A^n$ per ogni n.

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri interi è illimitato superiormente.

PER ASSURDO supponiamo che sia $\sup \mathbb{N} = M$ finito

Allora avremmo: $\boxed{n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

ma dato che $M - 1/2 < M$ esisterebbe $n' \in \mathbb{N}$ con $\boxed{n' > M - 1/2}$

D'altra parte se $n' \in \mathbb{N}$ si ha $n' + 1 \in \mathbb{N}$ e allora:

$n' + 1 \geq (M - 1/2) + 1 = M + 1/2 > M$ ASSURDO

Dunque

$$\boxed{\sup \mathbb{N} = +\infty}$$

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha minimo.

DIM Prendiamo un sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$.
Dato che $0 \leq n$ per ogni n in A si ha $\inf A \geq 0$
Chiamiamo $\boxed{m := \inf A}$, cerchiamo di dimostrare che $m \in A$.
Se questo non fosse vero $m < n$ per ogni n in A.
Dato che $m + 1 > m$, applicando le proprietà dell'estremo inferiore:

$$\exists n' \in A : n' < m + 1$$

Dato che $n' > m$, riapplicando le proprietà dell'estremo inferiore:

$$\exists n'' \in A : n'' < n'$$

Ma allora $m < n'' < n' < m + 1 \Rightarrow 0 < n' - n'' < 1$ ASSURDO:
NON ci sono due interi distinti a distanza minore di uno.
Quindi $m \in A$ da cui $\boxed{m = \min A}$

Principio di Archimede

Dati a e b reali con $a > 0$

$$\exists n \in \mathbb{N} : na > b$$

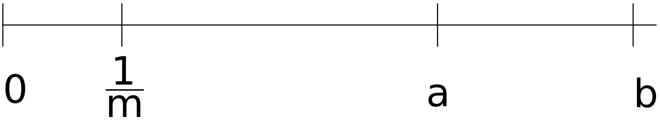
DIM. Dato che $\sup \mathbb{N} = +\infty$ esiste un intero n tale che $n > \dfrac{b}{a}$ e quindi $(a > 0)$ $na > b$.

Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

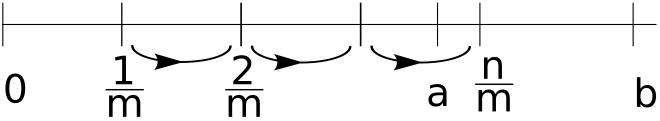
Dati a e b reali con $a < b$ esistono n ed $m \neq 0$ in $\mathbb{N}$ con

$$a < \frac{n}{m} < b$$

DIM Prendiamo $\boxed{m > \frac{1}{b-a} > 0}$. Allora $\frac{1}{m} < b - a$



Troviamo n: $\boxed{n := \min\left\{ n' : \frac{n'}{m} \geq a \right\}}$



Analiticamente:

dalla definizione di n si ha $\dfrac{n}{m} \geq a$, ma $\dfrac{n-1}{m} < a$.

Dunque $\dfrac{n}{m} < \dfrac{1}{m} + a < (b-a) + a = b$ e quindi $a \leq \dfrac{n}{m} < b$

Con una lieve modifica $(\dots)$ si trova $<$ invece di $\leq$.

QUINDI

$$\boxed{\text{Tra due numeri arbitrari c'è sempre un numero razionale}}$$

$$\boxed{\text{L'insieme } \mathbb{Q} \text{ è } \textit{denso} \text{ in } \mathbb{R}}$$

Si potrebbe anche vedere che:

$$\boxed{\text{Tra due numeri arbitrari c'è sempre un numero irrazionale}}$$

$$\boxed{\text{L'insieme } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ è } \textit{denso} \text{ in } \mathbb{R}}$$