1 Funzioni razionali: riduzione in fratti semplici e metodo di Hermite

Chiamiamo funzione razionale una funzione f ottenuta come rapporto tra due polinomi P, Q a coefficienti reali:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

il cui dominio è evidentemente $\mathbb{R}$ privato degli zeri di Q. Indichiamo con n il grado di Q e supponiamo nel seguito che il grado di P sia strettamente minore di n, cioè, come si usa dire, che f sia una *funzione razionale propria*. Se non fossimo in questo caso è chiaro che, utilizzando la divisione tra polinomi potremmo scrivere $P(x) = P_1(x)Q(x) + R(x)$, dove P_1 ed R sono polinomi e il grado di R è strettamente minore di n. Quindi

$$f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

e tutti i discorsi che seguono si fanno con R al posto di Q.
Possiamo anche supporre che $Q(x) = x^n +'' \textit{termini di grado} < n''$, perché l'eventuale coefficiente di x^n può essere inglobato in P.
A questo punto il teorema fondamentale dell'algebra ci garantisce che esistono $z_1, \ldots, z_n$ *numeri complessi*, non necessariamente distinti tali che $Q(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ per ogni z complesso. Questa rappresentazione è però scomoda per quanto dobbiamo fare - conviene invece pensare che Q abbia $k \leq n$ radici complesse distinte, $z_1 \neq z_2 \neq \cdots \neq z_k$ (continuiamo a indicarle con lo stesso simbolo) e che per ogni i tra 1 e k ci sia un m_i intero, detto *molteplicità* di z_i in modo che

$$Q(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_k)^{m_k} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

(m_i dice quante volte la radice z_i si ripete nella prima fattorizzazione, quindi $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$).
Notiamo a questo punto che, essendo Q a coefficienti reali, si ha:

$$Q(z_i) = 0 \Leftrightarrow \overline{Q(z_i)} = 0 \Leftrightarrow Q(\overline{z_i}) = 0$$

e dunque ogni radice di Q è tale che anche la sua coniugata è ancora una radice. Quindi le radici complesse che non sono reali compaiono a coppie $w, \overline{w}$. Non è difficlile vedere inoltre che se w è una radice di molteplicità m, la sua coniugata $\overline{w}$ ha la stessa molteplicità m. Cambiamo allora la notazione e indichiamo le radici di Q con $x_1, \ldots, x_h$, $w_1, \ldots, w_l$ e $\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_l}$, dove le x_i sono reali e le w_j sono complesse e non reali; indichiamo inoltre con r_i le molteplicità delle x_i $(i = 1, \dots, h)$ e con s_j le molteplicità delle $w_j / \overline{w_j}$ $(j = 1, \dots, l)$, di modo che $r_1 + \cdots + r_h + 2s_1 + \cdots + 2s_l = n$ e si ha $\forall z \in \mathbb{C}$

$$Q(z) = (z - x_1)^{r_1} \cdots (z - x_h)^{r_h} (z - w_1)^{s_1} (z - \overline{w_1})^{s_1} \cdots (z - w_l)^{s_l} (z - \overline{w_l})^{s_l}$$

Finalmente notiamo che

$$(z - w)(z - \overline{w}) = z^2 - 2\Re(e)wx + \|w\|^2$$

(sia $\Re e(w)$ che $\|w\|^2$ sono reali!) e quindi $\forall x \in \mathbb{R}$

$$Q(x) = (x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_h)^{r_h} (x^2 + a_1 x + b_1)^{s_1} \cdots (x + a_l x + b_l)^{s_l}$$

dove $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1 \dots, l$ e il trinomio $x^2 + a_j x + b_j$ non ha radici reali $(a_j^2 - 4b_j < 0)$. La fattorizzazione che abbiamo ottenuto in $\mathbb{R}$ è quella giusta per i nostri scopi.

Proposizione 1.1 (riduzione in fratti semplici). *Data la fattorizzazione di Q sopra indicata, si possono trovare n numeri reali*

$$\begin{gathered} A_{1,1}, \dots, A_{1,r_1} \dots, A_{h,1}, \dots, A_{h,r_h} \\ B_{1,1}, C_{1,1}, \dots, B_{1,s_1}, C_{1,s_1}, \dots, B_{l,1}, C_{l,1}, \dots, B_{l,s_l}, C_{l,s_l} \end{gathered}$$

tali che

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{1,1}}{x - x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,r_1}}{(x - x_1)^{r_1}} + \\ & + \cdots + \\ & \frac{A_{h,1}}{x - x_h} + \frac{A_{h,2}}{(x - x_h)^2} + \cdots + \frac{A_{h,r_h}}{(x - x_h)^{r_h}} + \\ & \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + a_1 x + c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + a_1 x + c_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1,s_1}x + C_{1,s_1}}{(x^2 + a_1 x + c_1)^{s_1}} + \\ & + \cdots + \\ & \frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{x^2 + a_l x + c_l} + \frac{B_{l,2}x + C_{l,2}}{(x^2 + a_l x + c_l)^2} + \cdots + \frac{B_{l,s_l}x + C_{l,s_l}}{(x^2 + a_l x + c_l)^{s_l}} \end{aligned} \tag{2}$$

Dimostrazione. Non diamo la dimostrazione, che si baserebbe sul provare che il sistema lineare ricavato imponendo che valga la formula sopra, ha sempre soluzione, in quanto il determinante della matrice associata è diverso da zero. $\square$

La scomposizione in fratti semplici consente di trovare la primitiva di una qualunque funzione razionale (a patto di riuscire a fattorizzare Q). Infatti dopo la scomposizione ci si trova di fronte a:

1. termini del tipo $\dfrac{A}{x-x_0}$ la cui primitiva è $A\ln(|x-x_0|)+c$;

2. termini del tipo $\dfrac{Bx+c}{x^2+ax+b}$ con $a^2-4b<0$; in questo caso possiamo scrivere
$$\frac{Bx+c}{x^2+ax+b} = \frac{B}{2}\frac{2x+a}{x^2+ax+b} + \frac{c-aB/2}{x^2+ax+b}$$
la primitiva del primo termine è $B\ln(\sqrt{|x^2+ax+b|})+c$, mentre il secondo si può scrivere come
$$\frac{c-aB/2}{(x+a/2)^2+b-a^2/4} = \frac{D}{(\alpha x+\beta)^2+1}$$
(per delle opportune D , α e β) e la sua primitiva è allora data da $\dfrac{D}{\alpha}\arctan(\alpha x+\beta)+c$;

3. termini del tipo $A(x-x_0)^{-r}$ con $r>1$; in questo caso la primitiva è $A/(1-r)\,(x-x_0)^{1-r}+c$ (notiamo che tale primitiva è una funzione razionale);

4. termini del tipo $\dfrac{Bx+c}{(x^2+ax+b)^s}$ con $a^2-4b<0$ ed $s>1$; il calcolo della primitiva in questo caso è complicato; si potrebbe vedere, con un'opportuna integrazione per parti, che tale primitiva è data da una funzione razionale più dei pezzi dello stesso tipo di quelli trovati al punto 2. Vedremo però che c'è un modo leggermente più semplice per trattare questi casi.

In definitiva la primitiva di una funzione razionale è esprimibile come un'altra funzione razionale più termini del tipo di quelli indicati ai punti 1, e 2. . Questo suggerisce di utilizzare una diversa scomposizione, forse più adatta al calcolo degli integrali.

Proposizione 1.2 (Formula di Hermite). *Dati P e Q come sopra, esistono delle costanti*
$$A_1,\dots,A_h,B_1,C_1,\dots,B_l,C_l$$

e un polinomio P_1 di grado $n-h-2l$ tali che:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_h}{x-x_h} + \\ & \frac{B_1x+C_1}{x^2+a_1x+b_1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+a_2x+b_2} + \cdots + \frac{B_sx+C_s}{x^2+a_sx+b_s} + \\ & \frac{d}{dx}\left(\frac{P_1(x)}{(x-x_1)^{r_1-1}\cdots(x-x_h)^{r_h-1}(x^2+a_1x+b_1)^{s_1-1}\cdots(x^2+a_lx+b_l)^{s_l-1}}\right)\end{aligned}$$

La regola per scrivere il termine dentro la derivata è in pratica la seguente: al denominatore si mettono tutti i fattori di Q *con molteplicità scalata di uno* (in questo modo le radici semplici non contribuiscono) mentre al numeratore si mette un generico polnomio *con grado minore di uno rispetto al denominatore* appena costruito. In ogni caso, dopo aver eseguito la derivata dell'ultimo pezzo, ci si ritrova con un sistema di n equazioni in n incognite.

Esempio 1.3. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{x^2(x^4+2x^2+1)}\,dx$$

Notiamo che $Q(x) = x^2(x^4+2x^2+1) = x^2(x^2+1)^2$. Impostiamo la formula di Hermite:

$$\frac{1}{x^2(x^4+2x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Dx^2+Ex+F}{x(x^2+1)}\right) = (*)$$

(a numeratore, dentro la derivata, abbiamo messo un generico polinomio di grado 2, visto che il denominatore viene di grado 3). Svolgendo i calcoli

$$\begin{aligned}(*) =& \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{-Dx^4-2Ex^3+(D-3F)x^2-F)}{x^2(x^2+1)^2} = \\ & \frac{(A+B)x^5+(C-D)x^4+(2A+B-2E)x^3+(C+D-3F)x^2+Ax-F}{x^2(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

che porta al sistema lineare

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C - D = 0 \\ 2A + B - 2E = 0 \\ C + D - 3F = 0 \\ A = 0 \\ -F = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$A = 0 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad C = -\frac{3}{2} \quad , \quad D = -\frac{3}{2} \quad , \quad E = 0 \quad , \quad F = -1 \quad ,$$

Quindi

$$\frac{1}{x^2(x^4 + 2x^2 + 1)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2 + 2}{x(x^2 + 1)}\right)$$

da cui

$$\int \frac{1}{x^2(x^4 + 2x^2 + 1)}\, dx = -\frac{3}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\frac{3x^2 + 2}{x(x^2 + 1)} + c$$

Esempio 1.4. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$$

Il primo problema è quello di fattorizzare Q. Per questo conviene considerare la fattorizzazione complessa

$$1 + z^4 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

dove le z_j sono le radici quarte di -1, cioè

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad , \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \quad , \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \quad , \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$$

e quindi

$$1 + z^4 = (z - z_1)(z - \overline{z_1})(z - z_3)(z - \overline{z_3}) = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1).$$

Impostiamo la riduzione in fratti semplici

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{(A + C)x^3 + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)x^2 + (A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D)x + B + D}{x^4 + 1}$$

Questo implica che

$$\begin{cases} A & & & + & C & & & = 0 \\ \sqrt{2}A & + & B & - & \sqrt{2}C & + & D & = 0 \\ A & + & \sqrt{2}B & + & C & - & \sqrt{2}D & = 0 \\ & & B & & & + & D & = 1 \end{cases}$$

Ricaviamo C dalla prima riga e D dalla quarta

$$\begin{cases} C & & = -A \\ 2\sqrt{2}A & & = -1 \\ & 2\sqrt{2}B & = \sqrt{2} \\ D & & = 1 - B \end{cases}$$

e quindi

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad , \quad B = \frac{1}{2} \quad , \quad C = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad , \quad D = \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4}\,\frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Integriamo il primo dei due pezzi (il secondo è analogo).

$$\frac{1}{4}\int \frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{-\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx =$$
$$\frac{-\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-\sqrt{2}/2)^2+1/2}\,dx =$$
$$\frac{-\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}\,dx =$$
$$\frac{-\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1) + c$$

Riprendiamo la formula di riduzione in fratti semplici e mostriamo una tecnica che semplifica il calcolo delle costanti $A_{i,j}\ldots$. Questa tecnica è particolarmente utile nel caso di radici reali semplici e comunque è interessante anche nel caso generale.
Attenzione, a lezione è stata fatto solo il caso delle radici semplici - chi vuole può ricordarsi solo la formula in quel caso (o anche saltare questa parte, se preferisce fare gli integrali delle funzioni razionali con le formule precedenti).
Il modo naturale di impostare il problema è, come abbiamo già visto, è di ambientare tutto nei complessi (daremo per buono ora che varie nozioni imparate per le funzioni reali vadano bene ancora in ambito complesso). Se il denominatore Q si fattorizza come in (1), allora, senza voler a priori distinguere le radici reali dalle altre, si vede che è possibile trovare $A_{1,1},\ldots,A_{1,m_1}$,

$A_{1,2}, \ldots, A_{1,m_2}, \ldots, A_{k,1}, \ldots, A_{k,m_k}$ tali che

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{Q(z)} =& \frac{A_{1,1}}{z-z_1} + \frac{A_{1,2}}{(z-z_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(z-z_1)^{m_1}} + \\ & + \cdots + \\ & \frac{A_{k,1}}{z-z_k} + \frac{A_{k,2}}{(z-z_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k,m_k}}{(z-z_k)^{m_k}}\end{aligned} \tag{3}$$

(questa formula dà esattamente la (2), se si abbinano le radici non reali a coppie coniugate). Se moltiplichiamo ambi i membri della (3) per $(z-z_1)^{m_1}$ otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{Q_1(z)} =& A_{1,1}(z-z_1)^{m_1-1} + A_{1,2}(z-z_1)^{m_1-2} + \cdots + A_{1,m_1} + \\ & \left(\frac{A_{2,1}}{z-z_2} + \frac{A_{2,2}}{(z-z_2)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_2}}{(z-z_2)^{2_2}} + \right. \\ & + \cdots + \\ & \left. \frac{A_{k,1}}{z-z_k} + \frac{A_{k,2}}{(z-z_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k,m_k}}{(z-z_k)^{m_k}} \right) (z-z_1)^{m_1} = \\ & A_{1,1}(z-z_1)^{m_1-1} + A_{1,2}(z-z_1)^{m_1-2} + \cdots + A_{1,m_1} + O((z-z_1)^{m_1})\end{aligned}$$

dove si è posto

$$Q_1(z) = (z-z_2)^{m_2} \cdots (z-z_k)^{m_k}$$

(che in z_1 è diverso da zero). Calcolando tutto in $z = z_1$ si trova $A_{1,m_1} = \frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$. Più in generale, per l'unicità dello sviluppo di Taylor,

(4)

$$A_{1,1} = \frac{1}{(m_1-1)!} \frac{d^{m_1-1}}{dz^{m_1-1}} \frac{P(z)}{Q_1(z)}\Big|_{z=z_1}, \quad A_{1,2} = \frac{1}{(m_1-2)!} \frac{d^{m_1-2}}{dz^{m_1-2}} \frac{P(z)}{Q_1(z)}_{z=z_1}, \quad \ldots$$

In modo analogo si trovano le costanti relative alle altre radici, utilizzando $z_2, \ldots, z_k$ al posto di z_1.

Consideriamo il caso in cui z_1 (oppure $z_2, \ldots, z_k$) è una radice semplice. In questo caso nella riduzione compare un solo termine relativo a z_1, cioè $\frac{A_1}{z-z_1}$, dove, per quanto appena visto, $A_1 = \frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$. Se deriviamo la relazione $Q(z) = (z-z_1)Q_1(z)$ otteniamo $Q'(z) = Q_1(z) + (z-z_1)Q_1'(z)$, da cui $Q'(z_1) = Q_1(z_1)$ e quindi

$$A_1 = \frac{P(z_1)}{Q(z_1)} \tag{5}$$

che è più comoda della precedente perché non richiede di calcolare Q_1 (che dipende da z_1). Si può notare anche che z_1 è semplice se e solo se $Q(z_1) \neq 0$, per cui la formula sopra vale sempre quando ha senso il denominatore.

Esempio 1.5. *Consideriamo la funzione razionale*

$$\frac{x^2}{(1-x^2)^2}$$

Il denominatore ha due radici 1 *e* -1 *entrambe doppie. Possiamo impostare la riduzone in fratti semplici*

$$\frac{x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

Per la formula (4)

$$A = \frac{d}{dx}\left.\frac{x^2}{(x+1)^2}\right|_{x=1} = \left.\frac{2x}{(x+1)^3}\right|_{x=1} = \frac{1}{4} \quad , \quad B = \left.\frac{x^2}{(x+1)^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{4}$$

(in questo caso $Q_1(x) = (x+1)^2$*)*

$$C = \frac{d}{dx}\left.\frac{x^2}{(x-1)^2}\right|_{x=-1} = \left.\frac{-2x}{(x-1)^3}\right|_{x=-1} = \frac{1}{4} \quad , \quad D = \left.\frac{x^2}{(x-1)^2}\right|_{x=-1} = -\frac{1}{4}$$

(in questo caso $Q_1(x) = (x-1)^2$*)*

Esempio 1.6. *Consideriamo la funzione razionale*

$$\frac{x^2}{(1+x^4)}$$

Come nell'esempio (1.4) *il denominatore ha come zeri le quattro radici quarte di* -1*, nessuna delle quali reale, che indichiamo con* z_1*,* z_2*,* z_3 *e* z_4*. Per mostrare l'uso dell'ultimo metodo facciamo la riduzione in fratti semplici* nei complessi*:*

$$\frac{z^2}{1+z^4} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2} + \frac{C}{z-z_3} + \frac{D}{z-z_4} = (*)$$

Dato che tutte le radici sono semplici possiamo applicare la formula (5)*: in questo caso* $\frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{z^2}{4z^3} = \frac{1}{4z}$ *e quindi*

$$A = \frac{1}{3z_1} = \frac{\overline{z_1}}{4|z_1|^2} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

e analogamente $C = -\dfrac{1+i}{4\sqrt{2}}$ *mentre* $B = \overline{A}$ *e* $D = \overline{C}$ *(ricordiamo che* $z_2 = \overline{z_1}$ *e* $z_4 = \overline{z_3}$*) . A questo punto possiamo tornare ai reali, se prendiamo* z *in* $\mathbb{R}$ *e per maggior espressività lo ribattezziamo* x*, si ha*

$$\begin{aligned}
(*) =& \frac{A(x-\overline{z_1}) + \overline{A}(x-z_1)}{(x-z_1)(x-\overline{z_1})} + \frac{C(x-\overline{z_3}) + \overline{C}(x-z_3)}{(x-z_3)(x-\overline{z_3})} = \\
& \frac{2\Re e(A(x-\overline{z_1}))}{x^2 - 2\Re e(z_1)x + |z_1|^2} + \frac{2\Re e(C(x-\overline{z_3}))}{x^2 - 2\Re e(z_3)x + |z_3|^2} = \\
& \frac{\Re e\left(\frac{1-i}{2\sqrt{2}}(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}})\right)}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{\Re e\left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}}(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})\right)}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \\
& \frac{\Re e\left(\frac{(1-i)(\sqrt{2}x-1+i)}{4}\right)}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{\Re e\left(\frac{(1+i)(\sqrt{2}x+1+i)}{4}\right)}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \\
& \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right)
\end{aligned}$$

A questo punto non è difficile fare l'integrale che diventa:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx =& \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x - 1) + \\
& -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x + 1) + c = \\
& \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln\left(\sqrt{\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}}\right) - \arctan(x^2)\right) + c
\end{aligned}$$

(per l'ultimo passaggio bisogna usare le opportune identità trigonometriche).

2 Integrali riconducibili a funzioni razionali

1. Se $F(r)$ è una funzione razionale in r allora l'integrale indefinito

$$\int F(e^{ax})\,dx \qquad\qquad (a \neq 0)$$

si può affrontare mediante la sostituzione $y = e^{ax}$ che porta a

$$\int \frac{F(y)}{ay}\,dy.$$

2. Se $F(r)$ è una funzione razionale in r allora l'integrale indefinito
$$\int F(\tan(x))\,dx$$
si può affrontare mediante la sostituzione $y = \tan(x)$ che porta a
$$\int \frac{F(y)}{1+y2}\,dy.$$
3. Se $F(r,s)$ è una funzione razionale in r, s allora l'integrale indefinito
$$\int F(\sin(x),\cos(x))\,dx$$
si può affrontare mediante la sostituzione $y = \tan(x/2)$ che porta a
$$\int F\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}\,dy.$$
4. Se $F(r,s)$ è una funzione razionale in r, s allora l'integrale indefinito
$$\int F\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad\qquad (ad-cb \neq 0)$$
si può affrontare mediante la sostituzione $y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ che porta a una funzione razionale in y.
5. Se $F(r,s)$ è una funzione razionale in r, s allora l'integrale indefinito
$$\int F\left(x, \sqrt{x^2+ax+b}\right)dx$$
si può affrontare mediante la sostituzione $y = \sqrt{x^2+ax+b} - x$; tale sostituzione porta a una funzione razionale in y.
Nel caso in cui il polinomio di secodo grado x^2+ax+b abbia due radici reali distinte x_1, x_2, si può anche procedere scrivendo
$$F(x, \sqrt{x^2+ax+b}) = F\left(x, (x-x_2)\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}\right) = F_1\left(x, \sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}\right)$$
dove F_1 è razionale, ricadendo quindi nel caso (4).
Un'altra possibilità è di scrivere
$$x^2+ax+b = (x+a/2)^2+b-a^2/4 = \begin{cases} |\Delta|((\alpha x+\beta)^2+1) & \text{se } \Delta := b-a^2/4 > 0 \\ |\Delta|((\alpha x+\beta)^2-1) & \text{se } \Delta := b-a^2/4 < 0 \end{cases}$$

per opportuni α e β (è chiaro che nel caso $\Delta = 0$ la radice scompare e l'integrale è più semplice). Con una sostituzione lineare $y = \alpha x + b$ si arriva agli integrali

$$\int F_1(y, \sqrt{y^2+1})\, dy \qquad / \qquad \int F_1(y, \sqrt{y^2-1})\, dy$$

($F_1(y,r) := \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{y-\beta}{\alpha}, \sqrt{|\Delta|r}\right)$) e da qui si può provare la sostituzione $y = \sinh(t)/y = \cosh(t)$, che porta a

$$\int F_1(\sinh(t), \cosh(t)) \cosh(t)\, dt \qquad , \qquad \int F_1(\cosh(t), \sinh(t)) \sinh(t)\, dt$$

che è del tipo (1). È chiaro che dipende dai casi la scelta del metodo più semplice da usare.

6. Se $F(r,s)$ è una funzione razionale in r, s e consideriamo l'integrale indefinito
$$\int F\left(x, \sqrt{-x^2+ax+b}\right)\, dx$$
dobbiamo innanzitutto notare che il polinomio $-x^2+ax+b$ deve avere due radici $x_1 < x_2$ (altrimenti sarebbe sempre negativo e non si potrebbe farne la radice) e quindi $-x^2+ax+b = (x-x_1)(x_2-x)$. Ne segue che
$$F\left(x, \sqrt{-x^2+ax+b}\right) = F\left(x, (x_2-x)\sqrt{\frac{x-x_1}{-x+x_2}}\right)$$
che è del tipo (4).
Anche in questo caso, con un cambio di variabile lineare come quello del punto precedente, si potrebbe trasformare l'integrale in
$$\int F_1(y, \sqrt{1-y^2})\, dy$$
per un'opportuna F_1 razionale. Quest'ultimo integrale si può anche affrontare ponendo $x = \sin(t)$ pervenendo a
$$\int F_1(\sin(t), \cos(t)) \cos(t)\, dt$$
che è del tipo (4) (di nuovo dipende dai casi cosa è conveniente fare).