ANALISI 1 [1]

UNDICESIMA LEZIONE

Derivazione- definizione e prime proprietà

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo e sia $x_0 \in I$

Definizione (Derivata)

Diciamo che f è ***derivabile in x_0*** *se esiste finito*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

che viene allora detto ***derivata di f in x_0*** *e indicato con uno dei simboli*

$$f'(x_0) \qquad \dot{f}(x_0) \qquad \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x = x_0}$$

Diciamo che f è ***derivabile in I*** *se f è derivabile in ogni x_0 di I. In questo caso risulta definita la nuova funzione $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ detta* ***derivata di f***.

Definizione (derivate di ordine superiore)

Se f è derivabile in I e a sua volta f' risulta derivabile in x_0 (in I) allora la derivata di f' (a rigore $(f')'$) viene detta ***derivata seconda*** *di f e indicata con f''.*
Analogamente si definisce la derivata terza come $f''' = (f'')'$ e così via.
Per indicare la generica derivata di ordine n si utilizzano le scritture

$$f^{(n)} \qquad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

(nella prima notazione le parentesi sono necessarie per non confondere la derivazione con la potenza)
Per convenzione la derivata di ordine zero f^0 coincide con la funzione di partenza f

Osservazione (derivata e retta tangente)

- *Se f è derivabile in x_0 allora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

DIM

cio'e la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approssima la funzione a meno di un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$.

- *Viceversa se $y = m(x - x_0) + q$ è una retta passante per $(x_0, f(x_0)$ tal che*

$$f(x) = m(x - x_0)q + o(x - x_0)$$

allora necessariamente $p = f(x_0)$, f è derivabile in x_0 e $m = f'(x_0)$. DIM

Definizione (retta tangente)

Se f è derivabile in x_0, la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ viene detta retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Teorema

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 DIM

Nota

Il teorema precedente non è invertibile.
La funzione $f(x) = |x|$ fornisce un esempio di funzione continua che, almeno nello zero, non è derivabile. DIM

Teorema (linearità)

Supponiamo che f e g siano derivabili in x_0 e che alpha e β siano due numeri reali. Allora $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 e

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

La dimostrazione è conseguenza immediata dell proprietà dei limiti.

Teorema (derivata del prodotto)

Supponiamo che f e g siano derivabili in x_0.
Allora fg è derivabile in x_0 e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

DIM

In termini sintetici, se f e g sono derivabili ovunque:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Teorema (derivata del quoziente)

Supponiamo che f e g siano derivabili in x_0 e che $g(x_0) \neq 0$.
Allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

DIM

In termini sintetici, se f e g sono derivabili ovunque e $g \neq 0$ ovunque:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

In particolare, se f è diversa da zero in x_0 (ovunque)

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} \qquad \left(\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}\right)$$

Teorema (derivata della composizione)

Supponiamo che abbia senso la composizione $f \circ g$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e che g sia derivabile in $g(x_0)$.
Allora $f \circ g$ è derivabile in x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

DIM

In termini sintetici, se f e g sono derivabili ovunque:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

Teorema (derivata della funzione inversa)

Supponiamo che f sia invertibile e derivabile in tutto l'intevallo I.
Supponiamo che $f'(x:0(\neq 0$ e poniamo $y_0 := f(x_0)$
Allora f^{-1} è derivabile in y_0 e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

DISEGNO

In termini sintetici, se f' è ovunque diversa da zero

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

derivate delle funzioni elementari

funzione	derivata	insieme di derivabilità
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}, n < 0)$	nx^{n-1}	$]0, +\infty[$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$[0, +\infty[$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 1)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, n \in \mathbb{Z}\}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arctan(x)$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$