

Corso di MATEMATICA - Ing. Gestionale
A.A. 2004/05
APPUNTI SUI LIMITI

28 ottobre 2004

1 Proprietà *topologiche* di \mathbb{R}^N

Ricordiamo che, se N è un numero intero, \mathbb{R}^N è lo spazio N -dimensionale i cui punti si possono rappresentare come N -uple di numeri reali: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$. Nei casi $N = 1/2/3$ \mathbb{R}^N costituisce un modello per la retta/il piano/lo spazio; è buona norma allora cercare di visualizzare le definizioni e i teoremi riguardanti \mathbb{R}^N nel caso $N = 2$, “trasportandoli” nel piano.

Se $N > 1$ useremo nel seguito la convenzione di indicare in grassetto (per es. \mathbf{x}) i punti di \mathbb{R}^N e in carattere normale le sua coordinate x_1, \dots, x_n .

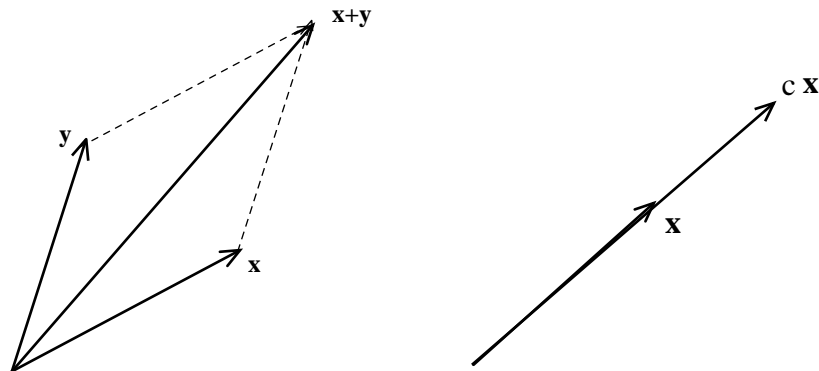
Dati \mathbf{x} e \mathbf{y} in \mathbb{R}^N e c in \mathbb{R} si può considerare la somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ definita da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N)$$

e il prodotto $c\mathbf{x}$ definito da

$$c\mathbf{x} = (cx_1, \dots, cx_n)$$

L'esistenza della somma tra punti e del prodotto di un punto per un numero (uno *scalare*) si esprimono dicendo che \mathbb{R}^N è uno *spazio lineare* (sui reali). Dovrebbe essere noto che, se si interpretano i punti \mathbf{x} come vettori applicati in zero, allora la somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è il risultato dell'applicazione successiva di \mathbf{x} e \mathbf{y} o viceversa (regola del parallelogramma) mentre il prodotto di \mathbf{x} per lo scalare c è il vettore \mathbf{x} allungato (o rimpicciolito) di un fattore c (introducendo un cambio di verso se $c < 0$).



Ricordiamo che, se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ la *norma* di \mathbf{x} è il numero positivo

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$$

(che rappresenta la lunghezza del vettore associato a \mathbf{x}) mentre se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ la *distanza* tra \mathbf{x} e \mathbf{y} è data da

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_N - x_N)^2}$$

Ricordiamo anche la *disuguaglianza triangolare*:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$$

che in termini di norma si può esprimere dicendo

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N.$$

Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^N diciamo che A è limitato se esiste una costante M tale che

$$\|\mathbf{x}\| \leq M \quad \text{per tutti punti } \mathbf{x} \text{ di } A$$

Analogamente se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ è una funzione, diciamo che \mathbf{f} è limitata (su A) se costante M tale che

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq M \quad \text{per tutti punti } \mathbf{x} \text{ di } A$$

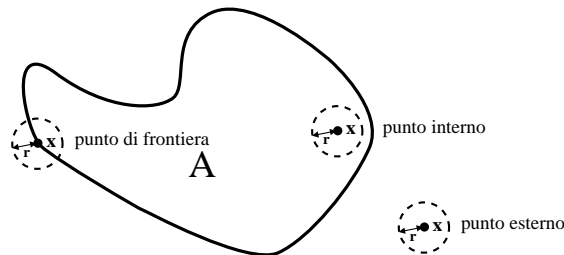
Vogliamo introdurre la nozione di limite per funzioni di più variabili. Per questo premettiamo alcune definizioni.

Se $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ chiamiamo *disco* di centro \mathbf{x}_0 e raggio r l'insieme

$$I(\mathbf{x}_0, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\}$$

Siano ora A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N : $A \subset \mathbb{R}^N$ e \mathbf{x}_0 un punto di \mathbb{R}^N : $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$. Diciamo che:

- \mathbf{x}_0 è interno ad A se esiste $r > 0$ tale che $I(\mathbf{x}_0, r) \subset A$;
- \mathbf{x}_0 è esterno ad A se esiste $r > 0$ tale che $I(\mathbf{x}_0, r) \cap A = \emptyset$;
- \mathbf{x}_0 è di frontiera per A se non è né interno né esterno ad A



Non è difficile vedere che le tre definizioni sopra si escludono mutualmente e viceversa ogni punto di \mathbb{R}^N ricade in una delle tre. Quindi, dato A , \mathbb{R}^N si spezza in tre insiemi disgiunti:

- la *parte interna* di A , denotata con $\text{int}(A)$, cioè l'insieme di tutti i punti interni ad A ;
- la *frontiera* di A , denotata con ∂A , cioè l'insieme di tutti i punti di frontiera per A ;
- la *parte esterna* di A , cioè l'insieme dei punti esterni ad A che risulta essere peraltro (come si vede facilmente) la parte interna del complementare di A , $\text{int}(\mathcal{C}A)$.

Notiamo che:

- \mathbf{x}_0 è di frontiera per A se e solo se ogni disco $I(\mathbf{x}_0, r)$ contiene almeno un punto di A (eventualmente lo stesso \mathbf{x}_0) e almeno un punto di $\mathcal{C}A$;
- dire che \mathbf{x}_0 è interno ad A non è lo stesso (è di più) che dire $\mathbf{x}_0 \in A$.

Diciamo infine che

- A è aperto se tutti i suoi punti sono interni; questo è equivalente a dire che $A = \text{int}(A)$ o anche che A non contiene nessun punto di frontiera: $A \cap \partial A = \emptyset$;
- A è chiuso se A contiene tutta la sua frontiera: $\partial A \subset A$.

Si vede facilmente che nel caso di un intervallo I in \mathbb{R} ($N = 1$) i punti di frontiera di I sono gli estremi di I , quindi gli intervalli aperti $]a, b[$ sono effettivamente insiemi aperti mentre gli intervalli chiusi $[a, b]$ sono effettivamente insiemi chiusi.

Notiamo che ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi. Per esempio, in \mathbb{R} , si può prendere $A =]0, 1]$ (intervallo “semiaperto”); in \mathbb{R}^N è chiaro che la situazione può essere assai più complicata.

Esempio 1.1. Consideriamo in \mathbb{R}^2 l'insieme $A := I(0, 1) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < 1\}$. Allora

- A è aperto;
- $\partial A = S := \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ (la sfera unitaria);
- S è chiuso.

Vediamo come si verificano le affermazioni sopra.

• Prendiamo un qualunque punto \mathbf{x} in A ; deve essere $r := \|\mathbf{x}\| < 1$. Allora se prendiamo $\epsilon = (1 - r)/2$ risulta $r + \epsilon < 1$. Sia \mathbf{y} tale che $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \epsilon$, per le proprietà della distanza si ha

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = r + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r + \epsilon < 1$$

Questo dimostra che tutto il disco $I(\mathbf{x}, \epsilon)$ è contenuto in A e cioè \mathbf{x} è interno ad A . Dato che \mathbf{x} è un generico punto di A se ne deduce che A è aperto.

• Sia ora \mathbf{x} un punto di S , cioè $\|\mathbf{x}\| = 1$, e sia $\epsilon > 0$. Prendiamo $\mathbf{y} := (1 - \epsilon/2)\mathbf{x}$: allora \mathbf{y} è in A (ci siamo avvicinati a zero) ma

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|(1 - \epsilon/2 - 1)\mathbf{x}\| = (\epsilon/2)\|\mathbf{x}\| = \epsilon/2 < \epsilon$$

Abbiamo quindi trovato un punto \mathbf{y} dentro A che dista da \mathbf{x} meno di ϵ . D'altra parte troviamo anche un punto fuori di A che dista da \mathbf{x} meno di ϵ (possiamo prendere lo stesso \mathbf{x}) e quindi ogni $I(\mathbf{x}, \epsilon)$ contiene (almeno) un punto di A e (almeno) un punto di $\mathcal{C}A$; quindi \mathbf{x} è di frontiera. In questo modo si vede che $S \subset \partial A$.

• Prendiamo infine \mathbf{x} con $r := \|\mathbf{x}\| > 1$. Imitando i discorsi del primo punto si vede facilmente che, scegliendo $\epsilon := (1 - r)/2$ tutto il disco $I(\mathbf{x}, \epsilon)$ è fatto di punti fuori di A . Quindi i punti che distano più di 1 da zero sono esterni ad A .

Tutto questo implica che la frontiera di A è fatta esattamente dai punti che distano 1 da zero, cioè $\partial A = S$. Con gli stessi argomenti si vede anche che $\partial S = S$ (che è automaticamente contenuto in S) e quindi S è chiuso. Per

la verità si potrebbe dimostrare che la frontiera di un qualunque insieme è sempre un chiuso.

Prendiamo ora

$$A_1 := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1, -\sqrt{1-x_1^2} < x_2 \leq \sqrt{1-x_1^2} \right\}$$

Si vede che $\text{int}(A_1) = A$, $\partial A_1 = S$ ma A_1 non coincide con A e non contiene tutto S (A_1 è “intermedio” tra A e $A \cup S$), dunque A_1 non è né aperto né chiuso.

Introduciamo ancora alcune definizioni.

- Dato A sottoinsieme di \mathbb{R}^N chiamiamo *chiusura di A* l'insieme

$$\bar{A} := A \cup \partial A;$$

è chiaro che un insieme è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura.

- Siano infine $A \subset \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$. Diciamo che \mathbf{x}_0 è *di accumulazione* per A se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un punto \mathbf{y} tale che

$$\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0 \quad , \quad \mathbf{y} \in A \quad , \quad \mathbf{y} \in I(\mathbf{x}, \epsilon)$$

In altre parole \mathbf{x} è di accumulazione per A se e solo se si possono trovare punti di A *diversi da \mathbf{x}* , vicini quanto si vuole a \mathbf{x} .

2 Limiti di funzioni di più variabili

Consideriamo un sottoinsieme A di \mathbb{R}^N e una funzione $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$.

Supponiamo inoltre che \mathbf{x}_0 in \mathbb{R}^N sia un punto di accumulazione per A .

Definizione 2.1 (di limite). *Un punto \mathbf{l} di \mathbb{R}^M si dice limite di \mathbf{f} per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}_0 , e si scrive*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\rho > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in A, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_N < \rho \implies \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|_M < \epsilon$$

(si sono usati gli indici N ed M per indicare le norme relative a \mathbb{R}^N e \mathbb{R}^M). Spesso, quando il punti \mathbf{x}_0 è chiaro dal contesto useremo la scrittura più concisa $\mathbf{f}(x) \rightarrow \mathbf{l}$.

Conveniamo nel seguito di dire che una proprietà $p(\mathbf{x})$ è vera per \mathbf{x} vicino a \mathbf{x}_0 se esiste $\rho > 0$ tale che $p(\mathbf{x})$ vale per tutte le \mathbf{x} in $I(\mathbf{x}_0, \rho)$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. La definizione di limite esprime il fatto che, dato un qualunque $\epsilon > 0$ la distanza tra $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e \mathbf{l} è minore di ϵ per \mathbf{x} vicino a \mathbf{x}_0 .

Osservazione 2.2. *La definizione di limite è fatta in modo da non tenere conto in nessun modo del (eventuale) valore di f in x_0 . Non si richiede nemmeno che f sia definita in x_0 ma anche se lo fosse $f(x_0)$ non avrebbe alcuna influenza. Se \mathbf{f} ha limite in x_0 si può definire $\mathbf{f}(x_0)$ ad arbitrio e il limite non cambia.*

Si può anche notare che il limite dipende solo dalle x vicine a x_0 : se due funzioni \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 sono tali che $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$ per \mathbf{x} vicino a \mathbf{x}_0 allora $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l} \Leftrightarrow \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$. Questa proprietà si esprime solitamente dicendo che il limite è un concetto locale.

Elenchiamo ora le principali proprietà del limite. Nel seguito \mathbf{x}_0 sarà sempre un punto di accumulazione per A .

Proposizione 2.3 (unicità). *Se il limite esiste, allora è unico.*

In altre parole se, per \mathbf{x} tendente a \mathbf{x}_0 , si ha $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$, deve essere $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2$.

Proposizione 2.4. *Supponiamo che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Allora*

- *se B è un aperto di \mathbb{R}^M e se $\mathbf{l} \in B$ si ha $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B$ per \mathbf{x} vicino a \mathbf{x}_0 ;*
- *Se B è un chiuso di \mathbb{R}^M e se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B$ per \mathbf{x} vicino a \mathbf{x}_0 , allora $\mathbf{l} \in B$.*

Proposizione 2.5. *Se \mathbf{f} ha limite per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}_0 allora $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ è limitata vicino a \mathbf{x}_0 .*

Proposizione 2.6 (linearità). *Se per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ si ha $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$, e se c_1, c_2 sono numeri reali, allora*

$$c_1\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + c_2\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow c_1\mathbf{l}_1 + c_2\mathbf{l}_2$$

Proposizione 2.7 (prodotto). *Siano $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Allora*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1, g(\mathbf{x}) \rightarrow l_2 \Rightarrow g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow l_2\mathbf{l}_1$$

Proposizione 2.8. *Siano $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se una delle due, tra f e g , tende a zero e l'altra è limitata allora il prodotto $\mathbf{f}g$ tende a zero.*

Proposizione 2.9 (reciproco). *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Allora*

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow l \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow \frac{1}{l}$$

Proposizione 2.10 (composizione/cambio di variabile nei limiti).
 Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^M$, $\mathbf{f} : A \rightarrow B$, $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^P$. Sia \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per A , \mathbf{y}_0 un punto di accumulazione per B . Supponiamo che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 \quad , \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{l}$$

per \mathbf{l} in \mathbb{R}^P . Supponiamo ancora che

$$(1) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}_0 \quad \text{se } \mathbf{x} \in A \cap I(\mathbf{x}_0, \rho), \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \text{ per un } \rho > 0.$$

Allora risulta

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{l}.$$

Osservazione 2.11. Il motivo per cui è necessaria l'ipotesi (1) risiede nella definizione di limite e precisamente nel fatto che il limite non dipende dal valore $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ (vedi l'osservazione (2.2)). Questo implica che \mathbf{g} potrebbe avere in \mathbf{y}_0 un valore qualunque $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) \neq \mathbf{l}$. Ma allora prendendo $\mathbf{f}(x) = \mathbf{y}_0$ (costante) si avrebbe $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$ per ogni \mathbf{x} da cui $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) \neq \mathbf{l}$. È d'altra parte chiaro che se $\mathbf{y}_0 \notin B$, allora l'ipotesi (1) è verificata.

Notiamo ora che dire $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ significa che per ogni \mathbf{x} di A è definito $\mathbf{f}(x)$ in \mathbb{R}^M . Ma allora $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ è una m -pla di numeri (y_1, \dots, y_M) . Possiamo allora definire $f_1(\mathbf{x}) := y_1, \dots, f_M(\mathbf{x}) := y_M$; in questo modo abbiamo definito M funzioni reali $f_1 : A \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_M : A \rightarrow \mathbb{R}$ che vengono dette *le componenti* di \mathbf{f} :

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_N) = (f_1(x_1, \dots, x_N), \dots, f_M(x_1, \dots, x_N))$$

Proposizione 2.12. Se $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_M)$ si ha (per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l} \Leftrightarrow f_1(\mathbf{x}) \rightarrow l_1, \dots, f_M(\mathbf{x}) \rightarrow l_M$$

L'ultima proposizione dice che calcolare il limite di una funzione vettoriale è come calcolare gli M limiti delle sue componenti. Quindi *in arrivo* si potrebbe sempre considerare di avere una sola variabile ($f : A \rightarrow \mathbb{R}$); ben diverso è il ruolo delle variabili *in partenza*.

Nei casi in cui c'è una sola variabile, in partenza o in arrivo, si possono dare le definizioni di limiti infiniti.

Definizione 2.13 (limiti infiniti).

- Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathbf{x}_0 è di accumulazione per A diciamo che il limite di $f(\mathbf{x})$ per \mathbf{x} tendente a \mathbf{x}_0 è più infinito (meno infinito), e scriveremo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad (-\infty)$$

(o più brevemente $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty / -\infty$) se per ogni M in \mathbb{R} esiste $\rho > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in A, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \rho \Rightarrow f(\mathbf{x}) > M \quad (< M).$$

- Se $A \subset \mathbb{R}$, e A non è superiormente (inferiormente) limitato e se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, allora diremo che il limite di $\mathbf{f}(x)$ per x tendente a $+\infty$ ($-\infty$) è \mathbf{l} ($\in \mathbb{R}^M$) se per ogni $\epsilon > 0$ esiste c in \mathbb{R} tale che

$$x \in A, x > c \quad (x < c) \Rightarrow \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{l}\| < \epsilon$$

In questo caso scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty / -\infty} \mathbf{f}(x) = \mathbf{l}$$

- Se $A \subset \mathbb{R}$ e A non è superiormente (inferiormente) limitato e se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, allora possiamo combinare le due definizioni sopra e dire che f tende a $+\infty / -\infty$ per x tendente a $+\infty$ ($-\infty$) se per ogni M in \mathbb{R} esiste c in \mathbb{R} tale che

$$x \in A, x > c \quad (x < c) \Rightarrow f(x) > M / f(x) < M$$

- Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ e se A non è limitato, possiamo dire che il limite di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per $\|\mathbf{x}\|$ tendente all'infinito è \mathbf{l} ($\in \mathbb{R}^M$) se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in A, \|\mathbf{x}\| \geq R \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\| < \epsilon$$

In questo caso scriviamo

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$

- Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}$ e se A non è limitato, possiamo dire che il limite di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per $\|\mathbf{x}\|$ tendente all'infinito è più infinito (meno infinito) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $R > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in A, \|\mathbf{x}\| \geq R \Rightarrow f(\mathbf{x}) > M \quad (f(\mathbf{x}) < M)$$

In questo caso scriviamo

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad (-\infty)$$

- Useremo anche la locuzione **f** tende all'infinito per **x** che tende a $\mathbf{x}_0 / +\infty / -\infty / \infty$ e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{x}_0 / -\infty / +\infty / \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \infty$$

(o sinteticamente $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$) se

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{x}_0 / -\infty / +\infty / \infty} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = +\infty$$

In tutto quanto segue (ovunque nel corso) conveniamo di dire che

- **f** ha limite per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$ per un qualche \mathbf{l} finito o infinito;
- **f** è convergente per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$ per un qualche \mathbf{l} in \mathbb{R}^M ;
- **f** è divergente per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$;
- **f** è divergente positivamente per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, se $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$;
- **f** è divergente negativamente per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, se $f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$;

Per sintetizzare le notazioni introduciamo l'insieme $\bar{\mathbb{R}}$ (dei reali estesi) definito da $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Rimarchiamo che $-\infty$ e $+\infty$ sono solo due simboli e non dei numeri: non ha senso considerare somme o prodotti coinvolgenti gli infiniti. È invece utile introdurre l'ordine su $\bar{\mathbb{R}}$ convenendo che $-\infty < x < +\infty$ per ogni x reale.

Sempre per uniformare le definizioni, converremo di dire che $+\infty$ ($-\infty$) è di accumulazione per un sottoinsieme A di \mathbb{R} , se A è superiormente (inferiormente) illimitato. Analogamente ∞ è di accumulazione per A (in \mathbb{R}^N se A è illimitato). Diremo anche che una proprietà $p(x)$ è vera per x vicino a $+\infty$ ($-\infty$) se esiste un numero M tale che $p(x)$ è vera per le $x > M$ per le ($x > M$).

Proposizione 2.14 (algebra dei limiti infiniti). *Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ (scalari!) e sia \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per A (può essere anche $\mathbf{x}_0 = +\infty / -\infty / \infty$). Supponiamo che (per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$)*

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow l_1, \quad g(\mathbf{x}) \rightarrow l_2 \quad \text{dove } l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Allora

1. se $l_1 = +\infty$ e $l_2 > -\infty$, $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$;
2. se $l_1 = -\infty$ e $l_2 < +\infty$, $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$;

3. se $l_1 = +\infty$ e $l_2 > 0$, $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$;
4. se $l_1 = -\infty$ e $l_2 > 0$, $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$;
5. se $l_1 = +\infty$ e $l_2 < 0$, $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$;
6. se $l_1 = -\infty$ e $l_2 < 0$, $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$.
7. se $f(\mathbf{x}) \neq 0$ per \mathbf{x} vicino a \mathbf{x}_0 e $l_1 = 0$, allora $\frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow \infty$ (cioè $\frac{1}{|f(\mathbf{x})|} \rightarrow +\infty$);
8. se $l_1 = \infty$ (cioè se $|f(\mathbf{x})| \rightarrow +\infty$), allora $f(\mathbf{x}) \neq 0$ per \mathbf{x} vicino a \mathbf{x}_0 e $\frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow 0$.

Attenzione Tutto ciò che non è esplicitamente detto è (a priori) generalmente falso. Quindi se si incontra un limite in una forma che non è tra quelle indicate sopra non c'è un metodo *generale* per farlo. Ciò **non vuol dire** che il limite non si possa fare, ma solo che bisogna studiare la situazione caso per caso. I limiti che non rientrano nella casistica sopra sono quelli in cui si voglia calcolare il limite di $f(x) + g(x)$ quando $f(x) \rightarrow +\infty$ e $g(x) \rightarrow -\infty$, o viceversa (forma indeterminata $+\infty - \infty$), o il limite di $f(x)g(x)$ quando $f(x) \rightarrow \infty$ e $g(x) \rightarrow 0$, o viceversa (forma indeterminata $\infty \cdot 0$) oppure il limite di $f(x)/g(x)$ quando $f(x) \rightarrow \infty$ e $g(x) \rightarrow \infty$, o $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$ (forme indeterminate ∞/∞ e $0/0$). Anche in questo caso le espressioni $+\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, ∞/∞ e $0/0$ non hanno senso come numeri, sono solo degli ausili mnemonici per ricordarsi i casi in cui non si possono applicare i teoremi generali.

3 Il caso unidimensionale

Supponiamo ora che $N = M = 1$, caso con cui avremo a che fare più spesso (e che costituisce la base per quasi tutti i risultati più generali). Consideriamo quindi $A \subset \mathbb{R}$, x_0 (eventualmente infinito) di accumulazione per A ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Notiamo che in questo caso la definizione di $f(x) \rightarrow l$, per l finito diventa:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Oltre alle proprietà generali dei limiti viste nel paragrafo precedente abbiamo qualche altro risultato, legato sostanzialmente al fatto che i numeri reali

sono un insieme ordinato (c'è il \geq). In tutto quanto scritto nel seguito sottintendiamo che tutti i limiti sono fatti per $x \rightarrow x_0$.

Proposizione 3.1. *Se $f(x) \rightarrow l$ per l in $\bar{\mathbb{R}}$ e se $f(x) \geq 0$ per x vicino a x_0 , allora $l \geq 0$.*

Proposizione 3.2 (permanenza del segno). *Se $f(x) \rightarrow l$ per l in $\bar{\mathbb{R}}$ e se $l > 0$, allora $f(x) > 0$ per x vicino a x_0 .*

Notiamo che i due fatti precedenti dipendono dalla (2.4) dato che $]0, +\infty[$ è aperto in \mathbb{R} e $[0, +\infty[$ è chiuso (!!!) in \mathbb{R} .

Notiamo anche che, per differenza, si ha (**monotonia del limite**)

$$f(x) \rightarrow l_1, g(x) \rightarrow l_2, f(x) \geq g(x) \Rightarrow l_1 \geq l_2$$

Proposizione 3.3 (i due carabinieri). *Se $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per x vicino a x_0 e se $f(x) \rightarrow l$, $g(x) \rightarrow l$ per un medesimo l in \mathbb{R} , allora anche $g(x) \rightarrow l$.*

Se $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$) per x vicino a x_0 e se $f(x) \rightarrow +\infty$ ($f(x) \rightarrow -\infty$), allora anche $g(x) \rightarrow +\infty$ ($g(x) \rightarrow -\infty$) (nel caso di l infinito basta un carabiniere solo!).

Definizione 3.4 (limiti destro e sinistro). *Diciamo che x_0 è di accumulazione da destra (da sinistra) per A se esiste $\delta > 0$ tale che in ogni intervallo $]x_0, x_0 + \delta[$ ($]x_0 - \delta, x_0[$) si trova almeno un punto di A . Notiamo che x_0 è di accumulazione se e solo se x_0 è di accumulazione da destra o x_0 è di accumulazione da sinistra.*

Se x_0 è di accumulazione da destra per A e l è reale, diciamo che l è il limite per x che tende a x_0 da destra (da sinistra), oppure che l è il limite destro (sinistro) di f , e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \right),$$

se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } x \in A, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$(\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } x \in A, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

Teorema 3.5. *Supponiamo che x_0 sia contemporaneamente di accumulazione da destra e da sinistra e sia l in $\bar{\mathbb{R}}$. Allora:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \end{cases}$$

Teorema 3.6 (limite di funzioni monotone). *Supponiamo che I sia un intervallo e che $a = \inf I$, $b = \sup I$ (a e b possono essere, separatamente, finiti o infiniti e possono appartenere o non appartenere a I). Supponiamo che $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione crescente (decrecente).*

Allora per ogni x_0 con $a \leq x_0 < b$ esiste il limite destro di f in x_0 e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in I, x > x_0} f(x) \quad \left(= \sup_{x \in I, x > x_0} f(x) \right)$$

Analogamente per ogni x_0 con $a < x_0 \leq b$ esiste il limite sinistro di f in x_0 e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in I, x < x_0} f(x) \quad \left(= \inf_{x \in I, x < x_0} f(x) \right)$$

Osservazione 3.7. *Se $a < x_0 < b$ allora*

$$-\infty < \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) < +\infty$$

come risulta immediatamente dall'enunciato precedente.

4 Successioni

Definizione 4.1. *Chiamiamo successione in \mathbb{R}^M (o successione di punti di \mathbb{R}^M) una qualunque funzione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^M$. Per motivi storici si indicano con a_n (invece che con $a(n)$) i valori di a (detti anche i punti della successione) e la successione stessa si indica con uno dei simboli seguenti: (a_n) , $\{a_n\}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (noi useremo la notazione meno diffusa, con le parentesi tonde, per non confonderci con gli insiemi).*

Per la verità si considerano spesso delle successioni che non sono definite per tutti gli interi n ma solo da un certo punto in poi. Si tratta quindi di funzioni $a : \{n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n}\}$, per \bar{n} opportuno. Chiameremo anche queste successioni e, ove serve, useremo la notazione $(a_n)_{n \geq \bar{n}}$.

Se poi B è un sottoinsieme di \mathbb{R}^M diremo che (a_n) è una successione in B o una successione di punti di B , se $a_n \in B \forall n$.

Nel caso delle successioni si usa dire che una proprietà $p(n)$ (definita sugli interi) vale definitivamente se $p(n)$ vale per n intero vicino a $+\infty$, cioè se esiste \bar{n} intero tale che $p(n)$ vale per ogni $n \geq \bar{n}$.

Notiamo che le successioni sono particolari funzioni di cui si può provare a fare il limite solo per $n \rightarrow +\infty$ visto che $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per \mathbb{N} .

Proposizione 4.2 (limiti di funzioni e limiti di successioni). 1. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, \mathbf{x}_0 in \mathbb{R}^N . Allora sono equivalenti i due fatti che seguono:

- (a) x_0 è di accumulazione per A .
- (b) esiste una successione (x_n) in $A \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \rightarrow x_0$.

2. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per A e \mathbf{l} in \mathbb{R}^M . Allora sono equivalenti i due fatti che seguono.

- (a) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$;
- (b) per ogni successione (\mathbf{x}_n) di punti di $A \setminus \{x_0\}$ tale che $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$, si ha che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{l}$.

Vale per le successioni monotone un risultato analogo a quello riguardante le funzioni monotone. In questo caso, dato che l'unico punto di accumulazione è $+\infty$ (e che in questo caso il limite è un limite sinistro), la situazione è più semplice.

Proposizione 4.3. Sia (a_n) una successione crescente (decrescente) di numeri reali. Allora esiste il limite di (a_n) per n tendente a $+\infty$ e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_n a_n \quad \left(= \inf_n a_n \right)$$

Tale limite può essere finito o $+\infty$ (o $-\infty$).

La seguente proposizione risulterà spesso utile. Si può interpretarla dicendo che, se f è monotona e se si considera solo il limite destro (o sinistro) allora nella 2 sopra basta prendere una sola successione "destra" ("sinistra") invece che tutte le possibili successioni

Proposizione 4.4. Sia I un intervallo e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona. Sia x_0 un punto di accumulazione da destra (da sinistra) per I . Come già visto (teorema (3.6)) esiste il limite destro (sinistro) di f per $x \rightarrow x_0^+$ ($x \rightarrow x_0^-$), che possiamo indicare con l^+ (l^-).

Allora se (x_n) è una qualunque successione di punti di I tale che $x_0 < x_n$ ($x_n < x_0$) e $x_n \rightarrow x_0$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l^+(l^-)$$

Definizione 4.5. Sia data una successione $(a_n)_{n \geq n_0}$. Chiameremo estratta da (a_n) (o sottosuccessione di (a_n)) una successione $(b_n)_{n \geq n_1}$ ottenuta da $b_n := a_{k_n}$ dove $(k_n)_{n \geq n_1}$ è una successione strettamente crescente di numeri interi.

Teorema 4.6 (limiti delle sottosuccessioni). *Siano (a_n) una successione e $(b_n)_{n \geq n_1}$ una sua estratta. Sia $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Allora da $a_n \rightarrow l$ segue $b_n \rightarrow l$.*

Si può notare che il teorema sopra è conseguenza del teorema di cambio di variabile nel limite.

È abbastanza facile far vedere che dalla conoscenza di una sottosuccessione non si può in generale ricavare nulla sull'esistenza del limite per la successione di partenza - anzi di solito si riesce a trovare che una successione *non ha limite* provando che ammette due sottosuccessioni che tendono a limiti diversi.

Il seguente enunciato permette di ricavare il limite di una successione a partire da quello di due sottosuccessioni "complementari" (un tipico esempio della situazione descritta sotto è quello in cui si trova il limite di (a_n) a partire dal limite di (a_{2n}) e di (a_{2n+1})).

Proposizione 4.7. *Sia (a_n) una successione e siano (k'_n) e (k''_n) due successioni di interi strettamente crescenti tali che $\mathbb{N} = \{k'_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{k''_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sia $l \in \bar{\mathbb{R}}$ e supponiamo di sapere che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k'_n} = l, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k''_n} = l$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

5 Esempi e integrazioni

Nel seguito utilizzeremo la convenzione per cui se la variabile rispetto a cui si fa il limite è indicata con n , allora tale variabile è intera (quindi si sta considerando una successione). Le variabili indicate con x saranno invece reali.

Esempio 5.1. Qualunque sia il punto x_0 nei reali

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Lo si dimostra applicando la definizione.

Conseguenza 5.2. Dato $k \geq 1$ intero si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{se } k \text{ è pari} \\ \infty & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Esempio 5.3. Si consideri (a_n) definita da

$$a_n := (-1)^n$$

(a_n) vale 1 se n è pari, vale -1 se n è dispari. Allora (a_n) non ha limite. Questo si può vedere notando che l'estratta ottenuta selezionando i soli indici pari ($k_n = 2n$) vale costantemente 1 e quindi tende a 1. Per lo stesso motivo l'estratta ottenuta selezionando i soli indici dispari ($k_n = 2n+1$) vale costantemente -1 e quindi tende a -1 . Ma se (a_n) avesse un limite l , ogni estratta convergerebbe a l e questo non avviene.

Esempio 5.4. Sia P un polinomio di grado $k \geq 1$, cioè

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0 = \sum_{i=0}^k a_i x^i$$

dove $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ e $a_k \neq 0$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_k > 0 \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

Infatti si può scrivere

$$P(x) = a_k x^k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k x} + \dots + \frac{a_0}{a_k x^k} \right)$$

e il termine tra parentesi tonde tende a 1. Dai teoremi sui limiti si deduce il risultato. Notiamo che in sostanza si è mostrato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_k x^k$$

(facendo in qualche senso vedere che i termini di grado minore di k non influiscono sul limite). In maniera analoga si vede che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_k x^k$$

e quest'ultimo è $+\infty / -\infty$ a seconda del segno di a_k e del fatto che k sia pari o dispari.

Esempio 5.5. Siano P, Q due polinomi di grado $k, h \geq 1$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i \quad , \quad Q(x) = \sum_{i=0}^h b_i x^i$$

dove $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}, b_0, \dots, b_h \in \mathbb{R}, a_k \neq 0$ e $b_h \neq 0$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > h \text{ e } \frac{a_k}{b_h} > 0 \\ -\infty & \text{se } k > h \text{ e } \frac{a_k}{b_h} < 0 \\ \frac{a_k}{b_h} & \text{se } k = h \\ 0 & \text{se } k < h \end{cases}$$

Infatti si può scrivere

$$\frac{P(nx)}{Q(x)} = \frac{a_k}{b_h} x^{k-h} \left(\frac{1 + \frac{a_{k-1}}{a_k x} + \dots + \frac{a_0}{a_k x^k}}{1 + \frac{b_{h-1}}{b_h x} + \dots + \frac{b_0}{b_h x^h}} \right)$$

e di nuovo il termine tra parentesi tonde tende a 1. Analogamente si vede che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_k}{b_h} x^{k-h}$$

Proposizione 5.6. Sia $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Se $x_0 \geq 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{x_0}$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $x_0 > 0$. Dato che la funzione $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ è crescente su $[0, +\infty[$ essa ammette limiti destro e sinistro in x_0 che possiamo

indicare con l^+ ed l^- . È chiaro che $l^- \leq \sqrt[k]{x_0} \leq l^+$. Supponiamo per assurdo che $\sqrt[k]{x_0} < l^+$. Allora, per le proprietà di limite della potenza k -esima:

$$x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} x = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (\sqrt[k]{x})^k = \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} \sqrt[k]{x} \right)^k = (l^+)^k > (\sqrt[k]{x_0})^k = x_0$$

che è assurdo: dunque deve essere $\sqrt[k]{x_0} = l^+$. Analogamente si dimostra che $\sqrt[k]{x_0} = l^-$ e si trattano i casi $x_0 < 0$ e $x_0 = 0$. \square

Vediamo ora un po' di limiti di successioni che costituiranno una importante base di partenza per lo studio successivo

Esempio 5.7. Se $A > 1$ allora $A^n \rightarrow +\infty$.

Infatti si ha:

$$A^n = (1 + (A - 1))^n \geq 1 + n(A - 1) \rightarrow +\infty$$

Esempio 5.8. Se $0 < A < 1$ allora $A^n \rightarrow 0$. Infatti $A^n = \frac{1}{(1/A)^n}$ e $1/A > 1$.

Conseguenza 5.9. Se $A > 1$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} A^x = 0$$

Se $0 < A < 1$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} A^x = +\infty$$

Dimostrazione. Basta usare i due esempi precedenti e la proposizione (4.4), prendendo $x_n = n$ oppure $x_n = -n$. \square

Esempio 5.10. Sia $A > 0$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{A} = 1$$

Segue dalla definizione di limite: dato $\epsilon > 0$ dobbiamo verificare che definitivamente

$$|\sqrt[n]{A} - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \epsilon < \sqrt[n]{A} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow (1 - \epsilon)^n < A < (1 + \epsilon)^n$$

Prendiamo per esempio $A > 1$, allora $(1 - \epsilon)^n < A$ per ogni n ; invece $A < (1 + \epsilon)^n$ è vera definitivamente perchè $(1 + \epsilon)^n \rightarrow \infty$.

Conseguenza 5.11. Se (a_n) è una successione limitata e lontana da zero, cioè se esistono due costanti M, δ tali che

$$0 < \delta \leq a_n \leq M \quad \forall n$$

(si noti $\delta > 0$), allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

Infatti $\sqrt[n]{\delta} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{M}$ e $\sqrt[n]{\delta} \rightarrow 1$, $\sqrt[n]{M} \rightarrow 1$ di modo che si può applicare il teorema dei due carabinieri.

Proposizione 5.12. Sia $A > 0$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} A^x = A^{x_0}$$

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che la funzione esponenziale $x \mapsto A^x$ è monotona (crescente se $A > 1$, decrescente se $0 < A < 1$, costante se $A = 1$). Cominciamo dal caso $x_0 = 0$. Dato che $A^{1/n} = \sqrt[n]{A} \rightarrow 1$ e che $1/n > 0$ si deduce dalla proposizione (4.4) che $\lim_{x \rightarrow 0^+} A^x = 1$. Dato che $A^{-1/n} = 1/\sqrt[n]{A} \rightarrow 1$ e che $-1/n < 0$ si deduce dalla stessa proposizione che $\lim_{x \rightarrow 0^-} A^x = 1$. Dunque il caso $x_0 = 0$ è dimostrato.

Sia ora x_0 in \mathbb{R} . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (A^x - A^{x_0}) = \lim_{x \rightarrow x_0} A^{x_0} (A^{x-x_0} - 1) = A^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} (A^y - 1) = 0$$

da cui la tesi. □

Proposizione 5.13. Sia $A > 0, A \neq 1$. Se $x_0 > 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_A(x) = \log_A(x_0)$$

Dimostrazione. Si fa come nel caso della radice k -esima. Supponiamo per fissare le idee $A > 1$ in modo che $x \mapsto \log_A(x)$ sia crescente. Allora in ogni $x_0 > 0$ esistono

$$l^+ := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \log_A(x) \leq \log_A(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \log_A(x) =: l^+$$

Se fosse $l^+ > \log_A(x_0)$ si avrebbe, a causa delle proprietà appena dimostrate per l'esponenziale:

$$x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} x = \lim_{x \rightarrow x_0^+} A^{\log_A(x)} = A^{\lim_{x \rightarrow x_0^+} \log_A(x)} = A^{l^+} > A^{\log_A(x_0)} = x_0$$

che è assurdo. In modo analogo si dimostra che $l^- = \log_A(x_0)$. □

Proposizione 5.14. *Sia $A > 1$. Allora*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_A(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_A(x) = +\infty$$

Se invece $0 < A < 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_A(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_A(x) = -\infty$$

Dimostrazione. Caso $A > 1$. Dato che $x \mapsto \log_A(x)$ è crescente, deve esistere $l := \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_A(x)$ e tale limite può essere finito o $+\infty$. Se l fosse finito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} A^{\log_A(x)} = A^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_A(x)} = A^l$$

che è assurdo, visto che $x \rightarrow +\infty$. In modo analogo si dimostrano gli altri limiti. \square

Proposizione 5.15. *Sia (a_n) una successione tale che $a_n > 0$ e*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \delta \quad \forall n \geq \bar{n}$$

dove δ è un numero positivo ed \bar{n} è un opportuno intero. Allora

$$a_n \geq \delta^n \frac{a_{\bar{n}}}{\delta^{\bar{n}}} \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Analogamente se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \delta \quad \forall n \geq \bar{n}$$

si ricava

$$a_n \leq \delta^n \frac{a_{\bar{n}}}{\delta^{\bar{n}}} \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Dimostrazione. Preso $n \geq \bar{n}$, iterando la prima disuguaglianza, si ha:

$$a_n \geq \delta a_{n-1} \geq \delta^2 a_{n-2} \geq \dots \geq \delta^k a_{n-k} \geq \dots \geq \delta^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

Per la seconda si ragiona nello stesso modo. \square

Conseguenza 5.16. *Sia (a_n) una successione tale che $a_n > 0$ e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \delta$$

per un $\delta \geq 0$ (eventualmente $+\infty$). Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta < 1 \\ +\infty & \text{se } \delta > 1 \end{cases}$$

(non si può affermare nulla se $\delta = 1$).

Dimostrazione. **Caso** $\delta > 1$ In questo caso possiamo prendere un δ' con $1 < \delta' < \delta$. Per le proprietà del limite si ha, per un opportuno \bar{n}

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \delta' \quad \forall n \geq \bar{n}$$

da cui, per $n \geq \bar{n}$,

$$a_n \geq \frac{a_{\bar{n}}}{(\delta')^{\bar{n}}} (\delta')^n \rightarrow +\infty$$

e quindi $a_n \rightarrow +\infty$.

Caso $\delta < 1$ In questo caso possiamo prendere un δ' con $\delta < \delta' < 1$. Per le proprietà del limite si ha, per un opportuno \bar{n}

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \delta' \quad \forall n \geq \bar{n}$$

da cui, per $n \geq \bar{n}$,

$$0 \leq a_n \leq \frac{a_{\bar{n}}}{(\delta')^{\bar{n}}} (\delta')^n \rightarrow 0$$

e quindi $a_n \rightarrow 0$. □

Osservazione 5.17. Nella situazione descritta sopra prendiamo ad esempio il caso $\delta > 1$. Dalla dimostrazione si vede che, non solo $a_n \rightarrow +\infty$, ma $a_n \rightarrow +\infty$ “più velocemente” di $(\delta')^n$ per ogni $\delta' < \delta$.

Esempio 5.18. Siano $A > 1$ e k intero. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A^n}{n^k} = +\infty.$$

Se invece $0 \leq A < 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n n^k = 0.$$

Infatti, se poniamo $a_n = \frac{A^n}{n^k}$, si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)^k} \frac{n^k}{A^n} = A \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \rightarrow A$$

e quindi, se $A > 1$ $a_n \rightarrow +\infty$. Per quanto riguarda il secondo limite basta osservare che $A^n n^k = \frac{1}{\frac{(1/A)^n}{n^k}}$.

Conseguenza 5.19. Se $A > 1$ e $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

Se $0 < A < 1$ e $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha A^x = 0.$$

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto che per ogni numero reale x si chiama *parte intera* di x l'unico intero n tale che $n \leq x < n + 1$; la parte intera di x si indica con $[x]$ (quindi $[1.5] = 1$, mentre $[-1, 5] = -2$). Quindi per definizione $[x] \leq x < [x] + 1$.

Dimostriamo il primo limite. Innanzitutto scegliamo $k := [\alpha] + 1$. Dato x reale si ha:

$$\frac{A^x}{x^\alpha} \geq \frac{A^{[x]}}{([x] + 1)^\alpha} \geq \frac{A^{[x]}}{([x] + 1)^k}$$

è facile vedere che $n_x := [x]$ è una funzione da \mathbb{R}^N in \mathbb{N} tale che $n_x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Per il teorema di composizione e per i limiti di successioni trovati sopra si deduce che $\frac{A^{[x]}}{([x] + 1)^k} \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Per il teorema dei due carabinieri (nella versione con il carabiniere superiore eguale a $+\infty$) si ha la tesi.

Per quanto riguarda il secondo limite si ragiona come nel caso della successione. \square

Esempio 5.20. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Verifichiamo la definizione di limite: dato $\epsilon > 0$ deve essere vero definitivamente che

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \epsilon < \sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow (1 - \epsilon)^n < n < (1 + \epsilon)^n$$

La disuguaglianza $(1 - \epsilon)^n < n$ è vera non appena $n \geq 1$. La disuguaglianza $n < (1 + \epsilon)^n$ equivale a $1 < \frac{(1 + \epsilon)^n}{n}$ che è definitivamente vera in quanto $\frac{(1 + \epsilon)^n}{n} \rightarrow +\infty$.

Conseguenza 5.21. Per qualunque intero k

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n})^k = 1$$

Esempio 5.22. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty.$$

Per questo basta osservare che $n! \geq n \rightarrow +\infty$.

Esempio 5.23. Sia $A \geq 0$; allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{A^n} = +\infty.$$

Infatti posto $a_n := \frac{n!}{A^n}$ si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! A^n}{A^{n+1} n!} = \frac{n+1}{A} \rightarrow +\infty$$

Proposizione 5.24. Consideriamo le due successioni definite da

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Allora, per ogni n ,

$$2 \leq a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \leq 4$$

Dimostrazione. Mostriamo che $(a_n)_{n \geq 1}$ è crescente. Sia $n \geq 2$, allora

$$\begin{aligned} a_n > a_{n-1} &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

e l'ultima disuguaglianza segue da $(1+a)^n > 1+na$, se $a = -1/n^2$. Verifichiamo che $(b_n)_{n \geq 1}$ è decrescente. Sia $n \geq 2$, allora

$$\begin{aligned} b_n < b_{n-1} &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{n+1}{n}\right) < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \end{aligned}$$

ma l'ultima disuguaglianza è vera perché

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}.$$

In particolare per ogni n risulta $a_n \geq a_1 = 2$ e $b_n \leq b_1 = 4$. Infine dato che $b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ è chiaro che $a_n < b_n$. \square

Conseguenza 5.25. Siano $(a_n)_{n \geq 1}$ e $(b_n)_{n \geq 1}$ le due successioni definite sopra. Esiste un numero reale, che chiameremo e (costante di Neper) tale che $a_n \rightarrow e$ e $b_n \rightarrow e$; anzi $a_n < e < b_n$ per ogni n .

Infatti essendo monotone e limitate entrambe le due successioni ammettono un limite finito: $a_n \rightarrow l_1 (= \sup a_n)$ e $b_n \rightarrow l_2 (= \inf a_n)$. Dato che $b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ e che $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$ si ricava che $l_1 = l_2$.

Da quanto trovato sopra si vede che $2 < e < 4$; si può peraltro vedere che $e < 3$ (prendendo $n = 5$ si trova $b_5 = (6/5)^6 < 3$). Una approssimazione di e è 2.718281828.

Definizione 5.26. Il numero e viene preso come base standard per la funzione esponenziale. Chiameremo d'ora in poi funzione esponenziale la funzione definita da $\exp(x) := e^x$. Chiameremo logaritmo naturale la funzione inversa dell'esponenziale: $\ln(x) := \log_e(x)$. È semplice vedere che se $A > 0$, $A \neq 1$:

$$A^x = \exp(x \ln(A)) = e^{x \ln(A)} \quad , \quad \log_A(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(A)}$$

Esempio 5.27. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

Infatti posto $a_n := \frac{n^n}{n!}$ si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$$

Proposizione 5.28. Sia (a_n) una successione tale che $a_n > 0$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \delta$$

per un $\delta \geq 0$ (eventualmente $+\infty$). Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \delta.$$

Dimostrazione. Facciamo il caso $\delta \in \mathbb{R}$. Sia $\epsilon > 0$, allora per la definizione di limite esiste \bar{n} tale che per $n \geq \bar{n}$

$$\delta - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \delta + \epsilon$$

Allora, se $n \geq \bar{n}$, iterando le disuguaglianze sopra, si ottiene:

$$(\delta - \epsilon)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}} < a_n < (\delta + \epsilon)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

e quindi, estraendo la radice n -esima

$$(\delta - \epsilon) \sqrt[n]{\frac{a_n}{(\delta - \epsilon)^n}} < \sqrt[n]{a_n} < (\delta + \epsilon) \sqrt[n]{\frac{a_n}{(\delta + \epsilon)^n}}$$

Da $(\delta - \epsilon) \sqrt[n]{\frac{a_n}{(\delta - \epsilon)^n}} \rightarrow \delta - \epsilon$ segue che definitivamente $(\delta - \epsilon) \sqrt[n]{\frac{a_n}{(\delta - \epsilon)^n}} < \delta - 2\epsilon$; per motivi analoghi definitivamente $(\delta + \epsilon) \sqrt[n]{\frac{a_n}{(\delta + \epsilon)^n}} < \delta + 2\epsilon$ e quindi definitivamente

$$\delta - 2\epsilon < \sqrt[n]{a_n} < \delta + 2\epsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ϵ questo equivale a dire che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \delta$.

La dimostrazione nel caso $\delta = +\infty$ si fa in modo simile. \square

Esempio 5.29. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Infatti, se $a_n := n!$, allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow +\infty$

Esempio 5.30. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

Infatti, se $a_n := \frac{n!}{n^n}$, allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Proposizione 5.31. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Dimostrazione. Sia x reale. Allora

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Se poniamo $n(x) := [x]$ si ha che $n(x) \in \mathbb{N}$ e $n(x) \rightarrow +\infty$, perché $n(x) \geq x - 1 \rightarrow \infty$ (e lo stesso vale per $n(x) + 1$). Quindi, usando il teorema di cambio di variabile nei limiti e il fatto che $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)+1}}{\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}} \rightarrow \frac{e}{1} = e$$

e analogamente

$$\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1 + \frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

Utilizzando il teorema dei due carabinieri si deduce la tesi. \square

Proposizione 5.32. *Si ha*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{-x} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

Applicando il cambio di variabile e la proposizione precedente si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{-x} = e$$

\square

Conseguenza 5.33. *Mettendo insieme i due risultati precedenti si ottiene che:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Proposizione 5.34. *Si ha:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

Dimostrazione. Dalla 5.31, con il cambio di variabile $y = 1/x$ si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e.$$

Dalla 5.32, con lo stesso cambio di variabile si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x} = e$$

e dunque vale la tesi. \square

Conseguenza 5.35. Siano (a_n) e (b_n) due successioni con $a_n \rightarrow 0$ (ma definitivamente diversa da 0) e $a_n b_n \rightarrow l$, per un qualche l in \mathbb{R} (se $l \neq 0$ questo implica che $b_n \rightarrow +\infty$). Allora

$$(1 + a_n)^{b_n} \rightarrow \begin{cases} e^l & \text{se } l \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } l = +\infty \\ 0 & \text{se } l = -\infty \end{cases}$$

Infatti:

$$(1 + a_n)^{b_n} = ((1 + a_n)^{1/a_n})^{a_n b_n}$$

Esempio 5.36. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$$

Proposizione 5.37. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dimostrazione. Dato che $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$, applicando il logaritmo si deduce la prima equaglianza.

La seconda si ricava dalla prima e dal teorema di cambio di variabile:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(e^x)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{\ln(y)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

□

Proposizione 5.38. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(\alpha \ln(1+x)) - 1}{x} = \\ \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(\alpha \ln(1+x)) - 1}{\alpha \ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \\ \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\exp(y) - 1}{y} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \alpha \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.39. Date due funzioni f e g con $f(x) > 0$ per ogni x in cui f è definita, possiamo sempre scrivere

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

e quindi per calcolare il limite di f^g basta calcolare il limite di $g \ln(f)$ e poi prenderne l'esponenziale. Con questo sistema ci si riconduce sempre a trattare dei prodotti invece che delle forme esponenziali.

In questo modo si deduce per esempio che, se $f(x) \rightarrow l_1$ e $g(x) \rightarrow l_2$, allora

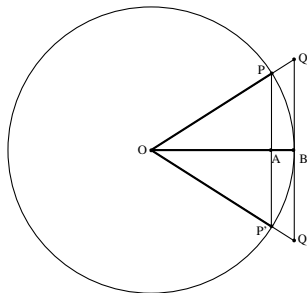
$$f(x)^{g(x)} \rightarrow \begin{cases} l_1^{l_2} & \text{se } 0 < l_1 < +\infty, l_2 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } l_1 > 1, l_2 = +\infty / 0 \leq l_1 < 1, l_2 = -\infty / l_1 = 0, l_2 > 0 \\ 0 & \text{se } l_1 > 1, l_2 = -\infty / 0 \leq l_1 < 1, l_2 = +\infty / l_1 = 0, l_2 < 0 \end{cases}$$

Rimangono esclusi i casi in cui $l_1 = 0 / +\infty, l_2 = 0$ e $l_1 = 1, l_2 = +\infty / -\infty$ (che portano a forme indeterminate del tipo $0 \cdot \infty$). Non è peraltro necessario ricordare tutta la casistica delle forme esponenziali, purché ci si ricordi come ricavarla usando il sistema sopra indicato.

Consideriamo ora limiti coinvolgenti le funzioni trigonometriche. Dato che sarebbe complicato dare una definizione puramente analitica delle funzioni trigonometriche (dato il numero x definire chi sono $\sin(x)/\cos(x)$ senza ricorrere a idee geometriche) diamo per note tali funzioni e supponiamo di conoscerne le proprietà elementari (per esempio l'identità trigonometrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ e le formule di somma). Supponiamo anche di sapere che

$$(2) \quad \sin(x) \leq x \leq \tan(x) \quad \text{se } x \text{ è un angolo positivo}$$

Queste disuguaglianze hanno un significato geometrico ben preciso. Quella di destra stabilisce infatti che (vedi la figura) l'arco di circonferenza \widehat{BP} è più lungo del segmento \overline{AP} (si vede meglio dicendo che l'arco $\widehat{PP'}$ è più lungo del segmento $\overline{PP'}$ e poi dividendo per 2); la seconda dice invece che l'area del triangolo \widehat{OBQ} è più grande di quella del settore di cerchio \widehat{OBP} (perché il settore è contenuto nel triangolo).



Proposizione 5.40. Sia x_0 in \mathbb{R} . Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$$

Dimostrazione. Cominciamo dal caso $x_0 = 0$. Se $x > 0$ dalla (2) si deduce $0 \leq \sin(x) \leq x$ da cui $\sin(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$, per il teorema dei due carabinieri. Dato che \sin è una funzione dispari si ricava anche $\sin(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^-$ e dunque la tesi. Per quanto riguarda il coseno osserviamo che se x è vicino a zero $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$.

Consideriamo ora un x_0 qualunque in \mathbb{R} . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sin(x_0) \cos(h) + \sin(h) \cos(x_0)) = \sin(x_0)$$

(per il risultato in zero) e analogamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\cos(x_0) \cos(h) - \sin(h) \sin(x_0)) = \cos(x_0).$$

□

Proposizione 5.41. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Dimostrazione. Dalla (2) si deduce

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \quad \forall x \neq 0$$

(per le x negative si osserva che $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$). Per il teorema dei due carabinieri si ha la tesi. □

Proposizione 5.42. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{1 + \cos(x)} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{1}{1 + \cos(x)} = 1^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

□

XXXX QUALCHE LIMITE IN PIU' VARIABILI ???

6 Sostituzione di infinitesimi e infiniti

Definizione 6.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 di accumulazione per A ($x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$). Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni.

Diciamo che f è un infinitesimo di ordine superiore a g se $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$, $g(x) \neq 0$ per x vicino a x_0 e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Diciamo che f è un infinito di ordine superiore a g se $f(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow x_0$, $g(x) \neq 0$ per x vicino a x_0 e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Non abbiamo richiesto che la funzione g sia infinitesima (infinita) in x_0 ; questo permette di usare il seguente utile artificio: $f(x) \rightarrow 0$ ($f(x) \rightarrow \infty$) se e solo se $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore alla funzione costante $g(x) = 1$ (se e solo se $f(x)$ è un infinito di ordine superiore alla funzione costante $g(x) = 1$).

In tutto questo paragrafo A è fissato in \mathbb{R} e x_0 è un punto di accumulazione per A . Sottintendiamo d'ora in poi (se non detto altrimenti) che tutti i limiti considerati siano fatti per $x \rightarrow x_0$.

Teorema 6.2 (principio di sostituzione degli infinitesimi). Siano $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ quattro funzioni. Supponiamo che g_1 sia un infinitesimo di ordine superiore a f_1 e che g_2 sia un infinitesimo di ordine superiore a f_2 . Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

nel senso che uno dei due limiti scritti sopra esiste se e solo se esiste l'altro e in tal caso sono eguali.

Teorema 6.3 (principio di sostituzione degli infiniti). Siano $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ quattro funzioni. Supponiamo che f_1 sia un infinito di ordine superiore a g_1 e che f_2 sia un infinito di ordine superiore a g_2 . Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

nel senso che uno dei due limiti scritti sopra esiste se e solo se esiste l'altro e in tal caso sono eguali.

I teoremi sopra dicono che *si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore o gli infiniti di ordine inferiore*.

Nel seguito consideriamo solo gli infinitesimi; il caso degli infiniti si può ricostruire con ragionamenti analoghi.

Introduciamo ora alcune notazioni e definizioni che semplificano il trattamento degli infinitesimi. Ricordiamo che tutto ciò che segue dipende dal punto x_0 rispetto a cui si fa il limite e che, come abbiamo detto prima, verrà spesso sottinteso.

Definizione 6.4. *Siano f, g due funzioni. Diciamo che f e g sono asintotiche se $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ per x vicino a x_0 e se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

È immediato verificare che

$$f \approx g \Leftrightarrow g \approx f$$

In tal caso scriviamo $f(x) \approx g(x)$.

Diremo, a volte, che f e g hanno lo stesso ordine se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ per un qualche l finito e diverso da zero.

Definizione 6.5. *Sia g una funzione tale che $g(x) \neq 0$ per x vicino a x_0 . Indichiamo con $o(g)$ (o piccolo di (g)) l'insieme di tutte le funzioni di ordine superiore a g , cioè*

$$o(g) := \left\{ f : \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \right\}$$

Indichiamo con $O(g)$ (o grande di (g)) l'insieme

$$O(g) := \left\{ f : \frac{f(x)}{g(x)} \text{ è limitata vicino a } x_0 \right\}$$

In questo modo per indicare che una funzione f è di ordine superiore a g si può scrivere $f \in o(g)$; in realtà si utilizza di solito la scrittura più agile (anche se impropria):

$$f = o(g)$$

che si legge “ f è un o piccolo di g ”.

Analogamente la scrittura

$$f = O(g),$$

che si legge “ f è un o grande di g ”, significa $f \in O(g)$, cioè $\frac{f(x)}{g(x)}$ è limitata per x vicino a x_0 .

Notiamo che nelle scritture ora introdotte il segno $=$ è usato impropriamente (infatti sta per \in). Per esempio si scrive $f = o(g)$, ma non si può scrivere $o(g) = f$; oppure da $f_1 = o(g)$ e $f_2 = o(b_n)$ NON si può dedurre $f_1 = f_2$.

Osservazione 6.6. Nel seguito useremo le seguenti notazioni:

$$f + o(g) := \{f + f_1 : f_1 \in o(g)\} \quad fo(g) := \{ff_1 : f_1 \in o(g)\}$$

e $f + O(g)$, $fO(g)$ che si definiscono in modo analogo. Similmente:

$$\begin{aligned} o(g_1) + o(g_2) &:= \{f_1 + f_2 : f_1 \in o(g_1), f_2 \in o(g_2)\} \\ o(g_1)o(g_2) &:= \{f_1f_2 : f_1 \in o(g_1), f_2 \in o(g_2)\} \end{aligned}$$

e in maniera analoga si definiscono gli insiemi $o(g_1) + O(g_2)$, $O(g_1) + O(g_2)$, $o(g_1)O(g_2)$, $O(g_1)O(g_2)$. Infine

$$o(f + o(g)) = \{f + f_1 : \exists g_1 \in o(g) : f_1 = o(g_1)\}$$

e in modo analogo si definiscono $o(f + O(g))$, $O(f + o(g))$ e $O(f + O(g))$ (in particolare, se $f = 0$, risultano definiti $o(o(g))$, $o(O(g))$, $O(o(g))$ e $O(O(g))$).

Elenchiamo ora vari collegamenti tra le nozioni sopra introdotte. Le dimostrazioni sono elementari (basta applicare le definizioni).

Proposizione 6.7. Siano f e g due funzioni diverse da zero per x vicino a x_0 . Allora

- $f \approx g \Rightarrow f$ e g hanno lo stesso ordine $\Rightarrow f = O(g)$;
- $f \approx g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow f = g(1 + o(1))$;

Proposizione 6.8. Siano f , g , f_1 , g_1 , f_2 e g_2 funzioni con g , g_1 e g_2 diverse da zero per x vicino a x_0 . Allora

- se $f = O(g)$, allora $f = o(g)$;
- se $f_1 = o(g)$ e $f_2 = o(g)$ allora $f_1 + f_2 = o(g)$;
- se $f_1 = o(g)$ e $f_2 = O(g)$ allora $f_1 + f_2 = O(g)$;
- se $f_1 = O(g)$ e $f_2 = O(g)$ allora $f_1 + f_2 = O(g)$;
- se $f_1 = o(g_1)$ e $f_2 = o(g_2)$ allora $f_1f_2 = o(g_1g_2)$;
- se $f_1 = O(g_1)$ e $f_2 = o(g_2)$ allora $f_1f_2 = o(g_1g_2)$;

- se $f_1 = O(g_1)$ e $f_2 = O(g_2)$ allora $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$;
- se $f = o(g_1)$ e $g_1 = o(g)$ allora $f = o(g)$;
- se $f = o(g_1)$ e $g_1 = O(g)$ allora $f = o(g)$;
- se $f = O(g_1)$ e $g_1 = o(g)$ allora $f = o(g)$;
- se $f = O(g_1)$ e $g_1 = O(g)$ allora $f = O(g)$;

Osservazione 6.9. *Solitamente la proposizione sopra si schematizza come segue (di nuovo gli = sono usati in maniera impropria; stavolta andrebbero scritti dei simboli di inclusione \subset).*

- $o(g) = O(g)$;
- $o(g) + o(g) = o(g)$;
- $o(g) + O(g) = O(g)$;
- $O(g) + O(g) = O(g)$;
- $o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2)$;
- $o(g_1)O(g_2) = o(g_1 g_2)$;
- $O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2)$;
- $o(o(g)) = o(g)$;
- $o(O(g)) = o(g)$;
- $O(o(g)) = o(g)$;
- $O(O(g)) = O(g)$.

In particolare si ha un fatto che risulta frequentemente utile:

$$o(g + o(g)) = o(O(g)) = o(g).$$

Usando le notazioni introdotte si posson riscrivere limiti notevoli incontrati finora come segue.

Proposizione 6.10. *Consideriamo $x_0 = 0$. Si ha:*

- $\exp(x) = 1 + x + o(x)$;
- $\ln(1 + x) = x + o(x)$;

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ (dove $\alpha \in \mathbb{R}$);
- $\sin(x) = x + o(x)$;
- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Dimostrazione. Dimostriamo, per esempio, che vale l'ultima delle relazioni scritte.

Sappiamo che (per $x \rightarrow 0$) $\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$. Questo significa

$$1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \Leftrightarrow \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

(nell'ultima riga si sono usati: $o\left(\frac{x^2}{2}\right) = o(x^2)$, perché $\frac{x^2}{2} = O(x^2)$, e $-o(x^2) = o(x^2)$). \square

Osservazione 6.11. *Le definizioni e le proprietà introdotte sopra NON DICONO nulla di più di quanto non si sapesse già sui limiti. Sono però comode (sperabilmente), in quanto permettono di scrivere delle equaglianze corrette prima di passare al limite. Per esempio se $f(x) - g(x) \rightarrow 0$ È SBAGLIATO (e porta a degli errori) scrivere $f(x) = g(x)$ oppure, come si vede spesso fare, sostituire $f(x)$ con $g(x)$. È invece corretto, al posto di $f(x)$, scrivere $g(x) + o(1)$ (e poi si vede alla fine se questo serve).*

Esempio 6.12. *Consideriamo la funzione f definita da*

$$f(x) := \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2}$$

rispetto al punto $x_0 = +\infty$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \right) = x \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) + o\left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) \right) = \\ &= x \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{3}{x^2} + o\left(\frac{3}{x^2}\right)\right) \right) = x \left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{3}{x^2}\right) \right) = \\ &= x \left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x \left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Quindi $a_n = n + 1/n + o(1/n)$. Questo implica per esempio che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2} - x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2} - x^2 &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2} - x^3 &= +\infty \end{aligned}$$

Esempio 6.13. Sia $x \neq 0$. Allora (relativamente al punto $x_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} &= \frac{(\sqrt{1+x} - 1 - x/2)(\sqrt{1+x} + 1 + x/2)}{\sqrt{1+x} + 1 + x/2} = \\ \frac{(1+x - (1-x/2)^2)}{\sqrt{1+x} + 1 + x/2} &= \frac{(1+x - (1-x+x^2/4))}{\sqrt{1+x} + 1 + x/2} = \\ \frac{-x^2/4}{\sqrt{1+x} + 1 + x/2} &= \frac{-1}{4\sqrt{1+x} + 4 + 2x} x^2 = \left(-\frac{1}{8} + o(1)\right) x^2 = -\frac{x^2}{8} + o(x^2) \end{aligned}$$

(si è usato il fatto che, siccome $\frac{1}{4\sqrt{1+x} + 4 + 2x} \rightarrow \frac{1}{8}$ allora si può scrivere

$$\frac{-1}{4\sqrt{1+x} + 4 + 2x} = \left(-\frac{1}{8} + o(1)\right). \text{ Quindi}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

che è un'informazione PIÙ fine rispetto a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$.