

Complementi di Matematica
Ing. Energetica-Elettrica-Sicurezza
Versione A.A. 2007-08

Claudio Saccon

24 dicembre 2007

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Funzioni, successioni, limiti

In tutto quanto segue \mathbb{R} indica l'insieme dei numeri reali, \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali, cioè gli interi da zero in avanti, e \mathbb{Z} l'insieme dei numeri interi relativi.

Ricordiamo che la scrittura $f : A \rightarrow B$ indica che f è una *funzione* definita sull'insieme A a valori nell'insieme B (*f va da/ manda A in B*). Per ogni a in A è definito univocamente un b in B : si scrive allora $f(a) = b$; si dice che a è la *variabile* che si mette ad *argomento* di f e che $b = f(a)$ è il *valore* che f assume in a .

Per esempio si può introdurre la funzione $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dicendo che $q(x) = x^2$. Notiamo che sarebbe stato lo stesso scrivere $q(a) = a^2$, l'importante è chiarire quale sia la regola che fa passare dall'argomento al valore, in questo caso l'elevazione al quadrato. Quindi nella definizione $q(x) = x^2$ la lettera x è una “variabile muta”.

Da questa impostazione segue che la funzione si chiama f (q nell'esempio) mentre la scrittura $f(x)$ indica il valore che f assume in x (che deve essere noto quando lo si scrive). Nella pratica tale regola è spesso infranta e si scrive $f(x)$ per indicare la funzione (è più veloce dire “la funzione x^2 ” rispetto a “la funzione $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $q(x) = x^2$ per ogni x ”), bisogna però essere consapevoli che si tratta di un piccolo abuso e tenere presente che parlando di una funzione si pensa al “complesso di tutti i suoi valori” (più precisamente alla regola che dato x “produce” $f(x)$). Questo sarà particolarmente vero nel seguito del corso in cui le funzioni saranno viste come oggetti singoli, su cui per esempio calcolare altre funzioni. Un modo utile di pensare a una funzione è attraverso il suo *grafico*, cioè all'insieme $\{(a, b) : a \in A, b \in B, b = f(a)\}$.

Si chiama *successione* una funzione che prende i suoi argomenti tra i numeri interi. Quindi una successione in B (o anche una successione di punti di B) è una f con $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ - o più in generale $f : \{n_0, n_0 + 1, \dots\} \rightarrow B$. Tradizionalmente nel caso delle successioni si scrive f_n al posto di $f(n)$ e invece di f si scrive (f_n) (o $(f_n)_{n \geq n_0}$ quando serve indicare anche il punto iniziale in cui è definita la successione). Per esempio $(n^2)_{n \geq 0}$ è una successione, che differisce dalla funzione q di prima in quanto è definita solo per argomenti interi. Un altro esempio è $\left(\frac{1}{n-2}\right)_{n \geq 3}$ che è definita da 3 in poi.

Di solito le successioni si indicano con le prime lettere dell'alfabeto $((a_n), (b_n), (c_n), \dots)$ e spesso si assume implicitamente che n (o m) indichino delle variabili intere.

In tutta l'Analisi Matematica è fondamentale la nozione di **limite**. Rinviamo ai testi del primo anno la definizione di limite per funzioni reali di una variabile reale (che comprende anche quella per le successioni di numeri reali) e tutte le relative proprietà. che diamo quindi per note (ricorderemo invece, fra un momento, la definizione di limite in più variabili).

Ricordiamo solo che se A è un sottoinsieme di \mathbb{R} , x_0 è un punto di accumulazione per A (potendo anche essere $x_0 = \pm\infty$) e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 (quando esiste) si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Analogamente (ma non ci sarebbe necessità di dirlo) nel caso di una successione $(a_n)_{n \geq n_0}$ si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ($+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$). Per indicare che una funzione ammette un certo limite l per x tendente a x_0 (cioè che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$) scriveremo spesso

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l \quad (f(x) \rightarrow l, \text{ se } x_0 \text{ è chiaro dal contesto})$$

(dove l può essere finito o infinito). Nello stesso modo, nel caso delle successioni scriveremo

$$a_n \rightarrow l$$

(in questo caso n non può tendere che a $+\infty$). Quindi le scritte:

$$\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty, \quad \frac{n}{n+1} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow +\infty,$$

sono sinonimi di

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Vediamo come si estende la nozione di limite al caso di più variabili.

1.1.1 Definizione. Dato N intero si indica con \mathbb{R}^N l'insieme delle N -uple ordinate (x_1, \dots, x_N) .

Si chiama *modulo* del punto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, il numero $|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$. Dati $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ chiameremo *distanza* tra \mathbf{x} e \mathbf{y} l'espressione

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}.$$

Useremo (in questo paragrafo) la convenzione di scrivere i punti di \mathbb{R}^N in grassetto e in carattere normale le coordinate.

1.1.2 Proposizione. Vale la disuguaglianza triangolare:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N.$$

1.1.3 Definizione. Se (\mathbf{a}_n) è una successione di punti di \mathbb{R}^N e se $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ diremo che \mathbf{l} è il limite per n che tende all'infinito di (\mathbf{a}_n) , e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l},$$

se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\mathbf{a}_n - \mathbf{l}| = 0.$$

Diremo anche, in questo caso, che tende a \mathbf{l} e scriveremo spesso $\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{l}$.

Per esempio $\mathbf{a}_n := \left(\frac{n}{n^2 + 1}, \frac{n}{n + 1} \right) \rightarrow (0, 1)$ (per $n \rightarrow +\infty$). Infatti

$$|\mathbf{a}_n - (0, 1)| = \sqrt{\frac{n^2}{(n^2 + 1)^2} + \frac{(-1)^2}{(n + 1)^2}} \rightarrow 0.$$

1.1.4 Definizione. Dato un insieme A contenuto in \mathbb{R}^N e un punto \mathbf{x}_0 di \mathbb{R}^N diremo che \mathbf{x}_0 è di *accumulazione* per A se esiste una successione (\mathbf{x}_n) di punti di A che tende a \mathbf{x}_0 ($\mathbf{x}_n \in A, \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$).

Per esempio il punto $(1, 0)$ è di accumulazione per il cerchio aperto di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1: $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$.

1.1.5 Definizione. Siano N ed M due interi maggiori o eguali a 1. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per A e sia $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ (\mathbf{f} è una funzione di N variabili reali a valori in \mathbb{R}^M). Dato $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$ diremo che \mathbf{l} è il limite di \mathbf{f} per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}_0 , e scriveremo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l},$$

se per qualunque successione (\mathbf{x}_n) di punti di A , tale che $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ succede che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Diremo, anche in questo caso, che $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tende a \mathbf{l} e scriveremo spesso $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{l}$ ($\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}$ se \mathbf{x}_0 è chiaro dal contesto).

Per esempio $\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right) \rightarrow (0, 1)$ se $(x, y) \rightarrow (1, 1)$ (si può verificarlo con un po' di pazienza).

Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ possiamo chiaramente scrivere $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x}))$. In questo modo risultano definite $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ per $j = 1, \dots, M$, che si chiamano le *componenti* di \mathbf{f} .

1.1.6 Proposizione. Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$ con $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_M)$, allora

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l} \iff f_j(\mathbf{x}) \rightarrow l_j \quad j = 1, \dots, M.$$

1.1.7 Definizione (continuità). Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ e sia $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$. Dato un punto \mathbf{x}_0 in A si dice che \mathbf{f} è continua in \mathbf{x}_0 se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

nel caso in cui \mathbf{x}_0 sia punto di accumulazione per A . Nell'altro caso (\mathbf{x}_0 non è di accumulazione per A) la \mathbf{f} si dice continua senza altre condizioni.

Si dice che \mathbf{f} è continua su A se \mathbf{f} è continua in ogni \mathbf{x}_0 di A .

Si può notare che con la definizione sopra una successione è automaticamente continua in tutti i suoi punti (nessun intero è di accumulazione per \mathbb{N}). Nella pratica però i casi interessanti sono quelli in cui i punti di A sono di accumulazione per A e quindi la continuità si esprime mediante il limite.

Non ripetiamo qui le proprietà dei limiti e della continuità in più variabili (accenneremo a qualcosa nel prossimo paragrafo) per le quali rinviamo a un testo opportuno.

Ricordiamo però il Teorema di Weierstrass per funzioni più variabili, con cui faremo dei confronti nel seguito. Premettiamo due definizioni.

1.1.8 Definizione. Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N .

- A si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.
- A si dice *limitato* se esiste una costante M per cui $|\mathbf{x}| \leq M$ per tutti i punti \mathbf{x} di A .

1.1.9 Teorema (Weierstrass). Se A è limitato e chiuso in \mathbb{R}^N e se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f ammette massimo e minimo su A , cioè esistono due punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 in A tali che

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

(\mathbf{x}_1 si dice allora punto di minimo e \mathbf{x}_2 punto di massimo).

Concludiamo questo paragrafo col richiamare una importante proprietà di \mathbb{R}^N , (la *completezza*, come vedremo poi). Ricordiamo la definizione di successione di Cauchy.

1.1.10 Definizione. Sia (\mathbf{a}_n) una successione in \mathbb{R}^N . Si dice che (\mathbf{a}_n) *verifica la proprietà di Cauchy* - o più brevemente che (\mathbf{a}_n) *è di Cauchy* - se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{n} in \mathbb{N} tale che

$$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}$$

(gli elementi di (\mathbf{a}_n) “diventano arbitrariamente vicini tra loro al crescere dell’indice”).

Non è difficile vedere che se (\mathbf{a}_n) ammette limite allora essa verifica la proprietà di Cauchy. Anche il viceversa è vero, ma non è per nulla ovvio.

1.1.11 Teorema. *Sia (\mathbf{a}_n) una successione in \mathbb{R}^N . Allora*

$$(\mathbf{a}_n) \text{ ammette limite} \Leftrightarrow (\mathbf{a}_n) \text{ è di Cauchy.}$$

Il teorema sopra riflette il fatto che \mathbb{R}^N “non ha buchi”: una successione di punti che si avvicinano tra loro non può sparire nel nulla. Questo non sarebbe vero se al posto di \mathbb{R} ci fosse \mathbb{Q} . È facile infatti prendere una successione di numeri razionali che in \mathbb{R} converge a $\sqrt{2}$ - tale successione è di Cauchy in \mathbb{Q} ma non converge a nulla in \mathbb{Q} .

1.2 Richiamo sulle serie numeriche

1.2.1 Definizione. Data una successione di numeri reali $(a_n)_{n \geq n_0}$ chiameremo *somma parziale n -esima* l’espressione

$$S_n := \sum_{k=n_0}^n a_k = a_{n_0} + \cdots + a_n$$

(che risulta definita per $n \geq n_0$). La (nuova) successione $(S_n)_{n \geq n_0}$ si chiama *serie* associata ad $(a_n)_{n \geq n_0}$ o più brevemente *serie degli a_n* .

Si dice che *la serie è convergente* se $(S_n)_{n \geq n_0}$ ammette limite finito S , si dice che *la serie è divergente* se $(S_n)_{n \geq n_0}$ tende a $\pm\infty$ e si dice che *la serie è indeterminata* se $(S_n)_{n \geq n_0}$ non ha limite. Nel primo caso chiamiamo il limite S *somma della serie* e lo indichiamo con

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Molto spesso, con un leggero abuso, l’espressione $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ viene usata per indicare la serie oltre che la sua somma, per cui si usa dire: la “serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ” è *convergente / divergente / indeterminata*.

Diremo che la serie è *assolutamente convergente* se la serie $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

Ricordiamo il comportamento di alcune serie importanti.

1.2.2 Proposizione. *La serie geometrica di ragione A :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

- è convergente per $|A| < 1$ e in tal caso ha come somma $\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{1-A}$;
- è divergente positivamente per $A \geq 1$;
- è indeterminata per $A \leq -1$.

1.2.3 Proposizione. La serie armonica di esponente α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- è convergente se $\alpha > 1$;
- è divergente positivamente se $\alpha \leq 1$.

Ricordiamo i principali risultati sulle serie.

1.2.4 Proposizione. Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$.

1.2.5 Proposizione. Se una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ha tutti termini positivi ($a_n \geq 0$) allora non può essere indeterminata.

Il risultato sopra ci autorizza a considerare **sempre** la somma di una serie a termini positivi a patto di ammettere che possa essere $+\infty$. Potremo quindi scrivere $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < +\infty$ per dire che la serie converge (visto che $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ha senso). Questa scrittura non si può usare se gli a_n cambiano segno.

È chiaro che per quanto sopra basterebbe $a_n \geq 0$ per n grande (da un certo \bar{n} in poi).

1.2.6 Proposizione (criterio del confronto per serie a termini positivi). Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri positivi.

Se $a_n \leq b_n$ per ogni n (per ogni n grande), allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} &\quad \Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge} &\quad \Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ diverge} \end{aligned}$$

1.2.7 Proposizione (criterio del confronto asintotico). Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri positivi.

Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

Allora, se $l \in]0, +\infty[$:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge},$$

se $l = 0$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge},$$

mentre se $l = +\infty$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge.}$$

I due criteri che seguono sono scritti in termine del limite superiore e del limite inferiore di opportune espressioni; in prima istanza si può pensare che esista il limite delle quantità indicate cioè che $\liminf = \limsup$.

1.2.8 Proposizione (criterio della radice). *Sia (a_n) una successione di numeri positivi. Allora*

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge.} \end{aligned}$$

1.2.9 Proposizione (criterio del rapporto). *Sia (a_n) una successione di numeri positivi. Allora*

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge.} \end{aligned}$$

1.2.10 Proposizione (criterio della convergenza assoluta). *Se una serie converge assolutamente essa converge. In altri termini, data una successione (a_n) si ha*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Notiamo che, essendo la successione dei valori assoluti una successione di numeri positivi, possiamo anche scrivere:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Il teorema seguente verrà utilizzato in seguito.

1.2.11 Teorema (prodotto alla Cauchy di due serie). *Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie assolutamente convergenti. Poniamo per ogni n :*

$$c_n := \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ è assolutamente convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

Dimostrazione. Poniamo innanzitutto:

$$s'_n := \sum_{i=1}^n a_i, \quad t'_n := \sum_{i=1}^n |a_i|, \quad s''_n := \sum_{i=1}^n b_i, \quad t''_n := \sum_{i=1}^n |b_i|, \quad s_n := \sum_{i=1}^n c_i;$$

inoltre introduciamo

$$d_n := \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n-k}|, \quad t_n := \sum_{i=1}^n d_i$$

Sappiamo che $s'_n \rightarrow s'$ e $s''_n \rightarrow s''$ in \mathbb{C} per opportuni s' ed s'' in \mathbb{C} , mentre $t'_n \rightarrow t'$ e $t''_n \rightarrow t''$ per due numeri reali positivi t' e t'' .

Facciamo la dimostrazione per passi.

1. Mostriamo che $\sum_n d_n < +\infty$ (notiamo che $d_n \in \mathbb{R}$ e $d_n \geq 0$). Si ha:

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i+j \leq n} |a_i| |b_j| \leq \sum_{i,j \leq n} |a_i| |b_j| = t'_n t''_n \leq t' t''$$

Ne segue che $\sum_n d_n < +\infty$.

2. Dato che

$$|c_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n-k}| = d_n$$

per il criterio del confronto otteniamo che $\sum_n |c_n| < +\infty$, cioè $\sum_n c_n$ è assolutamente convergente (dunque convergente). Quindi esiste un s in \mathbb{C} tale che $s_n \rightarrow s$.

3. Mostriamo che $s = s' s''$. Si ha

$$\begin{aligned} |s'_n s''_n - s_n| &= \left| \sum_{i,j \leq n} a_i b_j - \sum_{i+j \leq n} a_i b_j \right| = \left| \sum_{i,j \leq n, i+j > n} a_i b_j \right| \leq \\ &\sum_{i,j \leq n, i+j > n} |a_i| |b_j| \leq \sum_{n < i+j \leq 2n} |a_i| |b_j| = t_{2n} - t_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} d_k - t_n \end{aligned}$$

Dato che $t_n \rightarrow \sum_k d_k$ si ha che $|s'_n s''_n - s_n| \rightarrow 0$ e dunque $s = s' s''$.

□

Concludiamo con una osservazione molto semplice, che però può essere utile.

1.2.12 Osservazione. Se $a : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione allora ($[x]$ indica la *parte intera* del numero x)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n) = \int_1^{\infty} a([x]) dx$$

1.3 Numeri complessi

Ricordiamo che i numeri complessi sono espressioni del tipo $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. I numeri complessi si possono sommare e moltiplicare tra loro tenendo presente che $(i)^2 = -1$. Si ha cioè:

$$\begin{aligned} (x' + iy') + (x'' + iy'') &= (x' + x'') + i(y' + y''), \\ (x' + iy')(x'' + iy'') &= x'x'' + i(x'y'' + x''y') + (i)^2 y'y'' = \\ &= x'x'' - y'y'' + i(x'y'' + x''y'). \end{aligned}$$

L'insieme dei numeri complessi verrà indicato con \mathbb{C} . Se $z = x + iy$ si scrive

$$x = \Re(z) \text{ (parte reale di } z), \quad y = \Im(z) \text{ (parte immaginaria di } z),$$

(si noti che la parte immaginaria è un numero reale); si definisce il *coniugato* di z , indicato con \bar{z} , ponendo $\bar{z} := x - iy$. In questo modo

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Sempre se $z = x + iy$ si definisce il *modulo* di z , indicato con $|z|$, ponendo $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$. Si vede facilmente che

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Si verifica facilmente che:

$$\overline{z' + z''} = \bar{z}' + \bar{z}'', \quad \overline{z'z''} = \bar{z}'\bar{z}'', \quad |z'z''| = |z'||z''|.$$

Come è ben noto si può stabilire una corrispondenza tra i numeri complessi e il piano cartesiano (cioè tra \mathbb{C} ed \mathbb{R}^2) identificando $x + iy$ con (x, y) . Questa identificazione permette di visualizzare l'operazione di somma tra numeri complessi mediante l'usuale somma di punti (o meglio di vettori) fatta con la regola del parallelogramma. Per capire come funziona il prodotto introduciamo la *forma polare* di un numero complesso. Se $z = x + iy$ allora $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ appartiene alla circonferenza unitaria e quindi esiste unico un angolo θ in $[0, 2\pi[$ tale che

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Diremo che tale θ è l'*argomento principale* di z - in generale diremo che θ in \mathbb{R} è un argomento di z se verifica la formula sopra e cioè se differisce dall'argomento principale per un multiplo intero relativo di 2π . Scriveremo in ogni caso, con un po' di ambiguità, $\theta = \text{Arg}(z)$ (a rigore $\theta \in \text{Arg}(z)$).

Allora se $z', z'' \in \mathbb{C}$, e se $z = z'z''$ si ha

$$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z') + \text{Arg}(z'').$$

(ciò significa che θ è un argomento di z se e solo se $\theta = \theta' + \theta''$ per θ' argomento di z' e θ'' argomento di z'').

In sostanza, mentre il modulo del prodotto è la somma dei moduli, l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti. Queste due proprietà giustificano la definizione di esponenziale complesso.

1.3.1 Definizione. Se $z = x + iy$ si definisce

$$e^z := e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

Si vede facilmente che l'esponenziale complesso coincide con quello tradizionale quando $z \in \mathbb{R}$ (cioè se $y = 0$) e che

$$e^{z'+z''} = e^{z'}e^{z''} \quad \forall z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Con l'introduzione dell'esponenziale complesso si può scrivere

$$z = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \rho = |z|, \theta = \text{Arg}(z).$$

Si può anche notare che $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ e che

$$\cos(\theta) = \Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \Im(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(formule che useremo spesso nel seguito).

Osserviamo infine che la corrispondenza tra \mathbb{C} ed \mathbb{R}^2 permette di definire le nozioni di limite e di continuità per funzioni definite su \mathbb{C} o a valori in \mathbb{C} . Si verifica facilmente che vale il fatto seguente.

1.3.2 Proposizione. *Se $\rho_n \rightarrow \rho$ e $\theta_n \rightarrow \theta$ allora $\rho_n e^{i\theta_n} \rightarrow \rho e^{i\theta}$.*

1.3.3 Esempio. Dato z in \mathbb{C} definiamo la successione (z_n) in \mathbb{C} ponendo

$$z_n := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Dimostriamo che $z_n \rightarrow e^z$. Scriviamo $z = x + iy$ Allora

$$\begin{aligned} |z_n|^2 = z_n \overline{z_n} &= \left(1 + \frac{x + iy}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x - iy}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^n = \\ &= e^{n \ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)} = e^{n\left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} + o\left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)\right)} = \\ &= e^{n\left(\frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2x + o(1)} \rightarrow e^{2x}. \end{aligned}$$

(si è sfruttata la formula di Taylor $\ln(1 + t) = t + o(t)$). Quindi passando alla radice

$$|z_n| \rightarrow e^x.$$

Cerchiamo un argomento θ_n per z_n ; osserviamo che l'argomento principale di $1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}$ è pari a $\arctan\left(\frac{y/n}{1 + x/n}\right)$ e quindi, passando alla potenza n -esima, possiamo prendere

$$\begin{aligned} \theta_n = n \arctan\left(\frac{y/n}{1 + x/n}\right) &= n\left(\frac{y/n}{1 + x/n} + o\left(\frac{y/n}{1 + x/n}\right)\right) = \\ &= \frac{y}{1 + x/n} + o(1) \rightarrow y \end{aligned}$$

(perché $\arctan(t) = t + o(t)$). In definitiva:

$$z_n = |z_n| e_n^{i\theta} \rightarrow e^x e^{iy} = e^z.$$

Capitolo 2

Successioni e serie di funzioni

2.1 Convergenza puntuale e uniforme

Supponiamo che A sia un sottoinsieme di \mathbb{R}^N e supponiamo che per ogni intero n sia data una funzione $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$. Diremo in questo caso che (f_n) è una successione di funzioni da A in \mathbb{R}^M . In quanto segue, per visualizzare le definizioni, si consiglia di pensare inizialmente al caso $N = M = 1$.

2.1.1 Definizione. Diciamo che la successione (f_n) converge puntualmente in un punto x_0 di A se esiste il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Diciamo che (f_n) converge puntualmente su A se (f_n) converge puntualmente in ogni x_0 di A . È chiaro che in quest'ultimo caso siamo autorizzati a considerare la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ definita da

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

e potremo quindi dire che (f_n) converge puntualmente a f (in forma abbreviata scriveremo $f_n \rightarrow f$ puntualmente o anche $f_n \xrightarrow{\text{punct}} f$).

2.1.2 Definizione. Data la successione di funzioni (f_n) e una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ diciamo che f_n converge uniformemente su A a f se si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Se introduciamo la *norma uniforme* di una funzione f (sull'insieme A) mediante

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty, A} := \sup_{x \in A} |f(x)|$$

allora la convergenza uniforme si può esprimere dicendo che f_n converge uniformemente a f se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

Per indicare che f_n converge uniformemente a f , useremo la notazione $f_n \rightarrow f$ uniformemente (su A), o anche $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ (su A).

Notiamo che l'espressione introdotta sopra, che abbiamo chiamato norma, non è necessariamente finita (può essere $+\infty$). Essa è finita se e solo se f è limitata su A , per esempio se A è chiuso e limitato in \mathbb{R}^N e f è continua. Vedremo le motivazioni del termine "norma" nei prossimi paragrafi.

È comunque vero in ogni caso che se $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ $\|f_n - f\|$ **deve** essere finito e tendere a zero.

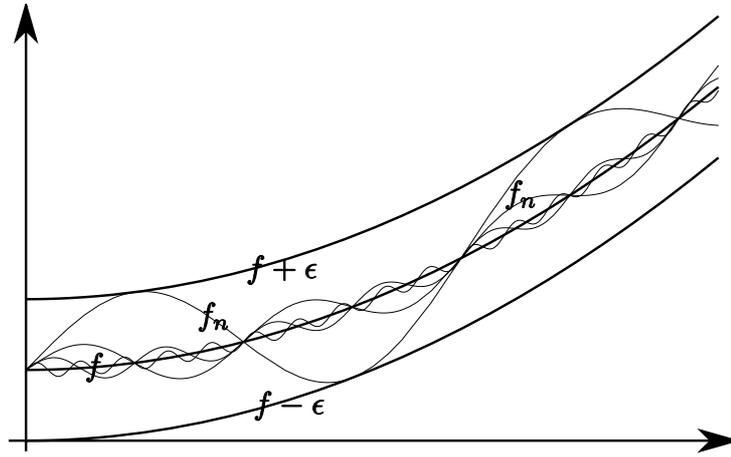


Figura 2.1: convergenza uniforme

2.1.3 Osservazione. Un modo di visualizzare la convergenza uniforme è di dire che, per ogni $\varepsilon > 0$, il grafico delle f_n è *definitivamente* compreso tra il grafico di $f - \varepsilon$ e quello di $f + \varepsilon$ (vedi figura 2.1).

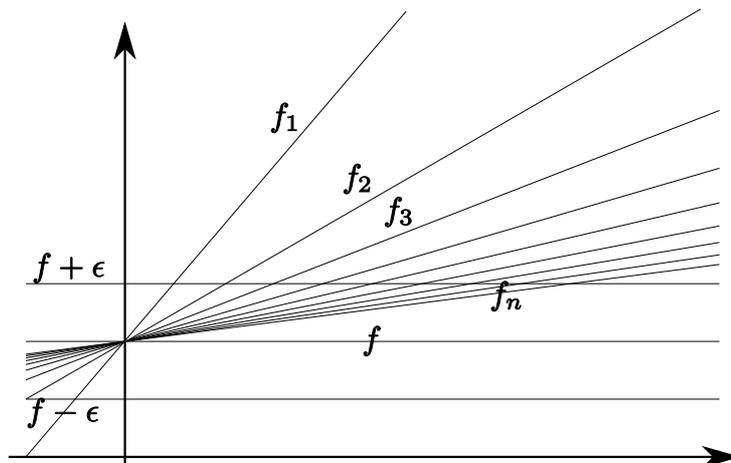
La seguente proprietà è una semplice conseguenza delle definizioni.

2.1.4 Proposizione. Se f_n converge uniformemente a f su A , allora f_n converge puntualmente su A .

La proposizione precedente dice che se f_n converge uniformemente a qualcosa, questo qualcosa deve essere il limite puntuale delle f_n : il limite puntuale **individua** il candidato limite uniforme.

La proposizione non è invertibile come mostrano i vari esempi che seguono.

2.1.5 Esempio. Consideriamo $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$. Si vede subito che, dato x in \mathbb{R} , $f_n(x) \rightarrow 1$ e dunque f_n converge puntualmente su \mathbb{R} alla funzione f che vale costantemente 1. Si vede abbastanza facilmente però che f_n non converge uniformemente su \mathbb{R} a f . Si vede infatti che non c'è nessun intero n per cui il grafico di f_n è *tutto* tra il grafico di $f - \varepsilon$ e quello di $f + \varepsilon$ dato che ogni retta di equazione $y = 1 + \frac{x}{n}$ va all'infinito e quindi supera $1 + \varepsilon$ per x abbastanza grande (vedi figura 2.2).

Figura 2.2: $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$

In particolare $\|f_n - f\|_\infty = +\infty$ e dunque non è possibile che $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. In sostanza, anche se a x fissato $f_n(x) \rightarrow 1$, la *velocità di convergenza* dipende da x (e peggiora tanto più x è grande) e non è quindi *uniforme* rispetto a x .

Notiamo che se invece di prendere le f_n su tutto \mathbb{R} consideriamo $A := [0, 1]$ (o un qualunque intervallo limitato), allora $f_n \xrightarrow{\text{unif}} 1$ su A . Infatti

$$\|f_n - 1\|_{\infty, [0,1]} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |1 + x/n - 1| = \max_{0 \leq x \leq 1} x/n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Dunque le f_n non convergono uniformemente a 1 su \mathbb{R} ma convergono uniformemente a 1 su ogni intervallo $[a, b]$.

2.1.6 Esempio. Consideriamo $f_n(x) := e^{-nx}$ definite su $A := [0, +\infty[$ (vedi la figura 2.3).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

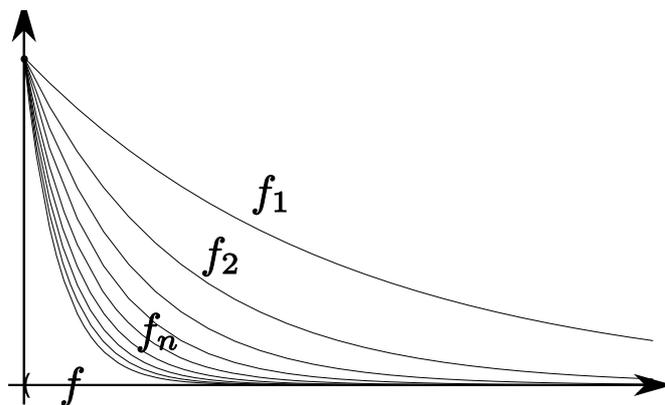


Figura 2.3: $f_n(x) = e^{-nx}$

cioè f_n converge puntualmente alla funzione f che vale zero su $]0, +\infty[$ e vale uno in zero. Però f_n non converge uniformemente a f in quanto, per ogni n

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \geq 0} |e^{-nx} - f(x)| = \sup_{x > 0} |e^{-nx}| = 1$$

che non tende a zero. Notiamo che le f_n sono tutte funzioni continue mentre il loro limite puntuale f non è continua in 0 dato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$. Quindi

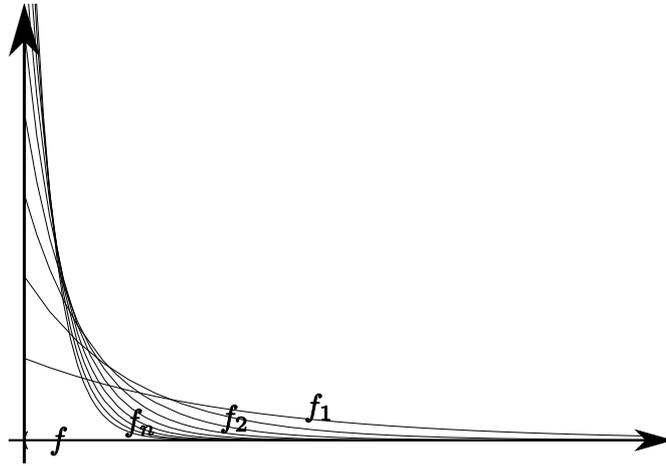
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) (= 0) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 (= 1)$$

2.1.7 Esempio. Consideriamo $f_n(x) := ne^{-nx}$ definite su $A :=]0, +\infty[$ (vedi la figura 2.4). Anche in questo caso $f_n(x) \rightarrow 0$ per ogni $x > 0$ (anche se c'è un n a moltiplicare l'esponenziale e^{-nx} "vince"); notiamo che non abbiamo messo lo zero in A (altrimenti $f_n(0) \rightarrow +\infty$). Quindi le f_n tendono puntualmente a zero su A . Anche stavolta la convergenza non è uniforme, si vede infatti che, per ogni n

$$\|f_n - 0\|_{\infty} = \sup_{x > 0} |ne^{-nx}| = n$$

che addirittura tende all'infinito. Notiamo che

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} ne^{-nx} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1$$

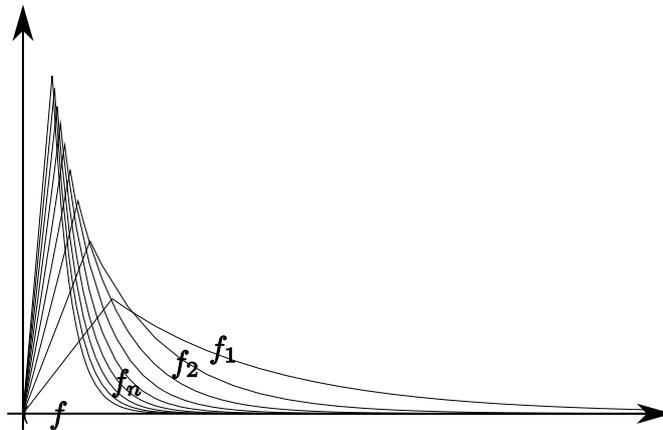
Figura 2.4: $f_n(x) = ne^{-nx}$

e quindi l'integrale delle f_n non tende all'integrale della funzione limite (che sarebbe zero).

Si potrebbe ritenere che questo dipenda dal fatto che A è un intervallo aperto, oppure che A non è limitato. In realtà, con un po' di pazienza, si può costruire un esempio analogo su $[0, 1]$; prendiamo infatti $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g_n(x) := \begin{cases} ne^{-nx} & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ \frac{n^2}{e}x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

(vedi la figura 2.5).

Figura 2.5: $g_n(x)$

Come prima, per x fissato, $g_n(x) \rightarrow 0$. Infatti se $x = 0$ $g_n(0) = 0 \rightarrow 0$, mentre se $x > 0$ per n grande $g_n(x) = f_n(x) \rightarrow 0$. D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_n(x) dx &= \int_0^{1/n} ne^{-nx} dx + \int_{1/n}^1 ne^{-nx} dx = \\ & \left[ne^{-1} \frac{x^2}{2} \right]_0^{1/n} + \left[n \frac{e^{-nx}}{-n} \right]_{1/n}^1 = \frac{e^{-1}}{2n} - e^{-n} + e^{-1} \rightarrow e^{-1} \neq 0 \end{aligned}$$

e quindi di nuovo l'integrale delle g_n non tende all'integrale del limite puntuale (che sarebbe zero).

Questi esempi mostrano che la convergenza puntuale *non va d'accordo* coi limiti e con gli integrali. Mostriamo ora che, al contrario, la convergenza uniforme si comporta bene.

2.1.8 Teorema. *Siano $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ e supponiamo che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in A . Sia x_0 un punto di accumulazione per A e supponiamo che per ogni n esista $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ che indichiamo con l_n . Allora*

1. esiste $l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$;
2. si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

In sostanza si può dire che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che gli l_n hanno limite. Per questo mostreremo che la successione (l_n) verifica la proprietà di Cauchy. Fissiamo n e m ; dato che, per ogni x di A

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

facendo tendere x a x_0 si ottiene:

$$|l_n - l_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Siccome $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$, cioè $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, è chiaro che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{n} tale che, se $n, m \geq \bar{n}$, si ha $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Dalla disuguaglianza sopra segue allora che (l_n) è di Cauchy.

Dunque possiamo trovare un l in \mathbb{R}^M tale che $l_n \rightarrow l$.

Mostriamo ora che $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x_0$. Per questo prendiamo una successione (x_k) in A , con $x_k \rightarrow x_0$ e mostriamo che $f(x_k) \rightarrow l$ per $k \rightarrow \infty$. Dato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare \bar{n} tale che per tutti gli $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad |l_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Fissiamo ora un $n_0 \geq \bar{n}$ (per esempio lo stesso \bar{n}); dato che $f_{n_0}(x_k) \rightarrow l_{n_0}$, possiamo trovare \bar{k} tale che

$$|f_{n_0}(x_k) - l_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \geq \bar{k}.$$

Prendiamo allora $k \geq \bar{k}$; si ha:

$$\begin{aligned} |f(x_k) - l| &\leq |f(x_k) - f_{n_0}(x_k)| + |f_{n_0}(x_k) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| \leq \\ &\|f - f_{n_0}\| + |f_{n_0}(x_k) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Essendo ε arbitrario abbiamo dimostrato che $f(x_k) \rightarrow l$, cioè la tesi. \square

Come conseguenza ricaviamo subito il seguente risultato

2.1.9 Teorema. *Siano (f_n) ed f tali che $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ su A e sia $x_0 \in A$. Se tutte le f_n sono continue in x_0 , allora f è continua in x_0 . Se ne ricava che se le f_n sono continue su A , anche la f è continua su A .*

Dimostrazione. Basta notare che per ogni n $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ e applicare il teorema precedente con $l_n = f_n(x_0)$. \square

2.1.10 Teorema. Siano (f_n) ed f tali che $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ su A , supponiamo che le f_n e la f siano integrabili su A e che la misura (o volume) di A (che indichiamo con $|A|$) sia finita. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A f(x) dx$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_A f_n(x) dx - \int_A f(x) dx \right| &= \left| \int_A (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \\ &\int_A |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_A \|f_n - f\|_\infty dx = |A| \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

2.1.11 Esempio. Contrariamente all'integrazione l'operazione di derivata *non va d'accordo* con la convergenza uniforme. Per esempio se consideriamo le funzioni $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite da:

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

(vedi la figura 2.6)

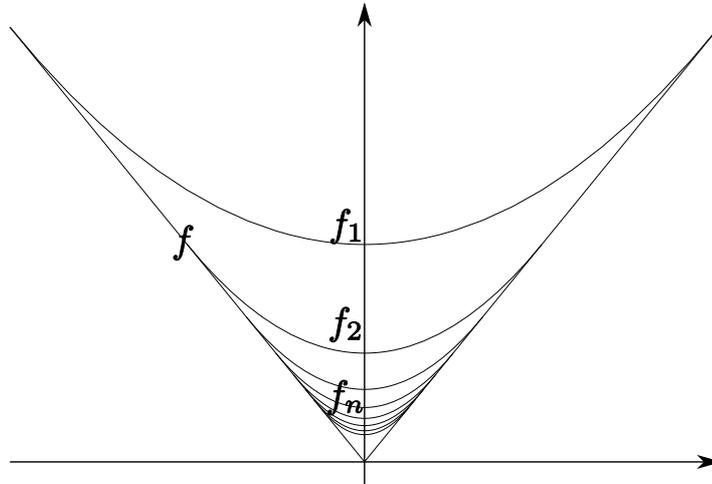


Figura 2.6: approssimazioni derivabili di $|x|$

si vede che f_n è derivabile e che

$$f'_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \\ n & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \\ -1 & \text{se } x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

Non è difficile verificare che $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$, dove $f(x) = |x|$ ed è chiaro che f non è derivabile in zero. Quindi è possibile che funzioni derivabili convergano ad una non derivabile. Vale però il seguente risultato.

2.1.12 Teorema. *Supponiamo che I sia un intervallo in \mathbb{R} e che $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sia una successione di funzioni derivabili su I con derivata f'_n continua su I . Supponiamo che ci siano due funzioni $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ per cui:*

$$f_n \rightarrow f \quad \text{puntualmente} \quad f'_n \rightarrow g \quad \text{uniformemente}$$

(ne segue che g è continua). Allora f è derivabile e $f' = g$.

Dimostrazione. Siano x_0 e x due punti in I . Allora per il teorema del calcolo integrale:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

Se facciamo tendere n all'infinito $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$, per la convergenza puntuale di f_n a f . D'altra parte per la convergenza uniforme delle f'_n a g e per il teorema (2.1.10) si ha che:

$$\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt$$

e quindi l'eguaglianza sopra passa al limite:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \forall x \text{ in } I$$

Di nuovo per il teorema fondamentale del calcolo questo implica $f' = g$. □

2.2 Spazi vettoriali, convergenza e completezza

2.2.1 Definizione. Un insieme \mathbb{X} si dice uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (rispettivamente su \mathbb{C}) se per ogni x_1 e x_2 in \mathbb{X} risulta definita in \mathbb{X} la *somma* $x_1 + x_2$ dei due *vettori* x_1 e x_2 , per ogni x in \mathbb{X} e ogni c in \mathbb{R} (risp. in \mathbb{C}) risulta definito cx in \mathbb{X} , detto *prodotto* del vettore x per lo *scalare* c , di modo che le due operazioni così introdotte verificano le usuali proprietà:¹

2.2.2 Definizione. Dati x_1, \dots, x_n in \mathbb{X} si chiama *combinazione lineare* di x_1, \dots, x_n un'espressione del tipo $c_1x_1 + \dots + c_Nx_n$ dove i *coefficienti* c_1, \dots, c_N sono in \mathbb{R} (risp. in \mathbb{C}). Si dice che x_1, \dots, x_n sono *linearmente dipendenti* se esiste una combinazione lineare nulla fatta con dei coefficienti non identicamente nulli (cioè se $\exists(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ tali che $c_1x_1 + \dots + c_Nx_n = 0$). Si dice che x_1, \dots, x_n sono *linearmente indipendenti* se ciò non è vero, cioè se ogni combinazione lineare nulla deve avere tutti i coefficienti eguali a zero.

Si dice che x_1, \dots, x_n è una base per \mathbb{X} se x_1, \dots, x_n sono linearmente indipendenti e *generano* \mathbb{X} ; con quest'ultima espressione intendiamo che ogni x di \mathbb{X} si può scrivere come combinazione lineare di x_1, \dots, x_n , in altri termini $x = c_1x_1 + \dots + c_Nx_n$ per opportuni c_1, \dots, c_N .

2.2.3 Osservazione. È semplice verificare che se esiste una base per \mathbb{X} fatta di N vettori, allora

- se $M > N$ presi comunque x_1, \dots, x_M in \mathbb{X} , essi sono linearmente dipendenti;
- per ogni x in \mathbb{X} c'è un'*unica* combinazione lineare dei vettori della base che genera x .

2.2.4 Definizione. Diciamo che \mathbb{X} ha dimensione N se esiste una base per \mathbb{X} fatta di N vettori. Diciamo che \mathbb{X} ha dimensione infinita se ciò non è vero per nessun N , cioè se non è possibile trovare una base formata da un numero finito di vettori di \mathbb{X} .

L'esempio tipico di spazio vettoriale di dimensione N è lo spazio \mathbb{R}^N , che può essere assunto come "prototipo" di tutti. Si vede facilmente che \mathbb{R}^N è uno spazio vettoriale di dimensione N e che una sua base si ottiene per esempio prendendo i *versori* $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_N$ definiti da $\hat{e}_1 := (1, 0, \dots, 0)$, $\hat{e}_2 := (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $\hat{e}_N := (0, 0, \dots, 1)$. In questo modo il vettore $x = (x_1, \dots, x_N)$ si rappresenta univocamente come $x = x_1\hat{e}_1 + \dots + x_N\hat{e}_N$.

Vediamo ora che si possono considerare spazi vettoriali i cui elementi sono delle funzioni. Dato A sottoinsieme di \mathbb{R}^N poniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M) &:= \{f : A \rightarrow \mathbb{R}^M\}, \\ \mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M) &:= \{f : A \rightarrow \mathbb{R}^M : |f| \text{ è limitata su } A\}, \\ \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^M) &:= \{f : A \rightarrow \mathbb{R}^M : f \text{ è continua su } A\}\end{aligned}$$

¹tali proprietà sono

la commutativa: per ogni x_1 e x_2 in \mathbb{X} $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$;

l'associativa: per ogni x_1, x_2 e x_3 in \mathbb{X} $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$;

l'esistenza dell'elemento neutro: esiste $\mathbf{0}$ tale che per ogni x in \mathbb{X} $x + \mathbf{0} = x$;

l'esistenza dell'opposto: per ogni x in \mathbb{X} esiste $-x$ in \mathbb{X} per cui $x + (-x) = \mathbf{0}$;

la distributiva: per ogni c in \mathbb{R} (risp. in \mathbb{C}) e ogni x_1, x_2 in \mathbb{X} $c(x_1 + x_2) = cx_1 + cx_2$;

la neutralità di 1: per ogni x in \mathbb{X} $1x = x$

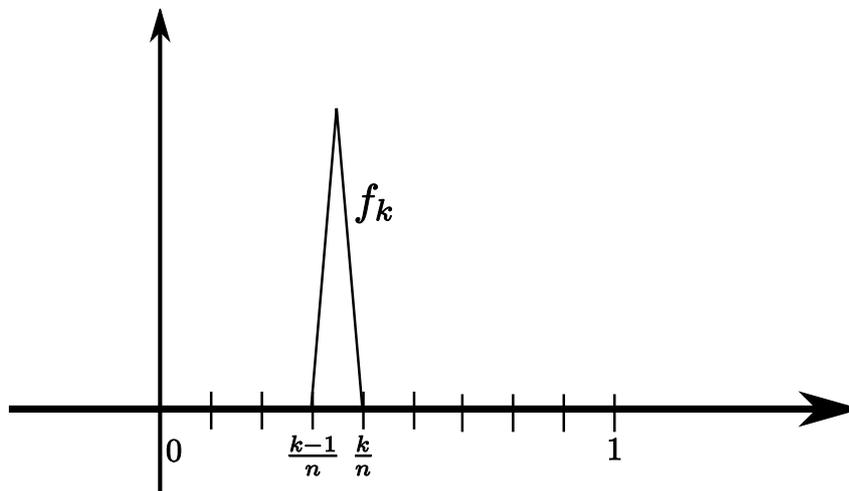


Figura 2.7: funzioni linearmente indipendenti in C^0

Nel caso in cui $M = 1$, scriviamo più semplicemente $\mathcal{F}(A)$, $\mathcal{B}(A)$ e $C^0(A)$. Chiaramente $\mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M) \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$; se poi A è limitato e chiuso allora, per il teorema di Weierstrass, $C^0(A, \mathbb{R}^M) \subset \mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M)$.

È evidente che si tratta di spazi vettoriali su \mathbb{R} , dato che, se $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ è ben definita $f_1 + f_2$ ponendo $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$ per ogni x in A e analogamente se $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $c \in \mathbb{R}$ è ben definita cf ponendo $(cf)(x) := cf(x)$. Inoltre è chiaro che la combinazione lineare di funzioni limitate (risp. continue) è una funzione limitata (risp. continua). Notiamo che in tutti questi spazi l'elemento zero è la funzione identicamente nulla, cioè $\mathbf{0}(x) = 0$ per ogni x in A .

Analogamente si potrebbero definire degli analoghi spazi di funzioni a valori in \mathbb{C}^M , che risultano evidentemente spazi vettoriali su \mathbb{C} .

Gli spazi di funzione sopra introdotti hanno tutti **dimensione infinita**.

2.2.5 Esempio. Mostriamo un esempio che $C^0([0, 1])$ ha dimensione infinita. Per questo facciamo vedere che preso comunque n intero si possono trovare n elementi di $C^0([0, 1])$ che sono linearmente indipendenti. A questo scopo dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in n sottointervalli I_1, \dots, I_n ponendo $I_k := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, per $k = 1, \dots, n$ e consideriamo delle funzioni continue f_1, \dots, f_n tali che $f_k(x) = 0$ se $x \notin I_k$, mentre $f_k(x_k) = 1$, dove x_k è il punto medio di I_k ($x_k = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n}$). Un esempio di funzioni del genere è rappresentato nelle figura 2.7.

Se ora c_1, \dots, c_n sono dei coefficienti reali tali che $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = \mathbf{0}$ allora $c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$ per ogni x in $[0, 1]$. Scegliendo $x = x_1$ si trova $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 = 0$, da cui $c_1 = 0$. Analogamente prendendo $x = x_k$ si deduce $c_k = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ e dunque f_1, \dots, f_n sono linearmente indipendenti.

2.2.6 Definizione. Sia dato uno spazio vettoriale \mathbb{X} . Chiameremo *norma* (o modulo) in \mathbb{X} una applicazione da \mathbb{X} in \mathbb{R} con le proprietà seguenti: se indichiamo con $\|x\|$ la norma del vettore x , allora deve essere

1. $\|x\| \geq 0$ per ogni x e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2. $\|cx\| = |c|\|x\|$ per ogni vettore x e ogni scalare c ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni coppia di vettori x e y .

Se in \mathbb{X} è definita una norma si dice che \mathbb{X} è una *spazio normato*. A volte, quando sia necessario distinguere tra norme in spazi diversi, indicheremo la norma di un vettore x di

\mathbb{X} con $\|x\|_{\mathbb{X}}$.

Notiamo che la seconda proprietà implica $\| -x \| = \|x\|$.

Per il resto del capitolo supponiamo che \mathbb{X} sia uno spazio normato, dotato di una norma $\| \cdot \|$. Possiamo allora considerare in \mathbb{X} la nozione di limite. Come vedremo, una volta introdotta una norma, le definizioni sono le stesse che si usano in \mathbb{R}^N . Per semplicità ci limiteremo ai limiti di successioni, ma si potrebbe fare lo stesso per i limiti di funzioni.

2.2.7 Definizione. Data una successione (a_n) di punti di \mathbb{X} e dato l in \mathbb{X} diremo che l è il limite di (a_n) per n che tende all'infinito (o anche che (a_n) tende ad l) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - l\| = 0$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

o anche in modo più conciso, $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow +\infty$ viene sottinteso).

2.2.8 Proposizione. *La definizione di limite introdotta sopra verifica le usuali proprietà del limite di successioni di numeri reali. Valgono ad esempio i fatti seguenti che non è difficile dedurre dalla definizione.*

1. Il limite, se esiste, è unico: $a_n \rightarrow l_1, a_n \rightarrow l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$.
2. Se (a_n) ha limite allora (a_n) è limitata, cioè $\exists M : \|a_n\| \leq M \forall n$.
3. Se $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ in \mathbb{X} e se $\alpha_n \rightarrow \alpha, \beta_n \rightarrow \beta$ in \mathbb{R} (risp. in \mathbb{C}) allora $\alpha_n a_n + \beta_n b_n \rightarrow \alpha a + \beta b$.

Le proprietà che non si possono trasferire al caso generale sono quelle che dipendono dal \geq (la relazione d'ordine è un concetto essenzialmente unidimensionale). Per esempio i limiti infiniti si fanno solo per le successioni a valori reali.

2.2.9 Esempio. In \mathbb{R}^N il modulo che abbiamo ricordato nel primo paragrafo: $|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$, dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, verifica come si vede facilmente le proprietà di una norma. Continueremo a usare la notazione con una barra sola per la modulo (o norma) dei punti di \mathbb{R}^N (imitando il simbolo del *valore assoluto*, che corrisponde alla norma quando $N = 1$) per riservare le due barre a norme in spazi più generali.

La norma appena introdotta non è però l'unica possibile in \mathbb{R}^N . Potremmo ad esempio considerare

$$|\mathbf{x}|_1 := |x_1| + \dots + |x_N|$$

Vediamo che $|\cdot|_1$ è una norma.

1. È evidente che $|\mathbf{x}|_1 \geq 0$. Inoltre $|\mathbf{x}|_1 = 0$ significa $|x_1| + \dots + |x_N| = 0$ che è possibile se e solo se $|x_1| = \dots = |x_N| = 0$, cioè se $\mathbf{x} = 0$.
2. $|c\mathbf{x}|_1 = |cx_1| + \dots + |cx_N| = |c|(|x_1| + \dots + |x_N|) = |c||\mathbf{x}|_1$.
3. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|_1 = |x_1 + y_1| + \dots + |x_N + y_N| \leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_N| + |y_N| = |\mathbf{x}|_1 + |\mathbf{y}|_1$

Dunque anche $|\cdot|_1$ è una norma. Un'altra possibilità è:

$$|\mathbf{x}|_{\infty} := \max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}$$

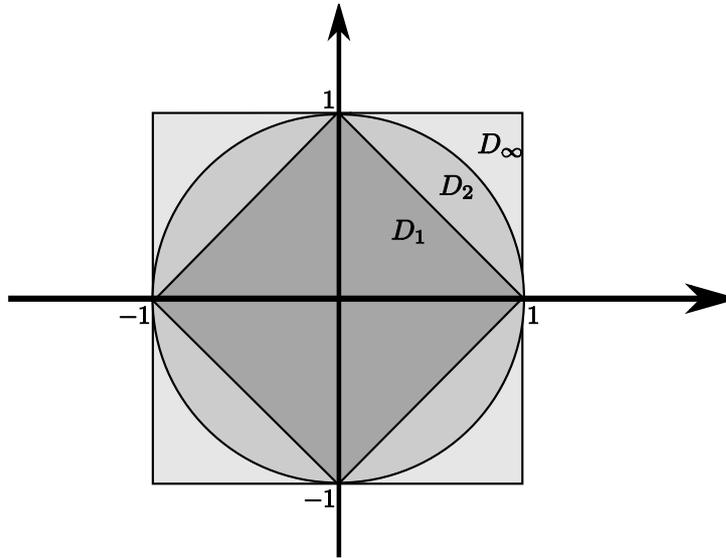


Figura 2.8: Le palle unitarie rispetto a norme diverse

(la notazione con ∞ sarà chiara in seguito). Non è difficile verificare che anche $|\cdot|_\infty$ è una norma.

Notiamo che le tre norme ora introdotte verificano la seguente relazione:

$$|\mathbf{x}|_\infty \leq |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x}|_1 \leq N|\mathbf{x}|_\infty \quad (2.1)$$

come è facile verificare. Ne segue che le *palle* di centro $\mathbf{0}$ e raggio r nelle rispettive norme:

$$D_\infty(r) := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}|_\infty \leq r\}, \quad D(r) := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| \leq r\}, \quad D_1(r) := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}|_1 \leq r\}$$

verificano le seguenti inclusioni (vedi la figura 2.8):

$$D_1(r) \subset D(r) \subset D_\infty(r) \subset D_1(Nr)$$

La relazione (2.1) implica che la nozione di limite introdotta a partire da una qualunque delle tre norme considerate sopra è *la stessa*. Ciò vuol dire che data una successione (\mathbf{a}_n) di punti di \mathbb{R}^N e un punto \mathbf{a} di \mathbb{R}^N si ha

$$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_\infty \rightarrow 0$$

Per esempio il fatto che $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_1 \rightarrow 0$ implichi $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_\infty \rightarrow 0$ è conseguenza della disuguaglianza $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_\infty \leq |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}|_1$ e le altre implicazioni seguono in modo analogo.

L'esempio sopra suggerisce la seguente definizione.

2.2.10 Definizione. Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su uno stesso spazio vettoriale \mathbb{X} si dicono *equivalenti* se esistono due costanti $0 < M_1 \leq M_2$ tali che

$$M_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M_2\|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad (2.2)$$

È facile vedere (come fatto sopra) che due norme equivalenti producono la *stessa nozione di limite*.

Si potrebbe dimostrare (con strumenti assai avanzati) il seguente risultato.

2.2.11 Teorema. *Se \mathbb{X} ha dimensione finita **tutte** le norme sono tra loro equivalenti. Quindi negli spazi vettoriali di dimensione finita c'è un' unica possibile nozione di limite (proveniente da una norma).*

Come fatto in \mathbb{R}^N possiamo introdurre la proprietà di Cauchy per successioni in uno spazio vettoriale normato.

2.2.12 Definizione. Sia \mathbb{X} uno spazio vettoriale normato e sia $\|\cdot\|$ la norma. Si dice che una successione (a_n) di punti di \mathbb{X} verifica la proprietà di Cauchy (brevemente (a_n) è di Cauchy) se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \text{tale che } \forall n, m \geq \bar{n} \quad \|a_n - a_m\| \leq \varepsilon.$$

È di nuovo assai facile vedere che se (a_n) ammette limite allora è di Cauchy. A differenza di \mathbb{R}^N il viceversa può non essere vero se si considerano spazi di dimensione infinita. Questo fatto motiva la seguente definizione.

2.2.13 Definizione. Uno spazio vettoriale normato \mathbb{X} si dice *completo* se ogni successione di Cauchy ammette limite.

Con la definizione precedente il teorema 1.1.11 si può enunciare dicendo:

“Gli spazi \mathbb{R}^N sono completi”

Vediamo che in effetti tale proprietà può non essere vera per uno spazio normato arbitrario.

2.2.14 Esempio. Consideriamo $\mathbb{X} = C^0([-1, 1])$ e per ogni f in \mathbb{X} definiamo

$$\|f\|_1 := \int_{-1}^1 |f(t)| dt$$

Mostriamo che $\|\cdot\|_1$ è una norma.

1. Evidentemente $\|f\|_1 \geq 0$ per ogni f in \mathbb{X} ; se poi $\|f\|_1 = 0$ si ha $\int_{-1}^1 |f(t)| dt = 0$ ed essendo $|f| \geq 0$ l'unico modo di rendere nullo l'integrale è di avere $|f(t)| = 0$ per ogni t in $[-1, 1]$, cioè di avere $f = 0$.
2. Se c è uno scalare si ha

$$\|cf\|_1 = \int_{-1}^1 |cf(t)| dt = |c| \int_{-1}^1 |f(t)| dt = |c| \|f\|_1$$

3. Date f e g in \mathbb{X}

$$\|f + g\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t) + g(t)| dt \leq \int_{-1}^1 |f(t)| dt + \int_{-1}^1 |g(t)| dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

Con tale norma abbiamo introdotto una nozione di convergenza tra le funzioni continue: data una successione (f_n) di funzioni continue su $[-1, 1]$ e una f continua su $[-1, 1]$, (f_n) tenderà a f (nel senso della norma $\|\cdot\|_1$) se

$$\int_{-1}^1 |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0$$

(cioè se l'area tra il grafico di f_n e quello di f tende a zero). Questa nozione di limite è accettabile ma ha un grave difetto: Lo spazio \mathbb{X} **non è completo** rispetto a questa norma. Per vedere ciò prendiamo la seguente successione:

$$f_n(t) := \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, \\ nt & \text{se } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

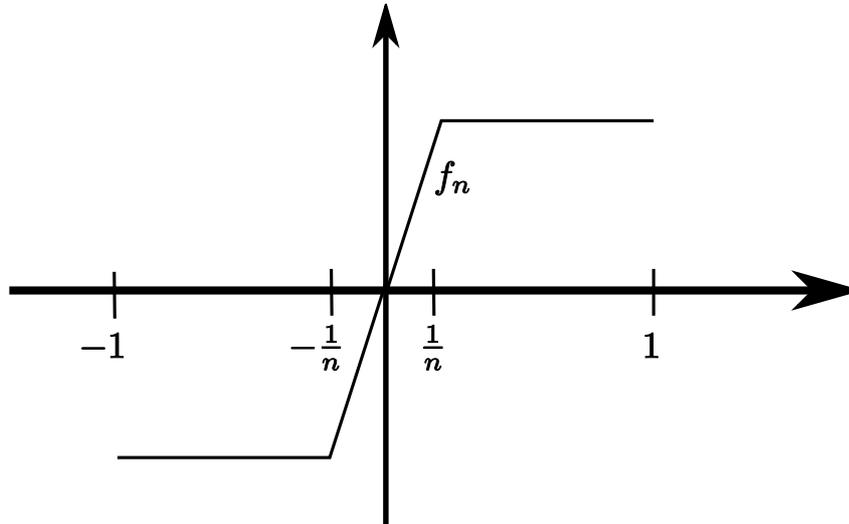


Figura 2.9: incompletezza delle continue con la norma integrale

(vedi la figura 2.2.14).

Dico che (f_n) è di Cauchy, infatti presi due interi $n \geq m$ si ha

$$\|f_n - f_m\| = \int_{-1}^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt \leq \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} 1 dt = \frac{2}{m}$$

e dunque per n, m grandi tale espressione può essere resa arbitrariamente piccola. Se mostriamo che (f_n) non ammette limite abbiamo trovato che \mathbb{X} non è completo. Per questo consideriamo prima la funzione g definita da

$$g(t) := \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

e notiamo che

$$\int_{-1}^1 |f_n(t) - g(t)| dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1 dt = \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

ma g **non** è una funzione continua. A questo punto supponiamo per assurdo che esista una f in \mathbb{X} tale che $f_n \rightarrow f$. Ne seguirebbe:

$$\int_{-1}^1 |f(t) - g(t)| dt \leq \int_{-1}^1 |f(t) - f_n(t)| dt + \int_{-1}^1 |f_n(t) - g(t)| dt \rightarrow 0$$

da cui $\int_{-1}^1 |f(t) - g(t)| dt = 0$. Ma ciò implicherebbe $f(t) = g(t)$ e questo è assurdo perché f deve essere continua mentre g non lo è.

La completezza dello spazio gioca un ruolo importante nei problemi di convergenza di una serie. Analogamente a quanto fatto nel caso dei numeri reali si possono infatti considerare le serie di elementi di uno spazio vettoriale generico.

2.2.15 Definizione. Sia \mathbb{X} uno spazio vettoriale normato sia $\|\cdot\|$ la sua norma. Data una successione $(a_n)_{n \geq n_0}$ di punti di \mathbb{X} chiamiamo *somma parziale* n -esima l'espressione

$$S_n := \sum_{k=n_0}^n a_k = a_{n_0} + \cdots + a_n$$

(che risulta definita per $n \geq n_0$). La successione $(S_n)_{n \geq n_0}$ si chiama *serie* associata ad $(a_n)_{n \geq n_0}$ o più brevemente serie degli a_n .

Si dice che *la serie è convergente* se $(S_n)_{n \geq n_0}$ ammette limite S in \mathbb{X} . In tal caso diciamo che S è la *somma della serie* e lo indichiamo con

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Molto spesso, con un leggero abuso, l'espressione $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ viene usata per indicare la serie oltre che la sua somma, per cui si usa dire: *la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è/ non è convergente*.

Diremo che la serie è *assolutamente convergente* se la serie $\sum_{k=n_0}^{\infty} \|a_k\|$ è convergente.

Notiamo che nel caso delle serie a valori vettoriali non ha senso dire che la serie è divergente.

2.2.16 Teorema (convergenza e convergenza assoluta). *Se \mathbb{X} è completo ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Poniamo, per n intero:

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad T_n := \sum_{k=1}^n \|a_k\|$$

Allora presi due interi qualunque $n \geq m$ si ha:

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^m a_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n a_k \right\| \leq \\ & \sum_{k=m+1}^n \|a_k\| = \sum_{k=1}^n \|a_k\| - \sum_{k=1}^m \|a_k\| = |T_n - T_m| \end{aligned}$$

Se ne deduce facilmente che se (T_n) è di Cauchy (in \mathbb{R}), allora (S_n) è di Cauchy (in \mathbb{X}). Infatti dato $\varepsilon > 0$ sia \bar{n} tale che

$$|T_n - T_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n};$$

allora

$$\|S_n - S_m\| \leq |T_n - T_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}.$$

Possiamo allora concludere la dimostrazione osservando che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \text{ converge in } \mathbb{R} \Rightarrow (T_n) \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$(S_n) \text{ è di Cauchy in } \mathbb{X} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge in } \mathbb{X}$$

dove l'ultima implicazione discende dalla completezza di \mathbb{X} . □

Ricordiamo che in generale non è detto che una serie convergente sia assolutamente convergente (cioè che valga il viceversa del teorema precedente); ciò si può vedere già tra le serie di numeri reali considerando la serie (a segni alterni) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge ma non converge assolutamente.

Il criterio della convergenza assoluta è comunque assai utile (se funziona) in quanto permette di ricondursi a studiare la convergenza di una serie di numeri positivi.

2.3 Spazi di funzioni con la norma uniforme

Ricordiamo che abbiamo indicato con $\mathcal{B}(A)$ le funzioni limitate su A e con $\mathcal{C}^0(A)$ le funzioni continue su A (a valori reali) e che, se A è compatto (cioè A è chiuso e limitato in \mathbb{R}^N), allora $\mathcal{C}^0(A) \subset \mathcal{B}(A)$ (per il teorema di Weierstrass). È anche chiaro che per f in $\mathcal{B}(A)$ la norma uniforme di f è finita.

2.3.1 Proposizione. *La norma uniforme $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty,A}$, introdotta in 2.1.2, è una norma su $\mathcal{B}(A)$ (e quindi su $\mathcal{C}^0(A)$). Di conseguenza dire che una successione (f_n) in $\mathcal{B}(A)$ converge a f in $\mathcal{B}(A)$ significa che f_n sono funzioni limitate che convergono uniformemente a una funzione limitata f .*

Inoltre, se A è compatto, $\mathcal{C}^0(A)$ è (un sottospazio) chiuso in $\mathcal{B}(A)$.

Dimostrazione. Il fatto che $\|\cdot\|_\infty$ verifichi le proprietà della norma è una semplice conseguenza delle definizioni. Il fatto che $\mathcal{C}^0(A)$ sia chiuso significa che se (f_n) è una successione di funzioni continue che converge uniformemente a una f , allora f deve essere continua. Questo è esattamente il contenuto del teorema 2.1.9 \square

L'aver introdotto la struttura di spazio normato sulle funzioni limitate/continue permette di inquadrare varie proprietà della convergenza uniforme e di fare altre considerazioni in base alla teoria svolta nel caso astratto, come vedremo meglio nel prossimo paragrafo.

La norma uniforme è la “norma giusta” in $\mathcal{B}(A)$. Vale il seguente risultato (importantissimo).

2.3.2 Teorema. *Lo spazio $\mathcal{B}(A)$ dotato della norma uniforme è completo. Se A è compatto, allora lo spazio $\mathcal{C}^0(A)$ è completo.*

Dimostrazione. Vediamo al dimostrazione per $\mathcal{B}(A)$ (per $\mathcal{C}^0(A)$ si ragiona in modo analogo). Sia (f_n) una successione di Cauchy in $\mathcal{C}^0(A)$. Fissiamo un qualunque x in A ; dato che:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad (2.3)$$

si vede subito che $(f_n(x))$ è una successione di Cauchy in \mathbb{R} e dunque ammette limite per la completezza di \mathbb{R} . Possiamo indicare con $f(x)$ il limite di $(f_n(x))$. Abbiamo quindi trovato una funzione f a cui (f_n) converge puntualmente: cerchiamo di far vedere che $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$.

Sia $\varepsilon > 0$ e sia \bar{n} tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$. Allora preso un qualunque x in A e $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)|$$

che a causa di (2.3) implica

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ed essendo x arbitrario

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Abbiamo in questo modo verificato la definizione di $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$. \square

2.3.3 Osservazione. Tutto quanto fatto fino ad ora si può ripetere per funzioni a valori in \mathbb{R}^M o anche in \mathbb{C}^M .

2.4 Serie di funzioni

Come abbiamo considerato le successioni di funzioni possiamo considerare le serie. Per questo basterebbe applicare la definizione generale di serie a valori in spazi vettoriali - ripetiamo però tale definizione nel caso in cui gli elementi da sommare siano delle funzioni.

2.4.1 Definizione. Supponiamo che $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ formino una successione di funzioni. Per ogni intero n chiamiamo somma parziale n -esima relativa a (f_n) la funzione $F_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Chiamiamo *serie* di funzioni associata a (f_n) la successione delle somme parziali (F_n) . Diciamo che la serie delle f_n è uniformemente convergente su A se esiste una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ a cui le F_n convergono uniformemente: $F_n \xrightarrow{\text{unif}} F$. In questo caso chiamiamo F *somma* della serie e la indichiamo con

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \left(\text{e quindi } F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in A \right).$$

Molto spesso si indica con $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ la serie (cioè la successione) oltre che la sua somma.

Quindi si usa dire, con un leggero abuso, che la “serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ” è (o non è) uniformemente convergente.

Rimarchiamo anche in questo caso che se la serie converge uniformemente ($F_n \xrightarrow{\text{unif}} F$), allora essa converge puntualmente ($F_n \xrightarrow{\text{punct}} F$), cioè per ogni x di A la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è convergente. Si può dire in questo caso che la serie converge puntualmente.

Se le f_n sono funzioni limitate allora la convergenza uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ non è altro che la convergenza della serie nello spazio normato $\mathcal{B}(A)$. Dato che tale spazio è completo, utilizzando il teorema 2.2.16 si deduce il seguente risultato.

2.4.2 Teorema. *Sia (f_n) una successione di funzioni limitate su A . Se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ è convergente, allora la serie delle f_n converge uniformemente su A ad una funzione limitata.*

2.4.3 Osservazione. La proprietà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty$$

(cioè la convergenza assoluta rispetto alla norma uniforme) viene anche chiamata *convergenza totale* della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Il teorema precedente afferma quindi che una serie di funzioni limitate che sia totalmente convergente è uniformemente convergente.

Se poi le f_n sono continue su un insieme compatto, anche la somma della serie è continua e valgono altre conseguenze del tipo di quelle già viste nel paragrafo 2.1.

2.4.4 Corollario. *Sia (f_n) una successione di funzioni in $\mathcal{C}^0(A)$, con A compatto e supponiamo che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \in A} |f_n(x)|$ sia convergente. Allora*

1. $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è una funzione continua.

2. Si ha

$$\int_A F(x) dx = \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x) dx$$

3. Se $A = I$ è un intervallo, se le f_n sono tutte derivabili con derivata continua e se anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \in A} |f'_n(x)|$ è convergente allora F è derivabile e si ha

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \text{ in } I.$$

Dimostrazione. Per il teorema (2.4.2) la successione delle somme parziali (F_n) converge uniformemente a F e dunque il limite F è una funzione continua (dal teorema (2.1.8)). Inoltre, per il teorema (2.1.10)

$$\begin{aligned} \int_A F(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A F_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_A f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k(x) dx \end{aligned}$$

(l'ultima eguaglianza è solo la definizione della convergenza della serie degli integrali).

Infine l'ipotesi di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\|_{\infty}$ implica, sempre per il teorema (2.4.2), che la serie delle f'_n è uniformemente convergente. Questo significa che le sue somme parziali $\sum_{k=1}^n f'_k$ convergono uniformemente ad una funzione continua G . Dato che $\sum_{k=1}^n f'_k = F'_n$ abbiamo che $F'_n \xrightarrow{\text{unif}} G$. Per il teorema (2.1.12), ciò implica che F è derivabile e $F' = G$, cioè vale l'ultima affermazione. \square

2.4.5 Esempio. Consideriamo la seguente successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite da

$$f_n(x) := \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0, \quad f'_n(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Quindi il grafico di ogni f_n è quello rappresentato in figura 2.10.

In particolare f_n raggiunge il suo massimo in $x = \frac{1}{n}$ e il massimo di f_n vale $f_n(1/n) = 1/2n$. Dunque

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}.$$

e quindi $f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$ (su tutto \mathbb{R}). Consideriamo ora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

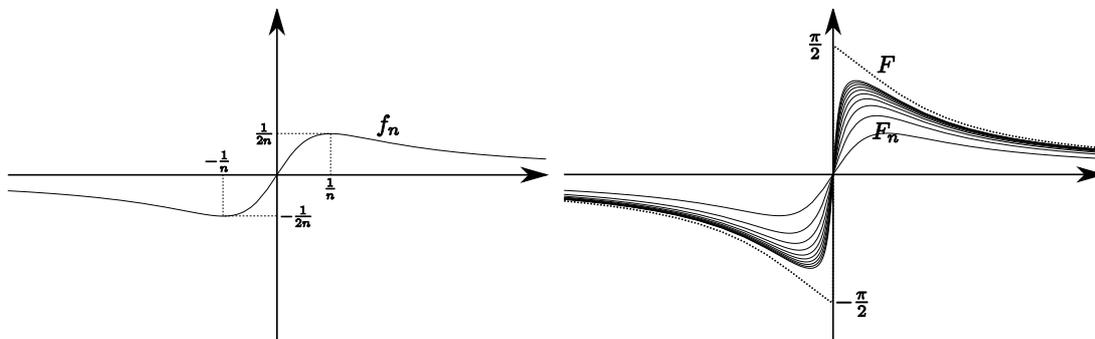


Figura 2.10: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

Studiamone la convergenza puntuale: fissato x in \mathbb{R} vediamo se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

è convergente. Questo è vero per ogni x dato che, se $x = 0$ la serie ha tutti i suoi termini nulli, mentre se $x \neq 0$

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2|x|}$$

e quindi la serie converge (dato che la serie $\frac{1}{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge). Dunque ha senso scrivere

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

(x per x). Notiamo che $F(0) = 0$. Ci possiamo chiedere se F sia continua su tutto \mathbb{R} .

Ciò sarebbe sicuramente vero se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} < +\infty$; sfortunatamente tale serie diverge

essendo eguale a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$ e quindi con questo ragionamento non si perviene a nulla.

Se però fissiamo un qualunque $a > 0$ e consideriamo $A := [a, +\infty[$, si ha

$$\|f_n\|_{\infty, A} = \sup_{x \geq a} f_n(x) = f_n(a) \quad \text{se } n \geq 1/a.$$

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, A} &= \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty, A} + \sum_{n > 1/a} f_n(a) = \\ &= \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty, A} + \sum_{n > 1/a} \frac{a}{1+n^2a^2} \leq \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty, A} + \frac{1}{a} \sum_{n > 1/a} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Applicando il corollario 2.4.4 (in A) otteniamo che la serie converge uniformemente su A e la sua somma F risulta continua su A . Dato che il numero $a > 0$ è arbitrario ne deduciamo che f è continua su $]0, +\infty[$. Analogamente si dimostra che F è continua su $] -\infty, 0[$.

In maniera analoga possiamo dimostrare che F è derivabile su A e quindi è derivabile in ogni $x \neq 0$. Infatti consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n, \quad \text{dove } f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Si ha

$$\|f'_n\|_{\infty, A} = \sup_{x \geq a} \left| \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} \right| \leq \sup_{x \geq a} \frac{1 + n^2 x^2}{n^4 x^4} \leq \frac{1}{n^4 a^4} + \frac{1}{n^2 a^2}.$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 a^4} + \frac{1}{n^2 a^2} < +\infty$ la serie delle derivate è uniformemente convergente su A e quindi tale serie è la derivata di F .

Vediamo che invece F non è continua in zero. Infatti se $0 < x < 1$ si ha ²

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]} \frac{x}{1 + n^2 x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]} \frac{x}{1 + 1} = \frac{1}{2} x [1/x] \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}.$$

Questa disuguaglianza rende impossibile che $F(x) \rightarrow 0 = F(0)$ per $x \rightarrow 0^+$ e quindi F non è continua in zero (almeno da destra - si può anche ripetere lo stesso ragionamento per $x \rightarrow 0^-$).

In verità possiamo essere più precisi. Usando l'osservazione 1.2.12 possiamo scrivere

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + [y]^2 x^2} dy \text{ da cui}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + y^2 x^2} dy \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + (y-1)^2 x^2} dy = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + y^2 x^2} dy.$$

Sostituendo $t = xy$ si ricava

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^2} dt$$

e facendo tendere x a zero si ricava

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

La figura 2.10 rappresenta le somme parziali fino all'ordine 10 delle f_n e, con linea tratteggiata, la somma della serie (in realtà la somma di ordine $n = 5000$).

2.5 Applicazioni lineari continue

2.5.1 Definizione. Siano \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 due spazi vettoriali normati e indichiamo le loro norme con $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ rispettivamente. Siano A un sottoinsieme di \mathbb{X}_1 e x_0 un punto di A e sia F una funzione (o applicazione) da A in \mathbb{X}_2 , (in breve $f : A \rightarrow \mathbb{X}_2$).

Diremo che F è continua in x_0 se per ogni successione (a_n) di punti di A tale che $a_n \rightarrow x_0$ (in \mathbb{X}_1) succede che $F(a_n) \rightarrow F(x_0)$ (in \mathbb{X}_2). Diremo che F è continua in A se F è continua in tutti i punti di A .

È facile vedere che valgono le seguenti proprietà (standard).

2.5.2 Proposizione. 1. Se F è continua in x_0 allora F è limitata in un intorno di x_0 , cioè esistono un raggio $r > 0$ ed un numero M tali che

$$\|F(x)\|_2 \leq M \quad \forall x \in A : \|x - x_0\|_1 \leq r$$

²ricordiamo che $[t]$ indica la parte intera di un numero t , definita da $[t] := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq t\}$; ne segue allora che $[t]$ è un intero e che $[t] \leq t < [t] + 1$

2. Se F e G sono continue in x_0 e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (risp. $\in \mathbb{C}$), allora $\alpha F + \beta G$ è continua in x_0 .
3. Se $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ e \mathbb{X}_3 sono spazi normati, se $A \subset \mathbb{X}_1, x_0 \in A, B \subset \mathbb{X}_2, F : A \rightarrow B, F$ è continua in $x_0, G : B \rightarrow \mathbb{X}_3, G$ è continua in $y_0 := F(x_0)$ allora la funzione composta $G \cdot F$ è continua in x_0 .

Un particolare interesse rivestiranno per noi le applicazioni lineari continue.

2.5.3 Definizione. Siano \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 due spazi vettoriali. Se L è una applicazione da \mathbb{X}_1 in \mathbb{X}_2 si dice che L è *lineare* quando

$$L(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1L(x_1) + c_2L(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}_1, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ (risp. in } \mathbb{C})$$

Spesso per le applicazioni lineari si sopprimono le parentesi scrivendo Lx in luogo di $L(x)$.

2.5.4 Proposizione. Se $L : \mathbb{X}_1 \rightarrow \mathbb{X}_2$ è lineare sono equivalenti i tre fatti seguenti.

1. L è continua in ogni x_0 di \mathbb{X}_1 ;
2. L è continua in $\mathbf{0}$;
3. esiste una costante M tale che

$$\|L(x)\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{X}_1 \quad (2.4)$$

dove $\|\cdot\|_1$ (risp. $\|\cdot\|_2$) indica la norma in \mathbb{X}_1 (risp. in \mathbb{X}_2).

Dimostrazione. È chiaro che (1) \Rightarrow (2). Mostriamo che (2) \Rightarrow (1). Sia x_0 un qualunque punto di \mathbb{X}_1 . Per la linearità e la continuità in zero:

$$x_n \rightarrow x_0 \Leftrightarrow (x_n - x_0) \rightarrow \mathbf{0} \Rightarrow L(x_n - x_0) \rightarrow \mathbf{0} \Leftrightarrow L(x_n) \rightarrow L(x_0)$$

(dato che $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$) e quindi L è continua in x_0 .

Mostriamo che (2) \Rightarrow (3). Per le proprietà dei limiti è chiaro che se L è continua in zero allora essa è limitata in una palla centrata in zero, cioè esistono M_1 ed $r > 0$ tali che

$$\|L(y)\|_2 \leq M_1 \quad \forall y \in \mathbb{X}_1 \text{ tale che } \|y\|_1 \leq r.$$

Ma allora se $x \in \mathbb{X}_1$ e $x \neq 0$ posto $y := \frac{x}{\|x\|_1} r$ si ha $\|y\|_1 = r$ e dunque $L(y) \leq M_1$. Per la linearità di L

$$\|L(x)\|_2 = \frac{\|x\|_1}{r} \|L(y)\|_2 \leq \frac{\|x\|_1}{r} M_1$$

e quindi, ponendo $M := \frac{M_1}{r}$ abbiamo ottenuto (2.4).

Se viceversa vale (2.4) è evidente che L è continua in zero, cioè vale (2). □

2.5.5 Definizione. Se L è lineare e continua chiamiamo *norma di L* il numero

$$\|L\| := \inf \{M : \text{vale la disuguaglianza (2.4)}\}$$

Quindi (come si può vedere facilmente)

$$\|L(x)\|_2 \leq \|L\| \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{X}_1$$

e $\|L\|$ è il più piccolo M per cui vale tale disuguaglianza. Si può anche vedere che

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1=1} \|Lx\|_2$$

Vediamo che la norma sopra introdotta per le applicazioni lineari ha effettivamente le proprietà introdotte in 2.2.6.

1. Chiaramente $\|L\| \geq 0$, se poi $\|L\| = 0$ si ha $\|Lx\|_2 \leq 0\|x\|_1$ per ogni x , cioè $Lx = 0$ per ogni x e dunque $L = 0$.
2. Sia c uno scalare. Allora $\|(cL)(x)\|_2 = |c|\|L(x)\|_2 \leq |c|\|L\|\|x\|_1$ per cui $M = |c|\|L\|$ verifica $\|(cL)(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$. Dato che $\|cL\|$ è la più piccola costante con questa proprietà si ha $\|cL\| \leq |c|\|L\|$. Se $c = 0$ abbiamo finito; se $c \neq 0$, per lo stesso motivo $\|L\| = \|c^{-1}cL\| \leq |c^{-1}|\|cL\|$ e quindi, moltiplicando per $|c|$, troviamo $|c|\|L\| \leq \|cL\|$. Mettendo insieme le due disuguaglianze si ha $\|cL\| = |c|\|L\|$.
3. Siano L_1 e L_2 due applicazioni lineari continue. Per ogni x si ha

$$\begin{aligned} \|(L_1 + L_2)(x)\|_2 &= \|L_1(x) + L_2(x)\|_2 \leq \|L_1(x)\|_2 + \|L_2(x)\|_2 \leq \\ &\|L_1\|_2\|x\|_1 + \|L_2\|_2\|x\|_1 = (\|L_1\| + \|L_2\|)\|x\|_1 \end{aligned}$$

Quindi $M = \|L_1\| + \|L_2\|$ verifica $\|(L_1 + L_2)(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$. Dato che $\|L_1 + L_2\|$ è la più piccola costante con questa proprietà si ha $\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|$.

Abbiamo quindi verificato che lo spazio vettoriale

$$\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) := \{L : \mathbb{X}_1 \rightarrow \mathbb{X}_2 : L \text{ è lineare e continua}\}$$

è uno spazio normato (quindi si può introdurre una nozione di convergenza di applicazioni lineari a una applicazione lineare).

Se poi $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}$, e quindi prese due applicazioni lineari L_1, L_2 da \mathbb{X} in \mathbb{X} ha senso considerare la composizione L_1L_2 , si ha:

$$\|L_1L_2\| \leq \|L_1\|\|L_2\|.$$

Infatti per ogni x si ha $\|L_1L_2x\| \leq \|L_1\|\|L_2x\| \leq \|L_1\|\|L_2\|\|x\|$. Quindi $M = \|L_1\|\|L_2\|$ verifica $\|L_1L_2x\| \leq M\|x\|$. Dato che $\|L_1L_2\|$ è la più piccola costante con questa proprietà si ha $\|L_1L_2\| \leq \|L_1\|\|L_2\|$.

2.5.6 Esempio. Consideriamo una applicazione lineare da \mathbb{R}^N in \mathbb{R}^M . Indichiamo con \hat{e}_j i versori di \mathbb{R}^N ($j = 1, \dots, N$); allora il vettore $L\hat{e}_j$ avrà M componenti che indichiamo con $a_{1,j}, \dots, a_{M,j}$. In questo modo risulta definita una matrice $M \times N$ \mathbf{A} di elementi $a_{i,j}$ per $i = 1, \dots, M$ e $j = 1, \dots, N$. Usando la linearità di L si vede facilmente che

$$L(x_1, \dots, x_N) = (y_1, \dots, y_M) \Leftrightarrow y_i = \sum_{j=1}^N a_{i,j}x_j \quad \text{per } i = 1, \dots, M$$

Questo significa che L si rappresenta mediante il prodotto matriciale della matrice \mathbf{A} per in vettore \mathbf{x} (convenendo di rappresentare i vettori come colonne, cioè come matrici $N \times 1$ (in partenza e $M \times 1$ in arrivo).

Poniamo $\bar{A} := \max\{|a_{i,j}| : i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N\}$. Si vede allora che

$$|L(\mathbf{x})| \leq |L(\mathbf{x})|_1 = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}|_1 = \sum_{i=1}^M \left| \sum_{j=1}^N a_{i,j}x_j \right| \leq M\bar{A}|\mathbf{x}|_1 \leq NM\bar{A}|\mathbf{x}|$$

(abbiamo usato ripetutamente (2.1)). Ne segue che L è continua e che $\|L\| \leq NM\bar{A}$. Se identifichiamo le matrici $M \times N$ con i vettori di \mathbb{R}^{NM} possiamo notare che \bar{A} corrisponde a $|\mathbf{A}|_\infty$ precedentemente introdotta. Quindi possiamo scrivere $\|\mathbf{A}\| \leq NM|\mathbf{A}|_\infty$. Quindi qualunque applicazione lineare da \mathbb{R}^N in \mathbb{R}^M è continua.

Notiamo che vale anche $|\mathbf{A}|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|$ dato che per ogni $i = 1, \dots, M$ e ogni $j = 1, \dots, N$

$$|a_{i,j}| = |(\mathbf{A}\hat{e}_j)_i| \leq |\mathbf{A}\hat{e}_j| \leq \|\mathbf{A}\|\|\hat{e}_j\| = \|\mathbf{A}\|$$

e quindi la stessa disuguaglianza vale prendendo il massimo di tutti gli $|a_{i,j}|$.

Ne segue che $\|\cdot\|$ e $|\cdot|_\infty$ sono norme equivalenti. Dunque la convergenza indotta sulle matrici $N \times N$ dalla norma delle corrispondenti applicazioni lineari coincide con quelle che si ottengono vedendo le matrici come MN -uple di numeri. In sostanza una successione di matrici \mathbf{A}_n tende ad una matrice \mathbf{A} (nel senso delle applicazioni lineari) se e solo se ogni componente di \mathbf{A}_n tende alla corrispondente componente di \mathbf{A} .

Quanto fatto per \mathbb{R}^N vale per gli spazi di dimensione finita.

2.5.7 Teorema. *Ogni applicazione lineare tra spazi normati di dimensione finita è continua.*

Vedremo che, come per la completezza, anche quest'ultimo teorema non vale più negli spazi di dimensione infinita. Cominciamo però col mostrare qualche esempio di applicazione continua tra spazi di funzioni.

2.5.8 Esempio. Consideriamo lo spazio $\mathbb{X} = \mathcal{C}^0(A)$ con la norma $\|f\| = \|f\|_{\infty, A}$. Se x_0 è un punto prefissato in A si può considerare

$$F_1(f) := f(x_0) \quad \text{per ogni } f \text{ in } \mathcal{C}^0(A)$$

e quindi $F_1 : \mathcal{C}^0(A) \rightarrow \mathbb{R}$; si può anche prendere $F_2 : \mathcal{C}^0(A) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F_2(f) := \int_A f(x) dx \quad \text{per ogni } f \text{ in } \mathcal{C}^0(A)$$

(in questo caso lo spazio di arrivo è lo spazio unidimensionale $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$). Entrambe queste due applicazioni sono lineari (come è ovvio verificare). Esse sono anche continue. Per la continuità di F_1 basta osservare che

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$$

(la convergenza uniforme implica quella puntuale). Per quanto riguarda la continuità di F_2 , questa è il contenuto del teorema 2.1.10.

Notiamo che se $f \in \mathcal{C}^0(A)$

$$|F_1(f)| = |f(x_0)| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \|F_1\| \leq 1$$

e analogamente

$$|F_2(f)| = \left| \int_A f(x) dx \right| \leq |A| \|f\|_\infty \Rightarrow \|F_2\| \leq |A|.$$

Si potrebbe dimostrare che valgono le eguaglianze, cioè che:

$$\|F_1\| = 1, \quad \|F_2\| = |A|.$$

2.5.9 Esempio. Riprendiamo lo spazio $\mathbb{X} = \mathcal{C}^0([0, 1])$, ma consideriamo in \mathbb{X} la norma $\|\cdot\|_1$ dell'esempio 2.2.14. Consideriamo di nuovo le applicazioni $F_1, F_2 : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dell'esempio precedente.

Si vede facilmente che F_2 è continuo, infatti per ogni funzione continua f si ha:

$$|F_2(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1.$$

Quindi, con quest'altra norma, si ha $\|F_2\| \leq 1$ (e si potrebbe vedere che $\|F_2\| = 1$).

Invece F_1 **non è continuo**. Consideriamo infatti le funzioni f_n definite da

$$f_n(t) := \begin{cases} 1 - nt & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

È chiaro che f_n sono continue, dunque $f_n \in \mathbb{X}$, e che

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^{1/n} (1 - nt) dt = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$$

e quindi le $f_n \rightarrow \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0}$ indica la funzione nulla. Però $F_1(f_n) = f_n(0) = 1$ mentre $F_1(\mathbf{0}) = 0$ e dunque non è vero che $F_1(f_n) \rightarrow F_1(\mathbf{0})$, cioè F_1 non è continua.

2.5.10 Osservazione. I due esempi precedenti mostrano che $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ **non sono norme equivalenti** su $\mathcal{C}^0(A)$. Questo per la verità era già chiaro dato che $\mathcal{C}^0(A)$ è completo rispetto a $\|\cdot\|_\infty$, mentre non lo è rispetto a $\|\cdot\|_1$.

2.5.11 Esempio. Si può considerare l'insieme \mathbb{X}_1 :

$$\mathbb{X}_1 := \{f \in \mathcal{C}^0(A) : f \text{ è derivabile}\}$$

che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X} = \mathcal{C}^0(A)$, dato che f, g derivabili implica $\alpha f + \beta g$ derivabile. Allora l'applicazione $D : \mathbb{X}_1 \rightarrow \mathbb{X}$ definita da $D(f) := f'$ (D è l'operazione di derivazione) è lineare dato che

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g)$$

Però D non è continua, se si considera (sia in partenza che in arrivo) la distanza introdotta sopra. Per vederlo prendiamo $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Si vede facilmente che $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ e quindi $f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$. Inoltre $f_n \in \mathbb{X}_1$ per ogni n . Però $f_n'(x) = \cos(nx)$ e quindi $\|D(f_n)\| = \|f_n'\| = 1$. Questo implica che non può essere $D(f_n) \xrightarrow{\text{unif}} D(0)$, altrimenti $1 = \|D(f_n)\| \rightarrow \|D(0)\| = 0$, che è assurdo.

Abbiamo trovato quindi un altro esempio di applicazione lineare non continua. Inoltre se si rilegge l'esempio 2.1.11 in termini astratti si vede che esso dice che il sottospazio \mathbb{X}_1 non è chiuso in \mathbb{X} (altra proprietà che sarebbe vera se fossimo in dimensione finita)

2.6 Serie di potenze

In questo paragrafo useremo i risultati precedenti per studiare serie del tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Per motivi che saranno chiari nei prossimi paragrafi risulta conveniente ambientare il problema nei numeri complessi, quindi, almeno all'inizio, i coefficienti a_k saranno dei numeri complessi, $z_0 \in \mathbb{C}$ e faremo variare la z in \mathbb{C} . Ad un certo punto però (quando

entreranno in gioco le derivate) ci metteremo in \mathbb{R} , supponendo $a_n, z_0, z \in \mathbb{R}$; utilizzeremo allora, per “ragioni estetiche” x_0 e x al posto di z_0 e z .

Nel resto del paragrafo z_0 sarà un numero fissato. Per $R > 0$ consideriamo il disco aperto di centro z_0 e raggio R :

$$B(R) = B_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

e il corrispondente disco chiuso

$$\bar{B}(R) = \bar{B}_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}.$$

Fatte queste premesse possiamo scrivere subito il seguente enunciato:

2.6.1 Teorema. *Siano (a_n) una successione in \mathbb{C} e poniamo:*

$$M := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(per esempio supponiamo che esista il limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ e chiamiamolo M). In generale $M \in [0, +\infty]$. Poniamo

$$\bar{R} := \begin{cases} +\infty & \text{se } M = 0, \\ \frac{1}{M} & \text{se } M \in]0, \infty[, \\ 0 & \text{se } M = +\infty. \end{cases}$$

Allora:

1. per ogni R con $0 < R < \bar{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente su $\bar{B}(R)$; questo implica che per ogni z in $B(\bar{R})$ la serie converge puntualmente in z ;
2. per ogni z fuori da $\bar{B}(\bar{R})$ la serie non converge in z .

Si noti che non si dice nulla (e la situazione è diversa caso per caso) di cosa succeda sulla “buccia” $S(\bar{R}) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \bar{R}\}$.

Dimostrazione. Sia $R < \bar{R}$ e applichiamo il teorema 2.4.2 alla serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sull'insieme $A = \bar{B}(R)$. Si ha:

$$\|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \bar{B}(R)} = \sup_{z \in \bar{B}(R)} |a_n(z - z_0)^n| = |a_n|R^n.$$

Se applichiamo alla serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \bar{B}(R)}$ il criterio della radice troviamo:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \bar{B}(R)}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|R} = MR = \frac{R}{\bar{R}} < 1$$

e dunque la serie converge (questo funziona se $\bar{R} \neq 0, \infty$, ma è chiaro che se $\bar{R} = 0$ il teorema non dice nulla dato che non ci sono R ammissibili, mentre se $\bar{R} = \infty$, cioè se $M = 0$, tutti gli $R > 0$ vanno bene perchè $MR = 0$).

Dalla convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(z - z_0)^n\|_{\infty, \bar{B}(R)}$ si deduce la convergenza uniforme della serie di funzioni sul disco chiuso $\bar{B}(R)$.

In particolare, se $z \in B(\bar{R})$ (disco aperto) si può prendere un raggio R con $|z - z_0| < R <$

\bar{R} ; dato che la serie converge uniformemente su $\bar{B}(R)$ deve convergere in z .
Infine se $|z - z_0| > \bar{R}$ si ha:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| = M |z - z_0| = \frac{|z - z_0|}{\bar{R}} > 1$$

che, sempre per il criterio della radice, implica che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ non converge. \square

2.6.2 Definizione. Data la successione (a_n) in \mathbb{C} chiamiamo *raggio di convergenza* della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ il numero \bar{R} (in $[0, +\infty]$) ottenuto nel teorema (2.6.1).

Risulta quindi definita la funzione $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ per ogni z in $B(\bar{R})$ (se $\bar{R} = 0$ $B(\bar{R}) = \emptyset$; se $\bar{R} = +\infty$ $\bar{R} = \mathbb{C}$).

2.6.3 Proposizione. *La funzione*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

è (ben definita e) continua nel disco aperto $B(\bar{R})$, dove \bar{R} è il raggio di convergenza della serie.

Dimostrazione. La tesi è una conseguenza del teorema 2.1.9, dato che le somme parziali $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$ sono ovviamente continue e convergono uniformemente a f su ogni disco chiuso $B(R)$, se $R > \bar{R}$. \square

D'ora in poi consideriamo il caso a coefficienti reali. In realtà tutto quanto stiamo per dire vale allo stesso modo nel caso generale, ma per poter vedere ciò avremmo bisogno di sapere cosa è la derivata in z di una funzione di variabile complessa. Quando faremo tale definizione risulterà chiaro che tutta la teoria delle serie di potenze si ambienta naturalmente nei numeri complessi.

Quindi ora $a_n \in \mathbb{R}$ e $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$; naturalmente il raggio di convergenza \bar{R} è definito come prima, però se vogliamo prendere la $z = x$ reale dobbiamo considerare $x \in]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$.

2.6.4 Proposizione. *La funzione $f :]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

è di classe C^∞ , cioè ha derivata k -esima continua per qualunque k intero. Inoltre vale la formula

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k} \quad \forall z \text{ in }]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[\quad (2.5)$$

dove la serie (delle derivate) scritta destra ha lo stesso raggio di convergenza \bar{R} della serie di partenza.

Dimostrazione. Verifichiamo che la serie delle derivate k -esime ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza. Per questo ricordiamo che $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ (e allora anche $\sqrt[n]{n-1} \rightarrow 1, \dots, \sqrt[n]{n-k} \rightarrow 1$). Dunque se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = M$ si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n n(n-1) \cdots (n-k+1)|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n-1} \cdots \sqrt[n]{n-k+1} = M.$$

Quindi i raggi di convergenza sono gli stessi. A questo punto la tesi segue per il corollario (2.4.4). \square

2.6.5 Osservazione. Se mettiamo $x = x_0$ nella formula (2.5), otteniamo:

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k! \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

cioè f (in $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$) è eguale alla sua serie di Taylor.

2.6.6 Esempio. Consideriamo la serie $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Allora il raggio di convergenza è 1 dato che $\sqrt[n]{1} \rightarrow 1$. Peraltro si sa che:

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z} \quad \text{se } |z| < 1$$

e quindi $f(z) = \frac{1}{1-z}$ per ogni z del disco aperto $\{|z| < 1\}$ (in particolare $f(x) = \frac{1}{1-x}$ se $-1 < x < 1$).

Consideriamo ora un'altra serie $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Anche questa serie ha raggio di convergenza 1 dato che $\sqrt[n]{1/n} \rightarrow 1$. Notiamo che $\frac{d}{dx} \frac{x^n}{n} = x^{n-1}$ e dunque

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = f(x).$$

In altre parole g è una primitiva di f , cioè $g(x) = \ln(1-x) + c$ per c costante. Ma calcolando tutto in $x = 0$ si trova $0 = g(0) = c$ e quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x) \quad \text{se } -1 < x < 1.$$

Consideriamo ancora una terza serie: $h(x) := \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. Anch'essa ha raggio di convergenza 1 perché $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. Si ha

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = x f'(x)$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{se } -1 < x < 1.$$

2.6.7 Esempio. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$. Questa serie ha raggio di convergenza

1. In questo caso in verità non esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ perché si ha:

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ 0 & \text{se } n = 2k + 1 \end{cases}$$

però il massimo limite fa 1, come si vede passando alla sottosuccessione $\sqrt[2k]{|a_{2k}|}$. Si vede facilmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{se } |z| < 1.$$

Quindi la serie converge a $\frac{1}{1+z^2}$ per le z in $\{|z| < 1\}$. Guardando la cosa dal punto di vista di \mathbb{R} la cosa è abbastanza strana, dato che non si capisce come c'entri il numero 1 con la funzione $\frac{1}{1+x^2}$, che è ben definita su tutto \mathbb{R} . Dal punto di vista complesso invece è chiaro che il raggio di convergenza non può essere più di 1 dato che i e $-i$, che hanno modulo uno, sono delle singolarità per $\frac{1}{1+z^2}$.

Abbiamo visto prima che data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ essa definisce una funzione f sull'intervallo $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$ ed f è somma della sua serie di Taylor. Procediamo a rovescia e assegnamo una funzione f di classe \mathcal{C}^∞ , definita per esempio su $]x_0 - r, x_0 + r[$, e poniamo $a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. È spontaneo chiedersi se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (costruita a partire da f) sia convergente in $]x_0 - r, x_0 + r[$ e soprattutto se converga a f . Il seguente esempio mostra che, in generale, ciò non è vero.

2.6.8 Esempio. Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} e^{1/|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

È chiaro che f è continua in zero, dato che $e^{-|x|^{-1}} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$.

Per $x > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^{-2}e^{x^{-1}} \\ f''(x) &= (2x^{-3} + x^{-4})e^{x^{-1}} \\ f^{(3)}(x) &= (-6x^{-4} - 4x^{-5} - 2x^{-5} - x^{-6})e^{x^{-1}} = (-6x^{-4} - 6x^{-5} - x^{-6})e^{x^{-1}} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= P_k(x^{-1})e^{x^{-1}} \end{aligned}$$

per un opportuno polinomio P_k . Dato che l'esponenziale "vince" su ogni polinomio si trova

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x) = 0$$

qualunque sia k intero. Lo stesso si trova facendo il limite da sinistra per cui $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k intero. Quindi

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k.$$

In altri termini f si annulla in zero più rapidamente di qualunque potenza. Tutto questo implica che la serie di Taylor associata a f nel punto zero ha tutti i coefficienti nulli e dunque converge uniformemente ovunque alla funzione zero. Dato che $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$ si ha che $f(x)$ non è eguale alla somma della sua serie di Taylor in nessuna $x \neq 0$.

Vedremo nel seguito che questo dipende dal fatto che stiamo ragionando in \mathbb{R} , se infatti guardassimo la funzione in \mathbb{C} essa non sarebbe \mathcal{C}^1 in un intorno di zero.

Nel seguente enunciato si dà un criterio (sufficiente ma non necessario) per far funzionare le cose.

2.6.9 Proposizione. *Supponiamo che $f :]x_0 - r, x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ sia di classe \mathcal{C}^∞ e supponiamo che esista una costante K tale che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq K^n \quad \text{per tutte le } x \text{ in }]x_0 - r, x_0 + r[$$

Allora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{in }]x_0 - r, x_0 + r[$$

Dimostrazione. Per la formula di Taylor con resto di Lagrange si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

dove $\xi_{n,x}$ è un opportuno punto, che dipende da n e da x , che si trova sul segmento tra x_0 e x . Facendo tendere n all'infinito:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{K^{n+1} r^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

(il fattoriale va all'infinito più velocemente dell'esponenziale) e dunque la serie converge a $f(x)$. \square

2.6.10 Esempio. La funzione $f(x) := e^x$ è somma della sua serie di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

per tutti gli x in \mathbb{R} . Infatti, fissato $R > 0$

$$\max_{x \in [-R, R]} |f^{(k)}(x)| = \max_{x \in [-R, R]} |e^x| = e^R$$

(che è una costante indipendente da n). Per (2.6.9) la tesi vale su $[-R, R]$ e per l'arbitrarietà di R la tesi è vera ovunque.

Nello stesso modo si può verificare che

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

per tutti gli x in \mathbb{R} .

Notiamo che, da quanto fatto in precedenza, si deduce che tutte tre le serie scritte sopra hanno raggio di convergenza infinito e quindi definiscono delle funzioni da \mathbb{C} in \mathbb{C} (mettendo $z \in \mathbb{C}$ al posto di $x \in \mathbb{R}$). In particolare

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

è ben definita per ogni z in \mathbb{C} . Facciamo vedere che $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$. Infatti applicando il teorema 1.2.11 (dimostrato per serie a termini reali, ma valido anche per termini complessi con la stessa dimostrazione) si ha:

$$\begin{aligned} f(z_1)f(z_2) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_2^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^n}{n!} = f(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Quindi, se $x, y \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= f(x)f(iy) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \\ &= e^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = e^x (\cos(y) + i \sin(y)). \end{aligned}$$

e dunque, con la definizione tradizionale di e^z per z in \mathbb{C} , troviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z.$$

Si potrebbe in realtà *definire* le funzioni e^z , $\sin(z)$ e $\cos(z)$ mediante le serie scritte sopra, e *dimostrare* che la formula $e^{x+iy} := e^x(\cos(y) + i \sin(y))$ è una conseguenza di tali definizioni.

2.7 L'esponenziale di una matrice

Come abbiamo visto, se A è una matrice $N \times N$, è definita la norma di A , vedendo A come applicazione lineare da \mathbb{R}^N in \mathbb{R}^N e quindi è definita una convergenza nello spazio delle matrici $N \times N$: $A_n \rightarrow A$ se e solo se $\|A_n - A\| \rightarrow 0$. Abbiamo anche visto che tale convergenza si traduce nella convergenza componente per componente, cioè

$$A_n \rightarrow A \Leftrightarrow a_{ij}^{(n)} \rightarrow a_{ij}$$

dove $a_{ij}^{(n)}$ indica la componente ij di A_n e a_{ij} indica la componente ij di A .

La stessa cosa si può fare se A è una matrice $N \times N$ a componenti complesse - vedendo A come applicazione lineare da \mathbb{C}^N a \mathbb{C}^N .

Data A matrice $N \times N$ a coefficienti $a_{ij} \in \mathbb{C}$ consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

che converge perché è assolutamente convergente; infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = e^{\|A\|}.$$

Tale serie si chiama *esponenziale della matrice* A e si indica con e^A . Quindi $\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$ converge a e^A nelle matrici e cioè componente per componente.

2.7.1 Proposizione. Se $AB = BA$ (A e B commutano) allora

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}.$$

Prima della dimostrazione premettiamo un risultato analogo al teorema (1.2.11), la cui dimostrazione si potrebbe ottenere imitando gli stessi argomenti usati nella dimostrazione di (1.2.11)

2.7.2 Proposizione. Siano (A_n) e (B_n) due successioni di matrici tali che $A_n B_m = B_m A_n$ per ogni m, n e supponiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < +\infty, \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\| < +\infty.$$

Poniamo

$$C_n := \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}.$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} \|C_n\| < +\infty$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \right).$$

Dimostrazione di (2.7.1). Applichiamo la proposizione sopra al caso $A_n = \frac{A^n}{n!}$ e $B_n = \frac{B^n}{n!}$. È chiaro che le ipotesi sono verificate e quindi:

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = e^{A+B} \end{aligned}$$

□

2.7.3 Proposizione. Se M è una matrice invertibile, allora

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^A M.$$

Dimostrazione. Poniamo $A_1 := M^{-1}AM$. Allora

$$A_1^n = (M^{-1}AM)(M^{-1}AM) \cdots (M^{-1}AM) = M^{-1}AA \cdots AM = M^{-1}A^n M.$$

e quindi

$$\sum_{k=0}^n \frac{A_1^k}{k!} = M^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) M$$

da cui segue facilmente la tesi. □

Supponiamo che la matrice A sia diagonale, allora

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N^n \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene facilmente

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}$$

Più in generale supponiamo che A abbia N autovalori reali distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Allora si può trovare una base di N autovalori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ (cioè $A\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$). Se allora prendiamo la matrice $M = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N)$ le cui colonne sono i vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$, cioè la matrice M tale che $M\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i$ allora si vede facilmente che M è invertibile e che

$$M^{-1}AM\hat{\mathbf{e}}_i = M^{-1}A\mathbf{e}_i = M^{-1}\lambda_i\mathbf{e}_i = \lambda_i\hat{\mathbf{e}}_i$$

e quindi $D := M^{-1}AM$ è la matrice diagonale avente gli autovalori di A sulla diagonale principale. Da questo fatto segue che $A = MDM^{-1}$ da cui

$$e^A = e^{MDM^{-1}} = Me^DM^{-1} = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_N} \end{pmatrix} M^{-1}.$$

Vediamo ora come si descrive in generale l'esponenziale di una matrice 2×2

2.7.4 Esempio. Sia A una matrice complessa 2×2 . Dato che gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico che è di secondo grado si possono presentare due casi.

1. A ha due autovalori distinti λ_1 e λ_2 in \mathbb{C} e dunque ha due autovettori \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 linearmente indipendenti in \mathbb{C}^2 . Allora, come abbiamo appena visto, se $M = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

$$D := M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$e^A = e^{MDM^{-1}} = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} M^{-1}$$

2. A ha un solo autovalore reale λ (che deve essere una radice doppia del polinomio caratteristico). Sia \mathbf{e} un autovettore di A e consideriamo $M = (\mathbf{e}, \mathbf{w})$ dove \mathbf{w} è un qualunque vettore linearmente indipendente da \mathbf{e} . Allora si vede che

$$T := M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

per un opportuno γ reale. Infatti $T\hat{\mathbf{e}}_1 = M^{-1}AM\hat{\mathbf{e}}_1 = M^{-1}A\mathbf{e} = M^{-1}\lambda\mathbf{e} = \lambda\hat{\mathbf{e}}_1$, da cui si ricava $t_{11} = \lambda$ e $t_{21} = 0$, e quindi T è triangolare superiore. Inoltre $t_{22} = \lambda$ dato che λ è l'unico autovalore.

Allora

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \gamma n \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

come si verifica facilmente ragionando induttivamente. Ne segue che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} & \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \gamma e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$$

Quindi, ragionando come prima

$$e^A = Me^TM^{-1} = M \begin{pmatrix} e^\lambda & \gamma e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} M^{-1}$$

Supponiamo ora che A sia a coefficienti reali e cerchiamo una versione reale dei risultati appena trovati. In questo caso si possono distinguere tre casi.

1. A ha due autovalori reali distinti. Ragionando come nel caso complesso si trovano due autovalori \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 linearmente indipendenti e reali. Posto $M = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ si trova

$$e^A = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} M^{-1}$$

2. A ha un solo autovalore λ , che deve per forza essere reale. Anche questo caso si tratta nello stesso modo del secondo caso di prima, con l'unica differenza che $\lambda, \gamma, \mathbf{e}$ e \mathbf{w} sono tutti reali.
3. A non ha autovalori reali. Questo significa che il polinomio caratteristico ha due radici complesse coniugate $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (essendo un polinomio di secondo grado a coefficienti reali). È anche facile verificare che i corrispondenti autovalori \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 formano una coppia di vettori coniugati, cioè

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x} + i\mathbf{y}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{x} - i\mathbf{y}$$

dove $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Non è difficile verificare che \mathbf{x} e \mathbf{y} sono linearmente indipendenti dato che \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 lo sono. Per quanto visto nel punto (1) del caso complesso si ha $e^A \mathbf{e}_1 = e^\lambda \mathbf{e}_1$, $e^A \mathbf{e}_2 = e^{\bar{\lambda}} \mathbf{e}_2$. Definiamo ora la matrice reale $M = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ che è invertibile, essendo le sue due colonne linearmente indipendenti. Si ha:

$$\begin{aligned} M^{-1} e^A M \hat{\mathbf{e}}_1 &= M^{-1} e^A \mathbf{x} = M^{-1} e^A \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = M^{-1} \frac{1}{2} (e^\lambda \mathbf{e}_1 + e^{\bar{\lambda}} \mathbf{e}_2) = \\ &= M^{-1} \frac{e^\alpha}{2} (e^{\beta i} \mathbf{e}_1 + e^{-\beta i} \mathbf{e}_2) = M^{-1} e^\alpha (\cos(\beta) \mathbf{x} - \sin(\beta) \mathbf{y}) = \\ &= e^\alpha (\cos(\beta) \hat{\mathbf{e}}_1 - \sin(\beta) \hat{\mathbf{e}}_2); \\ M^{-1} e^A M \hat{\mathbf{e}}_2 &= M^{-1} e^A \mathbf{y} = M^{-1} e^A \frac{1}{2i} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = M^{-1} \frac{1}{2i} (e^\lambda \mathbf{e}_1 - e^{\bar{\lambda}} \mathbf{e}_2) = \\ &= M^{-1} \frac{e^\alpha}{2i} (e^{\beta i} \mathbf{e}_1 - e^{-\beta i} \mathbf{e}_2) = M^{-1} e^\alpha (\sin(\beta) \mathbf{x} + \cos(\beta) \mathbf{y}) = \\ &= e^\alpha (\sin(\beta) \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos(\beta) \hat{\mathbf{e}}_2). \end{aligned}$$

Quindi

$$M^{-1} e^A M = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

cioè

$$e^A = M \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} M^{-1}.$$

Consideriamo ora la funzione

$$t \mapsto e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Tale funzione è una serie di potenze in t , anche se formalmente non ricade nella teoria svolta, perché i coefficienti di t non sono numeri ma matrici. In effetti la funzione sopra associa ad ogni t reale una matrice $N \times N$. Non è difficile verificare però che le cose vanno come nel caso di serie numeriche (si potrebbe per esempio ragionare componente per componente) e quindi si ha che il raggio di convergenza è infinito (come era già chiaro

dato che e^{tA} è definito come somma della sua serie per ogni t) e inoltre si può derivare sotto il segno di serie ottenendo

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} = Ae^{tA}$$

(la derivata va intesa, per esempio, componente per componente). Quindi la funzione $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}(N, N)$, $M(t) := e^{tA}$ dove $\mathcal{M}(N, N)$ denota lo spazio delle matrici $N \times N$ verifica l'equazione

$$M'(t) = AM(t)$$

Da quanto detto si deduce il risultato seguente

2.7.5 Proposizione. *Siano A una matrice $N \times N$ a coefficienti complessi, $B : I \rightarrow \mathbb{C}^N$ una funzione continua, dove I è un intervallo in \mathbb{R} , siano t_0 in I e Y_0 in \mathbb{C}^n . Allora l'unica soluzione Y del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} Y'(t) &= AY(t) + B(t) \\ Y(t_0) &= Y_0 \end{cases}$$

è data da

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} \left(Y_0 + \int_{t_0}^t e^{-(\tau-t_0)A} B(\tau) d\tau \right) \quad (2.6)$$

Dimostrazione. L'unicità della soluzione è un fatto standard nella teoria dei sistemi di equazioni differenziali lineari. L'unica cosa da vedere è che la Y definita sopra risolve l'equazione. In effetti:

$$Y(t_0) = e^{0A} \left(Y_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{-(\tau-t_0)A} B(\tau) d\tau \right) = Y_0$$

e

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \left(\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} \right) \left(Y_0 + \int_{t_0}^t e^{-(\tau-t_0)A} B(\tau) d\tau \right) + \\ &e^{(t-t_0)A} \frac{d}{dt} \left(Y_0 + \int_{t_0}^t e^{-(\tau-t_0)A} B(\tau) d\tau \right) = \\ &Ae^{(t-t_0)A} \left(Y_0 + \int_{t_0}^t e^{-(\tau-t_0)A} B(\tau) d\tau \right) + \\ &e^{(t-t_0)A} (e^{-(t-t_0)A} B(t)) = AY(t) + B(t) \end{aligned}$$

□

Tutto quanto detto fin'ora fa capire come il calcolo dell'esponenziale di una matrice rivesta importanza nella risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Vediamo un esempio (che non è per nulla esaustivo).

2.7.6 Esempio. Consideriamo il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_3 = t \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_3 = 0 \\ y_3' &= \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 = 2 \end{cases}, \quad (2.7)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0.$$

Per risolverlo siamo condotti a studiare l'esponenziale della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che A è simmetrica; questo semplifica alcune cose in quanto, come noto, A deve avere tre autovalori reali corrispondenti a tre autovettori linearmente indipendenti, anzi tra loro ortogonali. Troviamo gli autovalori cercando le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 1 - \lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \lambda)(1 - \lambda)\lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \lambda) - \frac{1}{2}(1 - \lambda) + \lambda = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) \end{aligned}$$

Le radici di P sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. Cerchiamo gli autovettori. Per quanto riguarda $\lambda = \lambda_1 = -1$ dobbiamo risolvere

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \\ -x + 2y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + z = 0 \end{cases}$$

che equivale a $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}z$; conviene considerare un autovalore di modulo uno, imponendo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ da cui $2z^2 = 1$ e quindi

$$\mathbf{e}_1 = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Con calcoli analoghi si trovano gli autovettori relativi a λ_2 e λ_3 :

$$\mathbf{e}_2 = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo allora $M := (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$; essendo le sue colonne dei vettori **ortonormali** la sua inversa è pari alla sua trasposta quindi, indicando con D la matrice diagonale di autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ si ha:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e $M^{-1}AM = D \Leftrightarrow A = MDM^{-1}$. Quindi

$$e^{tA} = e^{tMDM^{-1}} = Me^{tD}M^{-1} = M \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} M^{-1}$$

e facendo gli opportuni calcoli si trova

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^t}{4} + \frac{e^{2t}}{2} & \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^t}{4} - \frac{e^{2t}}{2} & -\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{4} + \frac{\sqrt{2}e^t}{4} \\ \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^t}{4} - \frac{e^{2t}}{2} & \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^t}{4} + \frac{e^{2t}}{2} & -\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{4} + \frac{\sqrt{2}e^t}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{4} + \frac{\sqrt{2}e^t}{4} & -\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{4} + \frac{\sqrt{2}e^t}{4} & \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2} \end{pmatrix}.$$

La conoscenza di e^{tA} ci permette di risolvere l'equazione omeogenea per un qualunque dato iniziale. Se per esempio vogliamo risolvere

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3 = 0 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3 = 0 \\ y_3' = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 = 0 \end{cases}, \quad (2.8)$$

$$y_1(0) = -2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1,$$

si ha:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(2+\sqrt{2})}{4}e^{-t} - \frac{(2-\sqrt{2})}{4}e^t - e^{2t} \\ -\frac{(2+\sqrt{2})}{4}e^{-t} - \frac{(2-\sqrt{2})}{4}e^t + e^{2t} \\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-t} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}e^t \end{pmatrix}$$

Se invece vogliamo risolvere il problema iniziale 2.7, dobbiamo applicare la formula 2.6 con $t_0 = 0$,

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Facendo i calcoli si ottiene

$$e^{-\tau A}B(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{t-2\sqrt{2}}{4}e^\tau + \frac{t+2\sqrt{2}}{4}e^{-\tau} + \frac{t}{2}e^{-2\tau} \\ \frac{t-2\sqrt{2}}{4}e^\tau + \frac{t+2\sqrt{2}}{4}e^{-\tau} - \frac{t}{2}e^{-2\tau} \\ -\frac{\sqrt{2}t-4}{4}e^\tau + \frac{\sqrt{2}t+4}{4}e^{-\tau} \end{pmatrix}.$$

Integrando tra 0 e t e rimoltiplicando per e^{tA} si trova la soluzione

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\sqrt{2}}{4}e^{-t} + \frac{1+2\sqrt{2}}{4}e^t + e^{2t} - \frac{5+8\sqrt{2}+2t}{8} \\ \frac{1+2\sqrt{2}}{4}e^{-t} + \frac{1+2\sqrt{2}}{4}e^t - e^{2t} - \frac{3+8\sqrt{2}-2t}{8} \\ -\frac{4+\sqrt{2}}{4}e^{-t} + \frac{4+\sqrt{2}}{4}e^t - \sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

MORALE: questi calcoli li fa meglio un computer - l'importante è però avere capito cosa si deve fare e come sia importante capire la natura di e^{tA} .

Capitolo 3

Funzioni olomorfe

3.1 Richiami sui campi e gli integrali di linea

3.1.1 Definizione. Ricordiamo innanzitutto che una *curva* in \mathbb{R}^N è una applicazione γ da un intervallo I di \mathbb{R} a valori in \mathbb{R}^N (cioè $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$). Se $I = [a, b]$ allora i punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ si chiamano gli *estremi* della curva γ . Si dice *supporto* di γ l'immagine $\gamma(I)$ della curva.

Possiamo immaginare che I sia un intervallo di tempi e che γ descriva la legge del moto di un punto in \mathbb{R}^N . Notiamo che parlando di una curva non teniamo conto solo dei punti $\gamma(t)$ percorsi al variare di t in I , ma di tutta l'applicazione γ ; per esempio, dati due punti P_0 e P_1 in \mathbb{R}^N , $\gamma_1(t) := tP_0 + (1-t)P_1$ e $\gamma_2(t) := tP_1 + (1-t)P_0$, per $t \in [0, 1]$ hanno entrambe come supporto il segmento tra P_0 e P_1 , ma γ_2 è *percorsa in senso inverso* rispetto a γ_1 .

Se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$ diremo che γ è *una curva chiusa*.

Dato che le curve sono delle applicazioni è chiaro che ha senso dire che γ è continua oppure C^1 (sull'intervallo di definizione).

Diremo che γ è C^1 a tratti se γ è continua su tutto I e l'intervallo I si può suddividere in un numero finito di sottointervalli I_1, \dots, I_k tali che γ è di classe C^1 sulla chiusura di ognuno di tali sottointervalli.

3.1.2 Definizione. Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ indichiamo con $-\gamma$ la curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ definita da $\gamma_1(t) := \gamma(a + b - t)$ (cioè la curva γ percorsa a ritroso).

3.1.3 Definizione. Date due curve $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ diremo che γ_2 è una *riparametrizzata* di γ_1 se $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ per ogni t in $[a_2, b_2]$, dove $\varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ è un'applicazione C^1 con $\varphi(a_2) = a_1$ e $\varphi(b_2) = b_1$. La φ viene detta *riparametrizzazione* o *cambio di parametro*.

3.1.4 Osservazione. Se γ_2 è una riparametrizzata di γ_1 , allora le due curve hanno lo stesso supporto. Il viceversa non è vero, come si potrebbe vedere considerando

$$\gamma_1(t) := (\cos(t), \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \gamma_2(t) := (\cos(t), \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

dato che γ_1 percorre **una volta** la circonferenza unitaria in \mathbb{R}^2 mentre γ_2 percorre **due volte** la stessa circonferenza.

3.1.5 Definizione. Diciamo che due curve γ_1 e γ_2 sono *consecutive* se $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2(b) = \gamma_1(b)$. In questo caso si può definire $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ponendo $\gamma : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $T := (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)$ e

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b], \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [(b, c)]. \end{cases}$$

Più in generale diciamo che $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono consecutive se $\gamma_2(b_1) = \gamma_1(a_2)$. È semplice vedere che allora si può riparametrizzare le due curve in modo che siano consecutive nel senso di prima e si può definire la somma prendendo la somma delle riparametrizzate. Dunque la somma di due curve non è definita in modo univoco ma ciò non darà fastidio in quanto tutte le operazioni che faremo sulle curve sono indipendenti dalle riparametrizzazioni.

È immediato verificare che se γ_1 e γ_2 sono C^1 a tratti anche $\gamma_1 + \gamma_2$ lo è.

Se invece γ_1 e γ_2 hanno lo stesso secondo estremo ($\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$) è chiaro che possiamo considerare $\gamma_1 - \gamma_2 := \gamma_1 + (-\gamma_2)$.

3.1.6 Osservazione. È abbastanza semplice verificare che γ è C^1 a tratti se e solo se essa è continua e se $\gamma = \gamma + \dots + \gamma_k$ dove $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sono k curve C^1 consecutive.

3.1.7 Definizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva C^1 chiamiamo *lunghezza* di γ l'integrale:

$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Se poi γ è solo C^1 a tratti poniamo

$$l(\gamma) := l(\gamma_1) + \dots + l(\gamma_k)$$

dove $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sono k curve C^1 consecutive tali che $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$. Si può verificare che l'ultima definizione è ben posta in quanto dipende solo da γ .

3.1.8 Proposizione (invarianza per riparametrizzazioni). *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva di classe C^1 in Ω . Allora*

- Se γ_1 è una riparametrizzata di γ allora $l(\gamma) = l(\gamma_1)$;
- $l(\gamma) = l(-\gamma)$.

Le stesse proprietà sono vere se γ è C^1 a tratti.

3.1.9 Proposizione. *Se $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ sono tutte C^1 a tratti allora*

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

3.1.10 Proposizione. *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva C^1 a tratti si può sempre trovare una riparametrizzazione $\varphi : [0, L] \rightarrow [a, b]$ tale che la riparametrizzata $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$ ha (modulo della) velocità costante, anzi $|\gamma_1(t)| = 1$ per ogni t ; si vede allora che $L = l(\gamma) = l(\gamma_1)$ e si dice che γ_1 è parametrizzata nella lunghezza d'arco.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso C^1 e supponiamo anche che la velocità γ' sia sempre diversa da zero (la dimostrazione si può fare anche in questo caso ma è più complicata). Si prenda $\lambda(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$. Si vede che $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, L]$, dove $L = l(\gamma)$, che $\lambda'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ e quindi si può considerare $\varphi(s) := \lambda^{-1}(s)$, $\varphi : [0, L] \rightarrow [a, b]$ e per le formule di derivazione $\varphi'(s) = \frac{1}{\lambda'(\varphi(s))} = \frac{1}{|\gamma'(\varphi(s))|}$. Ne segue:

$$\left| \frac{d}{ds} \gamma(\varphi(s)) \right| = |\gamma'(\varphi(s))| |\varphi'(s)| = \frac{|\gamma'(\varphi(s))|}{|\gamma'(\varphi(s))|} = 1$$

□

3.1.11 Definizione. Sia Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^N . Ricordiamo che Ω si dice *aperto* se il suo complementare è chiuso o se, equivalentemente, per ogni punto \mathbf{x}_0 di Ω esiste un disco $D(\mathbf{x}_0, r) = \{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$, con $r > 0$, tale che $D(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$.

Ricordiamo anche che il *bordo* o *frontiera* di Ω è l'insieme

$$\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \forall \rho > 0 \quad (\exists z_1 \in \Omega : |z - z_1| < \rho), (\exists z_2 \notin \Omega : |z - z_2| < \rho)\}$$

mentre la *chiusura* di Ω è l'insieme $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

Un sottoinsieme aperto Ω di \mathbb{R}^N si dice *connesso* se per ogni coppia di punti \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 in Ω esiste una curva in Ω $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ che congiunge \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}_1 (cioè tale che $\gamma(a) = \mathbf{x}_0$ e $\gamma(b) = \mathbf{x}_1$).

D'ora in poi consideriamo un sottoinsieme Ω aperto e connesso in \mathbb{R}^N . Inoltre, se \mathbf{x} e \mathbf{y} sono due vettori di \mathbb{R}^N indichiamo con $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ il *prodotto scalare* tra \mathbf{x} e \mathbf{y} definito da $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$.

3.1.12 Definizione. Se D è un sottoinsieme di \mathbb{R}^N chiameremo *campo* in D un'applicazione $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^N$. Possiamo pensare che per ogni \mathbf{x} in D $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ rappresenti una forza applicata nel punto \mathbf{x} (dunque \mathbf{f} rappresenta un campo di forze in D). Nel seguito considereremo sempre dei campi che siano continui nel loro insieme di definizione e aggiungeremo volta per volta delle ulteriori proprietà. La situazione tipica, che d'ora in poi assumiamo (a meno di precisazioni in senso contrario) è $D = \bar{\Omega}$, quindi $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è continuo in $\bar{\Omega}$. Spesso servirà ipotizzare che \mathbf{f} sia differenziabile in Ω .

Diciamo che il campo \mathbf{f} è *conservativo* se esiste una funzione $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla F(\mathbf{x})$ per ogni \mathbf{x} in Ω e cioè

$$f_i(x_1, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, \dots, x_N) \quad \forall (x_1, \dots, x_N) = \mathbf{x} \in \Omega;$$

se tale F esiste si dirà che F è un *potenziale* per il campo \mathbf{f} .

3.1.13 Definizione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ una curva di classe C^1 in $\bar{\Omega}$ e sia $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo continuo in $\bar{\Omega}$. Chiameremo *integrale* di \mathbf{f} su γ l'espressione:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma := \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

La definizione si può estendere al caso di curve C^1 a tratti: se I_1, \dots, I_k sono come nella definizione 3.1.1, allora

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma := \sum_{i=1}^k \int_{I_i} \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

L'integrale di \mathbf{f} su γ si chiama anche il *lavoro* del campo \mathbf{f} sulla curva γ .

3.1.14 Proposizione (invarianza per riparametrazioni). *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ una curva di classe C^1 in $\bar{\Omega}$ e sia \mathbf{f} un campo continuo su $\bar{\Omega}$.*

- Se γ_1 è una riparametrizzata di γ allora:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

- Si ha:

$$\int_{-\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma = - \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

Le stesse proprietà sono vere se γ è C^1 a tratti.

3.1.15 Proposizione. Se γ_1 e γ_2 sono curve consecutive in $\bar{\Omega}$ e C^1 a tratti, e se \mathbf{f} è un campo continuo in $\bar{\Omega}$ allora

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma$$

3.1.16 Proposizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ è una curva C^1 a tratti in $\bar{\Omega}$ ed \mathbf{f} è un campo continuo in $\bar{\Omega}$, allora

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma \right| \leq \|\mathbf{f}\|_{\infty, \gamma([a, b])} l(\gamma). \quad (3.1)$$

3.1.17 Teorema. Sia dato $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continuo in $\bar{\Omega}$. Sono equivalenti i tre fatti seguenti.

1. \mathbf{f} è un campo conservativo.
2. Date due curve C^1 a tratti γ_1 e γ_2 in $\bar{\Omega}$ aventi gli stessi estremi, il lavoro di \mathbf{f} sulle due curve è lo stesso:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

3. Data una curva chiusa in $\bar{\Omega}$, C^1 a tratti γ , il lavoro di f su γ è nullo:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma = 0.$$

Inoltre se il campo è conservativo ed F è un potenziale si ha:

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \int_{\gamma_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\gamma$$

dove \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} sono due qualunque punti di $\bar{\Omega}$ e $\gamma_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}$ è una qualunque curva in $\bar{\Omega}$ che congiunge \mathbf{x}_0 a \mathbf{x} .

3.1.18 Definizione. Dato un campo $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 diremo che \mathbf{f} è irrotazionale in Ω se per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ in Ω si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, \dots, x_N) \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

3.1.19 Proposizione. Se \mathbf{f} è conservativo in Ω allora \mathbf{f} è irrotazionale in Ω .

Il viceversa della proposizione sopra non vale come mostra l'esempio

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) := \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Tale campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dato che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x_1, x_2) &= \frac{-(x_1^2 + x_2^2) + x_2 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_1, x_2) &= \frac{(x_1^2 + x_2^2) - x_1 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

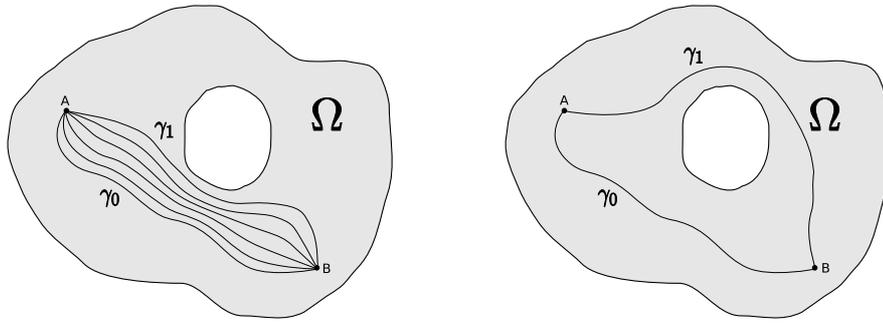


Figura 3.1: Curve omotope e non omotope a estremi fissi

ma se consideriamo la curva $\gamma(t) = (\rho \cos(t), \rho \sin(t))$, per $t \in [0, 2\pi]$ e per $\rho > 0$ fissato è chiaro che γ è una curva chiusa e che $\gamma'(t) = (-\rho \sin(t), \rho \cos(t))$ (γ descrive la circonferenza di raggio ρ percorsa una volta in senso antiorario). Allora:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \frac{(-\rho \sin(t))(-\rho \sin(t)) + \rho \cos(t)\rho \cos(t)}{\rho^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))} dt = 1$$

e quindi \mathbf{f} non può essere conservativo.

3.1.20 Definizione. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ due curve in $\bar{\Omega}$ aventi gli stessi estremi: $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \mathbf{A}$ e $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \mathbf{B}$. Diremo che γ_0 e γ_1 sono *omotope a estremi fissi* in $\bar{\Omega}$ se esiste una applicazione $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega}$ (detta *omotopia a estremi fissi* tra γ_0 e γ_1) tale che H è continua (sul rettangolo $[a, b] \times [0, 1]$) e si ha:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma_0(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(t, 1) &= \gamma_1(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(a, s) &= \mathbf{A}, H(b, s) = \mathbf{B} & \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tutto ciò significa che si può passare con continuità da γ_0 a γ_1 mediante una famiglia di curve in $\bar{\Omega}$ ($\gamma_s(t) = H(t, s)$), tutte con primo estremo in \mathbf{A} e secondo estremo in \mathbf{B} (vedi la figura 3.1).

3.1.21 Definizione. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ due curve chiuse in $\bar{\Omega}$ $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ e $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$. Diremo che γ_0 e γ_1 sono *omotope come curve chiuse* in $\bar{\Omega}$ se esiste una applicazione $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega}$ (detta *omotopia di curve chiuse* tra γ_0 e γ_1) tale che H è continua (sul rettangolo $[a, b] \times [0, 1]$) e si ha:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma_0(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(t, 1) &= \gamma_1(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(a, s) &= H(b, s) & \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tutto ciò significa che si può passare con continuità da γ_0 a γ_1 mediante una famiglia di curve chiuse in $\bar{\Omega}$ ($\gamma_s(t) = H(t, s)$) (vedi la figura 3.2).

3.1.22 Teorema. Sia $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo continuo in $\bar{\Omega}$ e C^1 in Ω con \mathbf{f} irrotazionale.

1. Allora se due curve γ_0 e γ_1 in $\bar{\Omega}$ aventi gli stessi estremi sono omotope in $\bar{\Omega}$ (a estremi fissi) si ha che:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

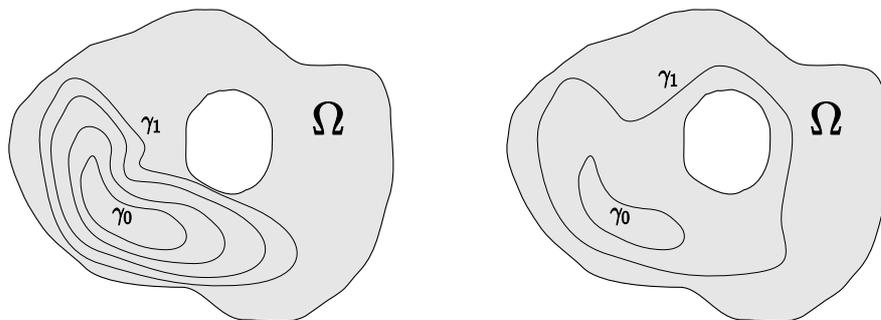


Figura 3.2: curve chiuse omotope e non omotope

2. Analogamente se γ_0 e γ_1 sono due curve chiuse in $\bar{\Omega}$ tra di loro omotope in $\bar{\Omega}$ (come curve chiuse) si ha che:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

3.1.23 Definizione. Diciamo che Ω è *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa γ in $\bar{\Omega}$ è omotopa (tra le curve chiuse) ad una curva costante (è chiaro che $\gamma_0(t) = \text{costante}$ è una curva chiusa). Questa che si è definita è una proprietà di Ω che si può interpretare dicendo che Ω non ha buchi - vedi la figura 3.3.

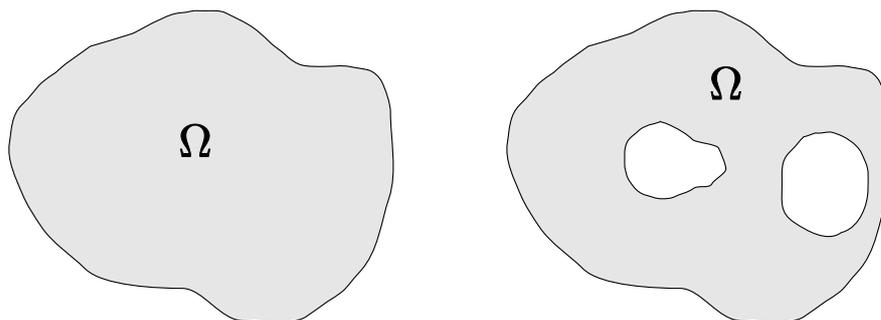


Figura 3.3: un aperto semplicemente connesso e uno non semplicemente connesso

Dato che è ovvio verificare che $\int_{\gamma_0} \mathbf{f} \cdot d\gamma = 0$ se γ_0 è una curva costante si deduce subito il seguente risultato

3.1.24 Teorema. Se Ω è semplicemente connesso allora ogni campo irrotazionale in Ω è conservativo in Ω .

3.1.25 Esempio. Supponiamo che Ω sia *stellato* rispetto a un suo punto, cioè che esista un \mathbf{x}_0 in Ω tale che per ogni altro punto \mathbf{x} di Ω il segmento tra \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} sia completamente contenuto in Ω (da \mathbf{x}_0 si “vedono” tutti i punti di Ω). Allora Ω è semplicemente connesso dato che presa una qualunque curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ si può definire

$$H(t, s) := s\gamma(t) + (1 - s)\mathbf{x}_0$$

che è un'omotopia tra γ e la curva costante $\gamma_0(t) = \mathbf{x}_0$.

In questo modo si può vedere che $\Omega = \mathbb{R}^N$ oppure $\Omega = B(\mathbf{x}_0, R)$ sono semplicemente connessi.

Viceversa l'esempio considerato in precedenza mostra che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso in quanto si è trovato un campo irrotazionale in \mathbb{R}^2 che non è conservativo.

3.2 Funzioni olomorfe

D'ora in poi consideriamo Ω un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{C} . Introduciamo prima di tutto la nozione di integrale sulle curve in campo complesso.

3.2.1 Definizione. Si dice curva in Ω una applicazione $\gamma : I \rightarrow \Omega$, dove I è un intervallo. Se si vede \mathbb{C} come \mathbb{R}^2 , mediante l'identificazione $x + iy \leftrightarrow (x, y)$ allora tale nozione è la stessa introdotta nel paragrafo precedente e quindi non ripetiamo tutte le definizioni e proprietà già viste.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ è una curva C^1 e se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiamo l'integrale di f su γ ponendo

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

dove si è usato il prodotto tra i numeri complessi $f(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$. Analogamente si può definire l'integrale se γ è C^1 a tratti.

3.2.2 Osservazione. Se $f(z) = f(x + iy) = f_1(x + iy) + if_2(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ e se $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, allora:

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) - f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t) + i(f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t) + f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t)).$$

Dunque

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \mathbf{h}_1 \cdot d\boldsymbol{\gamma} + i \int_{\gamma} \mathbf{h}_2 \cdot d\boldsymbol{\gamma} \quad (3.2)$$

dove

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2), \quad \mathbf{h}_1 = (f_1, -f_2), \quad \mathbf{h}_2 = (f_2, f_1).$$

Avendo ricondotto l'integrale complesso a degli integrali di campo è chiaro che tutte le proprietà del paragrafo precedente (comportamento rispetto alle riparametrazioni, additività rispetto alle curve, ecc.) rimangono ancora validi.

3.2.3 Definizione. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Diremo che f è derivabile in un punto z_0 di Ω se esiste il limite del rapporto incrementale:

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

che verrà ovviamente detto la *derivata* di f in z_0 . Se f è derivabile in tutti i punti di Ω ed f' è continua diremo che f è *olomorfa* su Ω .

La seguenti proprietà si possono dimostrare facilmente imitando le analoghe dimostrazioni per le funzioni derivabili di una variabile reale.

3.2.4 Proposizione. 1. Se f è derivabile in z_0 allora è continua in z_0 .

2. Se f, g sono derivabili in z_0 allora $f + g$ e fg sono derivabili in z_0 e

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \quad (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Se inoltre $g(z_0) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ è derivabile in z_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

3. Se f è derivabile in z_0 e g è derivabile in $w_0 := f(z_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in z_0 e $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0)$.
4. Se f è derivabile in z_0 , γ è una curva tale che $\gamma(t_0) = z_0$ e γ è derivabile in t_0 , allora $f \circ \gamma$ è (una curva) derivabile in t_0 e $(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0)$.

3.2.5 Esempio. Prendiamo $f(z) = z^n$ per n intero positivo. Allora:

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z_0^{n-1-k} = n z_0^{n-1}$$

per $z \rightarrow z_0$. Quindi f è olomorfa in \mathbb{C} e $f'(z) = n z^{n-1}$.

Se poi si prende la stessa espressione di f con $n < 0$ si ha $f(z) = \frac{1}{z^{-n}}$ e allora, se $z \neq 0$:

$$f'(z) = \frac{-(-n z^{-n-1})}{(z^{-n})^2} = \frac{n z^{-n-1}}{z^{-2n}} = n z^{n-1}.$$

Dunque per $n < 0$ f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e la formula trovata sopra vale anche per tutti gli n interi relativi.

Vediamo ora un importantissimo risultato che caratterizza le funzioni olomorfe.

3.2.6 Teorema. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e scriviamo $f(z) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$, dove $z = x + iy$. Allora sono equivalenti i due fatti seguenti.

1. f è olomorfa in Ω .
2. f_1, f_2 sono di classe C^1 e valgono le seguenti eguaglianze, dette condizioni di Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y)$$

per ogni $z = x + iy$ in Ω .

Se tali proprietà sono vere si ha inoltre $f' = \frac{\partial}{\partial x} f = -i \frac{\partial}{\partial y} f$, cioè:

$$f'(x + iy) = \frac{\partial}{\partial x} (f_1(x, y) + i f_2(x, y)) = -i \frac{\partial}{\partial y} (f_1(x, y) + i f_2(x, y)), \quad (3.3)$$

Dimostrazione. (1) \Rightarrow (2) Sia $z = x + iy$ in Ω . Dato che $f'(z)$ esiste possiamo calcolarlo mediante uno qualunque dei due limiti seguenti in cui h è reale:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}$$

Quindi

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_1(x+h, y) - f_1(x, y)) + i(f_2(x+h, y) - f_2(x, y))}{h} = \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y),$$

e anche

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_1(x, y+h) - f_1(x, y)) + i(f_2(x, y+h) - f_2(x, y))}{ih} = -i \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y).$$

Se ne ricava che le derivate parziali esistono continue (per la continuità di f') e che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann. Se ne ricavano anche le due formule (3.3).

(2) \Rightarrow (1) Se le derivate parziali esistono continue allora (teorema del differenziale totale) f_1 e f_2 sono differenziabili, cioè

$$\begin{aligned} f_1(x+h, y+k) &= f_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y)h + \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y)k + r_1(h, k) \\ f_2(x+h, y+k) &= f_2(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y)h + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y)k + r_2(h, k) \end{aligned}$$

dove r_1 e r_2 vanno a zero più velocemente di $|(h, k)|$, cioè:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r_1(h, k)}{|(h, k)|} = 0, \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r_2(h, k)}{|(h, k)|} = 0.$$

Da ciò, usando le condizioni di Cauchy-Riemann si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{h+ik} &= \\ \frac{f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y)}{h+ik} + i \frac{f_2(x+h, y+k) - f_2(x, y)}{h+ik} &= \\ \frac{\frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y)h + \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y)k + r_1(h, k)}{h+ik} + i \frac{\frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y)h + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y)k + r_2(h, k)}{h+ik} &= \\ \frac{\frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y)h - \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y)k + r_1(h, k)}{h+ik} + i \frac{\frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y)h + \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y)k + r_2(h, k)}{h+ik} &= \\ \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) + \frac{r_1(h, k) + r_2(h, k)}{h+ik} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y), \end{aligned}$$

e dunque esiste $f'(z)$ e vale la prima delle (3.3) (analogamente si trova la seconda), da cui si ha che f' è continua. \square

3.2.7 Esempio. Consideriamo la funzione $f(z) = e^z$ e facciamo vedere che è olomorfa su \mathbb{C} . Questo si può fare in vari modi. Mostriamo per esempio che f è derivabile a partire dalla definizione di derivata. Conviene ricordare che $e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$; se ne deduce allora:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} - 1}{z} = \frac{\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n!}}{z} = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^{n-1}}{n!} \rightarrow 1$$

e quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 1$. Ricordando poi le proprietà dell'esponenziale:

$$\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0} \frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0} \rightarrow e^{z_0}$$

e quindi f è olomorfa e $f'(z) = e^z$.

Un altro modo è di scrivere le componenti di e^z $f_1(x, y) = e^x \cos(y)$ e $f_2(x, y) = e^x \sin(y)$, verificare le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) &= e^x \cos(y) & , & & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) &= -e^x \sin(y) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) &= e^x \sin(y) & , & & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y) &= e^x \cos(y) \end{aligned}$$

e dedurre che $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y) = e^z$.

3.2.8 *Osservazione.* Le condizioni di Cauchy-Riemann dicono che i campi $\mathbf{h}_1 = (f_1, -f_2)$ e $\mathbf{h}_2 = (f_2, f_1)$ sono irrotazionali. Ne segue che se f è olomorfa e se γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi e sono omotope a estremi fissi in Ω , allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

3.2.9 Teorema. *Sia $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua su $\bar{\Omega}$ che indichiamo con $f(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ e siano $\mathbf{h}_1 = (f_1, -f_2)$ e $\mathbf{h}_2 = (f_2, f_1)$. Allora i fatti seguenti sono equivalenti.*

1. \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 sono conservativi.
2. Esiste una funzione olomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $F'(z) = f(z)$ per ogni z in Ω (cioè una primitiva di f).
3. Date due curve C^1 a tratti γ_1 e γ_2 in $\bar{\Omega}$ aventi gli stessi estremi si ha:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

4. Data una curva chiusa in $\bar{\Omega}$, C^1 a tratti γ , si ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Inoltre se F è una primitiva per f si ha

$$F(z) = F(z_0) + \int_{\gamma_{z_0, z}} f(\zeta) d\zeta$$

per ogni coppia z_0 e z di punti in Ω e per una qualunque curva $\gamma_{z_0, z}$ di estremi z_0 e z .

Dimostrazione. (2) \Rightarrow (1). Se \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 sono conservativi esistono due potenziali H_1 e H_2 per \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 rispettivamente, cioè:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} H_1(x, y), & -f_2(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} H_1(x, y) \\ f_2(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} H_2(x, y), & f_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} H_2(x, y) \end{aligned}$$

Ne segue che, posto $F(z) = H_1(x, y) + iH_2(x, y)$, F verifica le condizioni di Cauchy-Riemann, dunque è olomorfa. Inoltre per le formule (3.3):

$$F'(z) = \frac{\partial}{\partial x} H_1(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} H_2(x, y) = f_1(x, y) + if_2(x, y) = f(z)$$

(1) \Rightarrow (2). Sia F una primitiva di f e scriviamo $F(z) = F_1(x, y) + iF_2(x, y)$. Per le (3.3), se $F'(z) = f(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ deve risultare:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y), & f_2(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) \\ f_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y), & f_2(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) \end{aligned}$$

Questo significa che

$$\nabla F_1 = \mathbf{h}_1, \quad \nabla F_2 = \mathbf{h}_2$$

e quindi abbiamo trovato due potenziali per \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 rispettivamente.

(1) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) sono conseguenze del teorema 3.1.17 e dell'osservazione 3.2.2.

L'ultima affermazione infine segue dall'ultima tesi del teorema 3.1.17, dato che, se γ congiunge z_0 a z :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (\mathbf{h}_1 + i\mathbf{h}_2) \cdot d\gamma = H_1(z) - H_1(z_0) + i(H_2(z) - H_2(z_0)) = F(z) - F(z_0)$$

□

3.2.10 Osservazione. L'ultima affermazione del teorema precedente si deduce anche direttamente osservando che per ogni curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ tra due punti z_0 e z si ha $(F \circ \gamma)' = (F' \circ \gamma)\gamma'$ e dunque per la definizione di integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z) - F(z_0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2.11 Proposizione. Sia $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ continua in $\bar{\Omega}$ e olomorfa in Ω . Allora:

$$f'(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega \Leftrightarrow f \text{ è costante in } \bar{\Omega}.$$

Dimostrazione. La parte \Rightarrow è un'evidente conseguenza della definizione di derivata. La parte \Leftarrow segue dalla formula (3.4). □

3.2.12 Proposizione. Se Ω è semplicemente connesso e se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora esiste una primitiva F di f . In particolare l'integrale di f su una qualunque curva dipende γ solo dagli estremi di γ e si esprime come la differenza di F tra i due estremi.

Dimostrazione. Dato che f è olomorfa \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 sono irrotazionali. Dato che Ω è semplicemente connesso essi sono conservativi e dunque per il teorema 3.2.9 vale la tesi. □

3.2.13 Esempio. Sia n un intero relativo e sia $f(z) := z^n$.

Se $n \geq 0$ f è olomorfa su tutto \mathbb{C} e dunque essa ha una primitiva, poiché \mathbb{C} è semplicemente connesso. Si può però anche ragionare direttamente notando che $F(z) := \frac{z^{n+1}}{n+1}$ è ben definita ed è una primitiva per f come si vede immediatamente.

Se $n < 0$ f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ che **non** è semplicemente connesso. Anche in questo caso però possiamo esibire direttamente una primitiva data dalla formula $F(z) := \frac{z^{n+1}}{n+1}$,

a patto che $n \neq -1$. Quindi ogni potenza, eccetto $z^{-1} = \frac{1}{z}$, ammette primitiva.

Se $f(z) = \frac{1}{z}$ si vede che f non ha primitiva su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Per vederlo consideriamo la curva chiusa $\gamma(t) = \rho e^{it}$ per $\rho > 0$ e $t \in [0, 2\pi]$ (che descrive la circonferenza di centro zero e raggio ρ , percorsa una volta in senso antiorario) e integriamo f su γ . Si ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i. \quad (3.5)$$

Dato che tale integrale non fa zero, f non ammette primitiva (su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

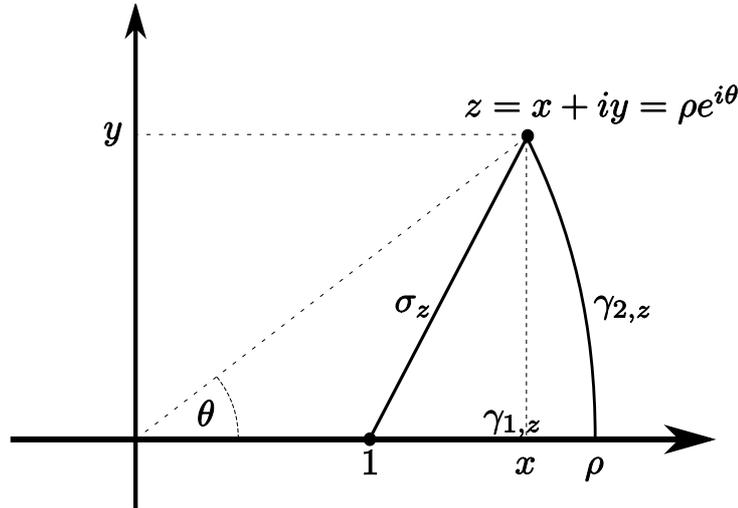


Figura 3.4: per congiungere 1 a z in $\mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$

3.2.14 Esempio. Riprendiamo la funzione $f(z) := \frac{1}{z}$. Come abbiamo visto essa non ammette primitiva in \mathbb{C} . Possiamo però considerare $\tilde{\Omega} := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ (togliamo l'asse reale negativo da \mathbb{C}). Dato che $\tilde{\Omega}$ è semplicemente connesso (da $z = 1$ si vedono tutti i punti di $\tilde{\Omega}$!) esiste una primitiva F per f definita su $\tilde{\Omega}$ che possiamo definire per esempio come:

$$F(z) = \int_{\sigma_z} \frac{dz}{z}, \quad \sigma_z(t) := tz + (1-t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

(σ_z è il segmento che congiunge 1 a z). Notiamo che con questa scelta $F(1) = 0$. Con questa definizione è però complicato calcolare F (vedi sotto). Conviene invece rappresentare $z = \rho e^{i\theta}$ con $-\pi < \theta < \pi$ (cosa possibile in modo univoco visto che abbiamo escluso i numeri reali negativi) e prendere

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z}$$

dove $\gamma_z := \gamma_{1,z} + \gamma_{2,z}$ e $\gamma_{1,z}, \gamma_{2,z} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Omega}$ sono definite da (vedi la figura)

$$\gamma_{1,z}(t) := t\rho + 1 - t, \quad \gamma_{2,z}(t) := \rho e^{it\theta}.$$

Allora

$$F(z) = \int_{\gamma_{1,z}} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_{2,z}} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\rho - 1}{t(\rho - 1) + 1} dt + \int_0^1 \frac{i\theta \rho e^{i\theta t}}{\rho e^{i\theta t}} dt =$$

$$[\ln((\rho - 1)t + 1)]_0^1 + i\theta [t]_0^1 = \ln(\rho) + i\theta$$

Proviamo, a mo' di verifica, a calcolare l'integrale sul segmento. Se $z = x + iy$ si ha $\sigma_z(t) = 1 + t(x - 1) + ity$ per $0 \leq t \leq 1$, da cui:

$$\int_{\sigma_z} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{(x-1) + iy}{1 + t(x-1) + ity} dt = \int_0^1 \frac{((x-1) + iy)(1 + t(x-1) - ity)}{(1 + t(x-1))^2 + t^2y^2} dt =$$

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{(x-1)(1 + t(x-1)) + ty^2}{(1 + t(x-1))^2 + t^2y^2} dt}_{(1)} + \underbrace{\int_0^1 \frac{iy}{(1 + t(x-1))^2 + t^2y^2} dt}_{(2)}$$

Se poniamo $A(t) := (1 + t(x - 1))^2 + t^2 y^2$ si ha $A'(t) = 2(1 + t(x - 1))(x - 1) + 2ty^2$ da cui

$$(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{A'(t)}{A(t)} dt = \left[\ln(\sqrt{A(t)}) \right]_0^1 = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \ln(\rho)$$

Se $y = 0$ il secondo integrale fa zero. Se $y \neq 0$ poniamo $B(t) := \frac{1 + t(x - 1)}{ty}$; allora $B'(t) = \frac{(x - 1)ty - (1 + t(x - 1))y}{t^2 y^2} = -\frac{1}{t^2 y}$. Dividendo per $t^2 y^2$ nel secondo integrale si trova

$$(2) = -i \int_0^1 \frac{B'(t)}{1 + B(t)^2} dt = -i [\arctan(B(t))]_0^1 = -i \arctan(x/y) + i \lim_{s \rightarrow 0^+} \arctan(y/s).$$

A questo punto notiamo che

$$\arctan(x/y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta & \text{se } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \theta & \text{se } y < 0 \end{cases}, \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \arctan(y/s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

da cui segue che $(2) = i\theta$.

Abbiamo trovato quindi *una determinazione* della primitiva di $\frac{1}{z}$ su $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Dato che $e^{F(z)} = e^{\ln(\rho) + i\theta} = \rho e^{i\theta} = z$ è spontaneo dire che $F(z)$ è una determinazione del logaritmo (naturale) di z .

Si poteva arrivare allo stesso risultato notando che, se $h(z) := \frac{e^{F(z)}}{z}$ (per z in $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$) allora

$$h'(z) = \frac{ze^{F(z)}F'(z) - e^{F(z)}}{z^2} = \frac{ze^{F(z)}(1/z) - e^{F(z)}}{z^2} = \frac{e^{F(z)} - e^{F(z)}}{z^2} = 0.$$

Dunque $h(z)$ è costante. Dato che $h(1) = e^{F(1)} = e^0 = 1$ si ha $h(z) = 1$ per ogni z , cioè $e^{F(z)} = z$ per ogni z in $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

Tutti questi discorsi si possono ripetere utilizzando $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ invece di $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$; in questo modo si troverà $F_1(\rho e^{i\theta}) = \ln(\rho) + i\theta$ per $0 < \theta < 2\pi$ che dunque è un'altra determinazione del logaritmo.

3.2.15 Definizione. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ possiamo definire $z^\alpha := e^{\alpha \ln(z)}$. Dato che questa definizione usa il logaritmo essa si potrà considerare solo su $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ oppure su $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ ed avrà anch'essa varie determinazioni a seconda di quale logaritmo si sceglie. Se α è intero si può vedere che tutte le determinazioni coincidono e si ritrova l'usuale potenza intera.

3.3 Il teorema e la formula di Cauchy

3.3.1 Definizione. Supponiamo che Ω sia un aperto connesso di \mathbb{C} . Sia $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 a tratti, dove I è un intervallo chiuso (cioè contenente i suoi estremi). Diremo che il bordo di Ω è descritto da γ se:

1. $\partial\Omega = \gamma(I)$ (cioè il bordo di Ω è il supporto di γ);
2. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ se $t_1 \neq t_2$ e t_1, t_2 sono interni a I (γ non si autointerseca, eccetto che negli estremi);

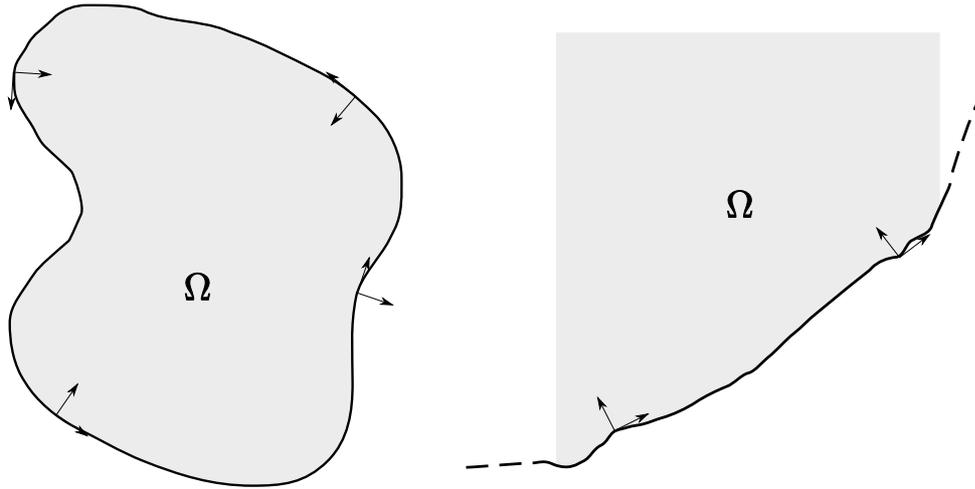


Figura 3.5: aperti con bordo descritto da una sola curva

3. Il verso di percorrenza di γ è coerente con Ω : questo significa che per ogni t in I eccetto il numero finito di punti in cui $\gamma'(t)$ non esiste, il vettore $\gamma'(t)$ “lascia Ω a sinistra” (vedi figura 3.5) ¹.

Si vede (e si potrebbe dimostrare, anche se non in modo semplice) che se è possibile descrivere il bordo di Ω in questo modo, allora Ω è semplicemente connesso e si possono presentare (solo) due casi: a) $I = [a, b]$ e γ è chiusa; b) $I = \mathbb{R}$ e il supporto di γ (dunque $\partial\Omega$) è illimitato.

Più in generale si dirà che il bordo di Ω è descritto da un numero finito di curve chiuse e C^1 a tratti $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$, dove $\gamma_j : I_j \rightarrow \mathbb{C}$ e $I_j = [a_j, b_j]$ oppure $I_j = \mathbb{R}$, se

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1, \dots, k} \gamma_j(I_j), \quad \gamma_j(I_j) \cap \gamma_h(I_h) = \emptyset \text{ per } j \neq h,$$

e se ogni γ_j verifica le (2) e (3) (vedi figura 3.6).

3.3.2 Osservazione. È chiaro che se $\partial\Omega$ è limitato le curve γ_j sono tutte del primo tipo. Si noti che $\partial\Omega$ è sicuramente limitato se Ω è limitato ma può esserlo anche se Ω è illimitato (per esempio se Ω è il complementare di un disco).

3.3.3 Definizione. Diremo che l'aperto Ω ha bordo C^1 a tratti se $\partial\Omega$ è descritto da un numero finito di curve C^1 a tratti, $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$. In tal caso, data una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, scriveremo

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz := \sum_{j=0}^k \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

¹Questa frase è chiaramente poco matematica - per renderla rigorosa bisognerebbe dire che per ogni punto del bordo c'è una coppia di vettori (v, n) tali che: a) (v, n) si ottengono come immagine dei vettori (\hat{e}_1, \hat{e}_2) mediante una rotazione; b) (v, n) variano con continuità rispetto al punto del bordo; c) v è concorde con la velocità $\gamma'(t)$ (eccetto che nei punti in cui $\gamma'(t)$ non esiste); d) seguendo n si entra nell'aperto.

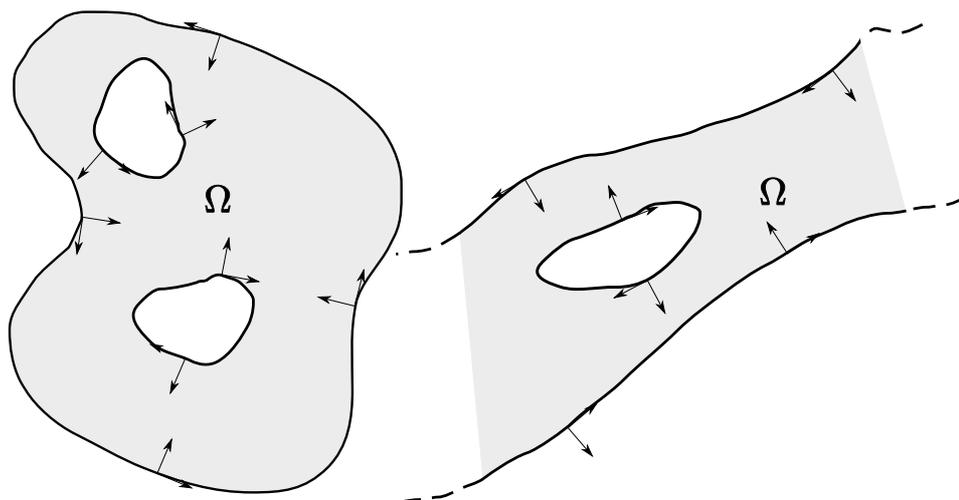


Figura 3.6: aperti con bordo descritto da più curve

È abbastanza chiaro che tale integrale è indipendente dalle curve utilizzate per descrivere il bordo.

Notiamo che stiamo definendo un integrale su $\partial\Omega$ **orientato**. Notiamo anche che Ω e $\mathcal{C}\Omega := \mathbb{C} \setminus \Omega$ hanno lo stesso bordo dal punto di vista insiemistico, ma i due bordi sono orientati in senso opposto: se $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ descrivono il bordo di Ω allora per descrivere il bordo di $\mathcal{C}\Omega$ ci vogliono $-\gamma_0, -\gamma_1, \dots, -\gamma_k$.

Diremo che un punto z_0 di $\partial\Omega$ è regolare se i punti di $\partial\Omega$ vicini a z_0 si descrivono mediante una curva $\gamma_0 :]-1, 1[\rightarrow \partial\Omega$ tale che $\gamma_0(0) = z_0$ e γ_0 è derivabile in 0. In caso contrario diremo che z_0 è uno *spigolo* di Ω .

3.3.4 Teorema (Teorema di Cauchy). *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato con bordo C^1 a tratti, e che $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ sia continua su $\bar{\Omega}$ e olomorfa in Ω . Allora:*

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0.$$

Idea di dimostrazione. Facciamo la dimostrazione “con il disegno” (vedi le figure in 3.7). Descriviamo innanzi tutto il bordo mediante $\gamma_0, \dots, \gamma_k$, che risultano tutte curve chiuse dato che Ω è limitato. Si vede che possiamo per prima cosa fare dei “tagli”, congiungendo ogni $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ a γ_0 , come nella prima figura. Poi possiamo considerare un’unica curva γ come nella seconda figura (in cui ogni taglio dà origine a due pezzi di curva, percorsi in senso opposto - nella terza figura questi pezzi sono stati distanziati per rendere meglio l’idea).

Dato che γ è una singola curva che descrive il bordo di un aperto (vedi Ω' nella terza figura) essa è omotopa a una costante (per quanto osservato prima, senza dimostrazione). Essendo f olomorfa si ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Ma è chiaro allora che l’integrale su γ è eguale alla somma degli integrali su tutte le γ_i più l’integrale sui pezzi di collegamento. Dato però che questi ultimi compaiono in coppie con

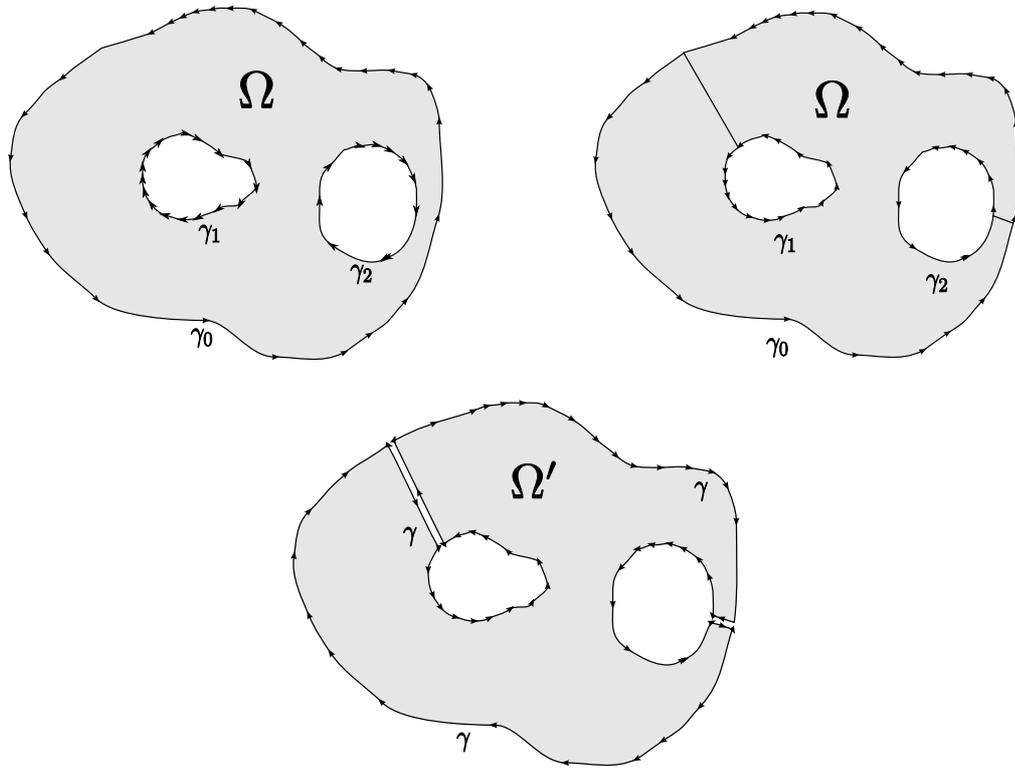


Figura 3.7: riduzione ad una sola curva

identico supporto e verso opposto, gli integrali su tali pezzi si elidono a vicenda e quindi:

$$\sum_{i=0}^k \int_{\gamma_i} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

□

3.3.5 Teorema (Formula di Cauchy). *Supponiamo che Ω sia limitato, che abbia bordo C^1 a tratti, che $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ sia continua su $\bar{\Omega}$ e olomorfa in Ω . Allora:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in \Omega. \quad (3.6)$$

Dimostrazione. Fissiamo z in Ω e prendiamo $\rho > 0$ in modo che $B(z, \rho) \subset \Omega$. Poniamo $\Omega_{z, \rho} := \Omega \setminus B(z, \rho)$. È chiaro che il bordo di $\Omega_{z, \rho}$ è descritto dalle curve che descrivono Ω più la curva che descrive $\partial B(z, \rho)$ precorsa in senso inverso. Dunque, applicando il teorema di Cauchy a $\Omega_{z, \rho}$

$$0 = \int_{\partial\Omega_{z, \rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial B_{z, \rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Allora:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B_{z, \rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B_{z, \rho}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + f(z) \int_{\partial B_{z, \rho}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Come già visto in (3.5)

$$\int_{\partial B_{z, \rho}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial B_{0, \rho}} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i.$$

Per quanto riguarda il primo integrale possiamo osservare che, essendo f derivabile in z esiste una costante M tale che

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| \leq M \quad \forall \zeta \in B(z, \rho)$$

(per ρ sufficientemente piccolo). Allora

$$\left| \int_{\partial B(z, \rho)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq Ml(\partial B(z, \rho)) = M2\pi\rho.$$

Però l'integrale sopra deve essere sempre lo stesso per tutti i ρ piccoli (purché $B(z, \rho) \subset \Omega$) perché l'integrando è olomorfo in $\Omega \setminus \{z\}$ e le curve che descrivono $\partial B(z, \rho)$ sono tutte omotope tra loro. Facendo tendere ρ a zero si deduce:

$$\int_{\partial B(z, \rho)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad \text{se } B(z, \rho) \subset \Omega$$

per cui vale la tesi. □

3.4 Analiticità delle funzioni olomorfe

3.4.1 Proposizione. *Siano f_n ed f delle funzioni continue da Ω in \mathbb{C} e sia γ una curva \mathcal{C}^1 a tratti in Ω . Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $\gamma([a, b])$ (per esempio se $f_n \rightarrow f$ uniformemente in Ω) allora*

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Dimostrazione. La tesi è una conseguenza della disuguaglianza (3.1) e della proprietà generale espressa nella proposizione 3.1 (dato che $L(f) := \int_{\gamma} f$ è una applicazione lineare). □

3.4.2 Proposizione. *Siano f_n ed f delle funzioni da Ω in \mathbb{C} olomorfe in Ω . Se $f_n \rightarrow f$ puntualmente in Ω e se esiste una $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f'_n \rightarrow g$ uniformemente su ogni insieme chiuso C con $C \subset \Omega$, (per esempio se $f_n \rightarrow f$ uniformemente in Ω), allora f è olomorfa in Ω e $f' = g$.*

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una qualunque curva \mathcal{C}^1 a tratti. Notiamo che se prendiamo come C il supporto di γ abbiamo che C è chiuso. Dato che le f_n sono olomorfe:

$$\int_{\gamma} f'_n(z) dz = f_n(\gamma(b)) - f_n(\gamma(a))$$

Passando al limite e usando la proposizione precedente:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Dato che γ è arbitraria, la tesi segue per il teorema 3.2.9. □

3.4.3 Osservazione. A causa della proposizione precedente si può estendere al caso complesso quanto visto sulle proprietà differenziali delle serie di potenze. Data una successione di numeri complessi (a_n) e un punto z_0 in \mathbb{C} la funzione

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

definita in $B(z_0, \bar{R})$, dove $\bar{R} = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$ è il raggio di convergenza, è olomorfa, anzi infinitamente derivabile su $B(z_0, \bar{R})$, si ha:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \dots (n-k+1) (z-z_0)^{n-k} \quad \forall z \in B(z_0, \bar{R}),$$

e si può dire anche che:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \forall k.$$

Inoltre tutte le serie scritte sopra convergono uniformemente in $\overline{B(z_0, R)}$ per ogni $R < \bar{R}$.

3.4.4 Definizione. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f è analitica in Ω se per ogni z_0 di Ω esiste un raggio $R > 0$ tale che $B(z_0, R) \subset \Omega$ ed f è sviluppabile in serie di potenze in $B(z_0, R)$. Detto altrimenti f è infinitamente derivabile e per ogni z_0 di Ω esiste un raggio $R > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, R).$$

3.4.5 Osservazione. Dalla definizione è chiaro che se f è analitica allora f è olomorfa. Il teorema che segue mostra che vale il viceversa. Allora la definizione di funzione analitica è in qualche senso inutile in quanto è equivalente a quella di funzione olomorfa. Viceversa tale definizione è significativa quando si parla di funzioni reali dato che, come si è già notato, non tutte le funzioni \mathcal{C}^∞ sono analitiche.

3.4.6 Teorema. Sia $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω . Allora f è analitica in Ω . Inoltre, se f è continua su $\bar{\Omega}$ e $\partial\Omega$ è \mathcal{C}^1 a tratti, vale la formula seguente (che estende la formula di Cauchy)

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta \quad \forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Dimostrazione. Sia z_0 un punto di Ω e sia $R > 0$ tale che $\overline{B(z_0, R)} \subset \Omega$. Dalla formula di Cauchy per il dominio $B(z_0, R)$ si ottiene che, per ogni z in $B(z_0, R)$:

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) &= \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0) - (z-z_0)} d\zeta = \\ &= \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)} \frac{1}{\left(1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)} d\zeta = \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Nei passaggi sopra abbiamo potuto scambiare serie con integrale perché, se si pone $g_n(\zeta) := \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}^n$, allora:

$$\|g_n\|_{\infty, \partial B(z_0, R)} = \max_{\zeta \in \partial B(z_0, R)} \left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{R} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{\infty, \partial B(z_0, R)} = \frac{1}{1 - \frac{|z-z_0|}{R}} < +\infty$$

e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge uniformemente su $\partial B(z_0, R)$, da cui:

$$\int_{\partial B(z_0, R)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\zeta) \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B(z_0, R)} g_n(\zeta) d\zeta.$$

Dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, R)$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.8)$$

Peraltro, dato che $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ è olomorfa su $\Omega \setminus B(z_0, R)$, applicando il teorema di Cauchy.

$$0 = \int_{\partial(\Omega \setminus B(z_0, R))} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta - \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

da cui gli a_n sono dati anche da

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.9)$$

Dato che $n!a_n = f^{(n)}(z_0)$ se ne deduce la tesi. \square

3.4.7 Osservazione. La dimostrazione fatta sopra mostra anche che, non appena f è olomorfa in $B(z_0, R)$, essa si sviluppa in una serie di potenze su $B(z_0, R)$ e i suoi coefficienti sono definiti da (3.8). In altri termini, definiti gli a_n come in (3.8), il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ è maggiore o eguale a R e in $B(z, R)$ la sua somma vale f .

3.4.8 Teorema (di Liouville). *Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa ed è limitata, allora f è costante.*

Dimostrazione. Sia M tale che

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Possiamo scrivere $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dove gli a_n sono dati dalla (3.9), prendendo come Ω un disco $B(0, R)$, e quindi

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\zeta \in \partial B(0, R)} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| 2\pi R = \frac{1}{R^n} \max_{\zeta \in \partial B(0, R)} |f(\zeta)| \leq \frac{M}{R^n}$$

e dato che si può prendere R arbitrariamente grande si trova $a_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, da cui la tesi. \square

3.4.9 Teorema. *Se P è un polinomio di grado maggiore o eguale a uno allora P ha una radice in \mathbb{C} .*

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che $P(z) \neq 0$ per ogni z complesso e prendiamo $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ che risulta quindi essere olomorfa su tutto \mathbb{C} . Poniamo $P(z) = a_n z^n + \text{termini di grado} < n$; si ha:

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} = \frac{1}{|a_n| |z|^n (1 + \text{infinitesimi})} \rightarrow 0 \text{ per } |z| \rightarrow \infty$$

da cui (per una semplice conseguenza del teorema di Weierstrass) si ha che f è limitata su \mathbb{C} . Ne segue che f è costante, cioè P è costante, e questo è impossibile. \square

3.5 Singolarità isolate e sviluppi in serie di Laurent

3.5.1 Definizione. Supponiamo che per ogni intero relativo n sia dato a_n in \mathbb{C} ; scriveremo $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Se è assegnato anche un numero complesso z_0 chiameremo *serie di Laurent* l'espressione $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Con questo simbolo intendiamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

Quindi una serie di Laurent è la somma di due addendi $f_1(z) + f_2(z)$, il primo è la serie di potenze $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ mentre il secondo si ottiene dalla serie di potenze $g(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n$ ponendo $f_2(z) = g(1/(z - z_0))$.

Da quanto detto per le serie di potenze si ottiene che, posto

$$\bar{R} := \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}, \quad \bar{r} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[|n|]{|a_n|},$$

risulta che $f_1(z)$ risulta definita su $B(z_0, \bar{R})$ mentre g risulta definita su $B(0, (\bar{r})^{-1})$ e dunque f_2 si può considerare su $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \bar{r}\}$.

In definitiva la serie di Laurent definisce una funzione $f(z)$ sulla corona

$$C(z_0, \bar{r}, \bar{R}) := \{z \in \mathbb{C} : \bar{r} < |z - z_0| < \bar{R}\}$$

(che può essere vuota, sia perché $\bar{R} = 0$ oppure perché $\bar{r} = \infty$, ma anche perché può essere $\bar{r} > \bar{R}$). Se però tale *corona di convergenza* non è vuota allora si ha che, per ogni $\bar{r} < r < R < \bar{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ converge uniformemente a } f(z) \text{ su } \overline{C(z_0, r, R)}$$

e quindi f è infinitamente derivabile e

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1)(z - z_0)^{n-k}$$

come si verifica facilmente derivando separatamente f_1 e f_2 .

In particolare ogni funzione ottenuta come serie di Laurent è olomorfa sulla corona di convergenza. Vediamo che vale anche il viceversa.

3.5.2 Teorema. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e supponiamo $z_0 \in \mathbb{C}$, r ed R siano tali che $0 < r < R$ e $\overline{C(z_0, r, R)} \subset \Omega$. Allora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{uniformemente su } \overline{C(z_0, r, R)}$$

dove:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \rho \in [r, R]. \quad (3.10)$$

Dimostrazione. Dalla formula di Cauchy per il dominio $C(z_0, r, R)$ si ottiene che, per ogni z in $C(z_0, r, R)$:

$$\begin{aligned}
2\pi i f(z) &= \int_{\partial C(z_0, r, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\
&= \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta - \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\
&= \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} d\zeta - \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0) \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right) - 1} d\zeta = \\
&= \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta + \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n d\zeta = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n d\zeta = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} d\zeta \right) (z - z_0)^{-n-1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n.
\end{aligned}$$

Si è sfruttato il fatto che, essendo $|z - z_0| < R = |\zeta - z_0|$ per tutti gli ζ di $\partial B(z_0, R)$ e $|z - z_0| > r = |\zeta - z_0|$ per tutti gli ζ di $\partial B(z_0, r)$ sono verificate le convergenze uniformi che permettono di invertire integrale e serie. Inoltre, nell'ultimo passaggio abbiamo potuto rimpiazzato sia gli integrali su $\partial B(z_0, r)$ che quelli su $\partial B(z_0, R)$ con quelli su $\partial B(z_0, R)$. Ciò è possibile visto che tali insiemi sono descritti da circonferenze tutte omotope tra loro in Ω e che gli integrandi sono olomorfi in Ω . Dunque

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in C(z_0, r, R)$$

dove gli a_n sono dati in (3.10).

3.5.3 Osservazione. Si può anche dimostrare che lo sviluppo in serie di Laurent è unico. Infatti se $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ in una corona $C(z_0, r, R)$, allora preso ρ con $r < \rho < R$ si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} dz &= \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^k} dz = \\
&= \int_{\partial B(z_0, \rho)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\partial B(z_0, \rho)} a_n (z - z_0)^{n-k} dz = \\
&= a_{k-1} \int_{\partial B(z_0, \rho)} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i a_{k-1}
\end{aligned}$$

(cfr. l'esempio 3.2.13) dove si è potuto invertire integrale e serie perché $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente a $f(z)$ su $\partial B(z_0, \rho)$, essendo $r < \rho < R$. Abbiamo quindi dimostrato che gli a_n sono univocamente determinati dalla formula (3.10). \square

3.5.4 Definizione. Sia z_0 un punto di \mathbb{C} diremo che z_0 è una *singolarità isolata* per la funzione f se f è olomorfa in $C(z_0, 0, R)$ per un opportuno $R > 0$. È chiaro che se z_0 è una singolarità isolata allora f si sviluppa in serie di Laurent in $C(z_0, 0, R)$ e i coefficienti di Laurent a_n sono dati dalla formula (3.10) dove $0 < \rho < R$.

3.5.5 Proposizione. *Supponiamo che z_0 sia una singolarità isolata per f . Allora sono equivalenti i due fatti seguenti.*

1. f è prolungabile in z_0 in modo che la prolungata risulta olomorfa in $B(z_0, R)$.
2. Tutti i coefficienti a_n dello sviluppo di Laurent con $n < 0$ sono nulli.

Dimostrazione. (1) \Rightarrow (2) Se f è prolungabile in z_0 allora deve esistere il limite di $f(z)$ per $z \rightarrow z_0$ e in particolare f è limitata in $B(z_0, R)$; sia quindi M tale che $|f(z)| \leq M$ per ogni z in $B(z_0, R)$. Allora da (3.10) si deduce che, se $\rho \in]0, R[$:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

Dato che ρ si può prendere arbitrariamente piccolo si deduce che $a_n = 0$ per tutti gli $n < 0$.

(2) \Rightarrow (1) È ovvio che se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ per $z \in B(z_0, \rho)$ basta porre $f(z_0) := a_0$ per definire il prolungamento di f in z_0 . \square

3.5.6 Definizione. Sia z_0 una singolarità isolata per f e indichiamo con $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i coefficienti dello sviluppo di Laurent vicino a z_0 . Diremo che

- z_0 è una singolarità *eliminabile* se $a_n = 0$ per tutti gli $n < 0$; questo equivale a dire che f si prolunga ad una funzione olomorfa in z_0 ;
- z_0 è un *polo* se esiste $k > 0$ intero tale che $a_{-k} \neq 0$ e $a_n = 0$ per tutti gli $n < -k$; l'intero k si dice allora *ordine* del polo z_0 ;
- z_0 è una *singolarità essenziale* se ci sono infiniti n negativi per cui $a_n \neq 0$.

3.5.7 Proposizione. *Una singolarità isolata z_0 è un polo di ordine k se e solo se esiste una funzione h olomorfa in $B(z_0, R)$ tale che $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k}$ e $h(z_0) \neq 0$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il “se”. Dato che z_0 è un polo di ordine k

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n+k} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-k}(z - z_0)^n.$$

e dunque la tesi è vera con $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-k}(z - z_0)^n$ (si noti che $h(z_0) = a_{-k} \neq 0$).

Dimostriamo il “solo se”. Se $h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}$ è olomorfa allora per la proposizione precedente $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$ e $0 \neq h(z_0) = b_0$; quindi

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{+\infty} b_{n+k}(z - z_0)^n$$

da cui z_0 è un polo di ordine k . \square

3.5.8 Definizione. Se z_0 è un polo di ordine k la funzione

$$h(z) := (z - z_0)^k f(z)$$

(che come abbiamo visto si prolunga in z_0) si dice *parte analitica* di f in z_0 .

3.5.9 Proposizione. Se z_0 è un polo di ordine k allora i coefficienti a_n dello sviluppo di Laurent di f in z_0 sono dati da:

$$a_n = \frac{h^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!} \quad \forall n \geq -k. \quad (3.11)$$

dove h indica la parte analitica di f in z_0 .

Dimostrazione. Supponiamo che $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ per ogni z in $C(z_0, 0, R)$. Se h è la parte analitica di f si ha:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, R),$$

e deve essere $b_n = \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}$. Ma allora, se $z \in C(z_0, 0, R)$:

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n$$

da cui segue $a_n = b_{n+k} = \frac{h^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}$ per tutti gli $n \geq -k$. □

3.5.10 Osservazione. Supponiamo che $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con P e Q olomorfe in un intorno di z_0 e $P(z_0) \neq 0$. Allora z_0 è un polo di ordine k se e solo se $Q^{(j)}(z_0) = 0$ per $j = 0, \dots, k-1$ e $Q^{(k)}(z_0) \neq 0$. Infatti se prendiamo k come indicato sopra, cioè l'ordine della prima derivata di f che non si annulla in z_0 , possiamo scrivere $Q(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ dove $a_n = \frac{Q^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Dunque $Q(z) = (z - z_0)^k Q_1(z)$ dove $Q_1(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n$ e si ha $Q_1(z_0) = a_k = \frac{Q^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$. Allora $f(z) = \frac{P(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)}$ da cui segue la tesi.

3.6 I teoremi dei residui

3.6.1 Definizione. Se z_0 è una singolarità isolata per una funzione olomorfa f ($f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$) chiamiamo *residuo di f in z_0* il coefficiente di ordine -1 dello sviluppo di Laurent di f in z_0 :

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \rho)} f(\zeta) d\zeta$$

(dove $\rho > 0$ è tale che $\overline{B(z_0, \rho)} \subset \Omega$).

3.6.2 Proposizione. Supponiamo che z_0 sia un polo di ordine k per f . Allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

dove h indica la parte analitica di f in z_0 , cioè $h(z) := (z - z_0)^k f(z)$, che per quanto visto si può estendere analiticamente a z_0 .

Dimostrazione. È conseguenza della proposizione 3.5.9, mettendo $n = -1$. \square

Il seguente risultato è assai utile nel caso dei poli semplici in quanto non richiede di calcolare la parte analitica in ogni polo.

3.6.3 Proposizione. *Supponiamo che $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, con P e Q olomorfe in un intorno di z_0 . Se $Q(z_0) = 0$ e $Q'(z_0) \neq 0$, allora z_0 è un polo di ordine 1 per f (se $P(z_0) \neq 0$, altrimenti è una singolarità eliminabile) e*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Dimostrazione. Per quanto visto nell'osservazione 3.5.10 si ha $Q(z) = Q_1(z)(z - z_0)$ con Q_1 olomorfa e $Q_1(z_0) = Q'(z_0)$. Allora la parte analitica di f è $h(z) := \frac{P(z)}{Q_1(z)}$ e

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = h(z_0) = \frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

\square

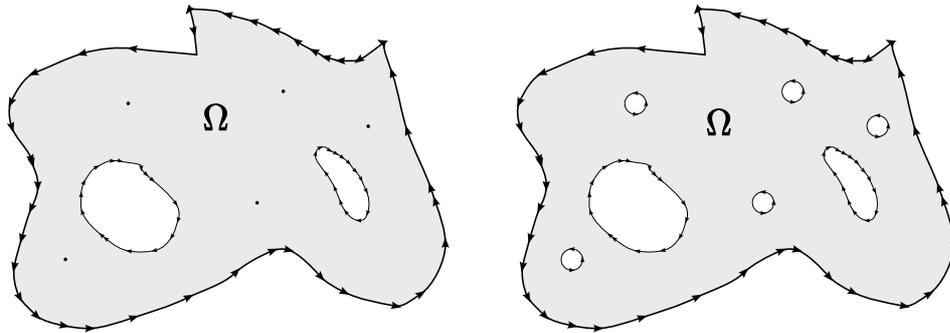


Figura 3.8: dimostrazione del teorema dei residui

3.6.4 Teorema (primo teorema dei residui). *Sia Ω un aperto limitato con bordo \mathcal{C}^1 a tratti, siano z_1, \dots, z_k punti di Ω ed $f : \bar{\Omega} \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua in $\bar{\Omega} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ e olomorfa in $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ (dunque z_1, \dots, z_k sono singolarità isolate di f). Allora:*

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Dimostrazione. Sia $\rho > 0$ tale che $\overline{B(z_j, \rho)} \subset \Omega$ per ogni $j = 1, \dots, k$ e $\overline{B(z_j, \rho)} \cap \overline{B(z_h, \rho)} = \emptyset$ se $j \neq h$. Se poniamo $\Omega_1 := \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^k \overline{B(z_j, \rho)}$ (vedi la figura 3.8) possiamo applicare il teorema di Cauchy su Ω_1 :

$$0 = \int_{\partial\Omega_1} f(z) dz = \int_{\partial\Omega} f(z) dz - \sum_{j=1}^k \int_{\partial B(z_j, \rho)} f(z) dz = \int_{\partial\Omega} f(z) dz - \sum_{j=1}^k 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j)$$

da cui la tesi. \square

3.6.5 Definizione. Sia f una funzione olomorfa su $C(0, r, \infty)$ per un qualche r (cioè su $\{|z| > r\}$). Allora possiamo considerare $g : C(0, 0, 1/r) \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $g(w) = -\frac{f(1/w)}{w^2}$. Diremo *residuo* di f all'infinito il residuo di g in zero:

$$\text{Res}(f, \infty) := \text{Res}(g, 0).$$

Diremo che f ha un polo di ordine k a ∞ se g ha un polo di ordine k in zero. Diremo anche che f è olomorfa a ∞ se g è olomorfa in zero.

3.6.6 Osservazione. Sia k un intero. Allora f ha un polo di ordine minore o eguale a k all'infinito se e solo se esistono una costante M e un raggio R tali che

$$|f(z)| \leq M|z|^{k-2} \quad \forall z \in C(0, R, \infty).$$

Inoltre f è olomorfa a ∞ se e solo se esistono una costante M e un raggio R tali che

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \forall z \in C(0, R, \infty).$$

Dimostrazione. f ha un polo di ordine minore o eguale a k all'infinito se e solo se $g(w)$ ha un polo di ordine k in zero, se e solo se esistono M ed r tali che:

$$|g(w)| \leq M|w|^{-k} \quad \forall w \in C(0, 0, r)$$

Scrivendo la definizione di g si ottiene facilmente la tesi (con $R := 1/r$). La seconda tesi si ottiene dalla prima con $k = 0$. \square

3.6.7 Proposizione. *Si ha:*

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C(0, \rho, \infty)} f(z) dz$$

per ogni $\rho > r$ (dove f è come nella definizione precedente).

Dimostrazione. Possiamo descrivere il bordo di $C(0, \rho, \infty)$ mediante $\gamma(t) = \rho e^{-it}$ per $0 \leq t \leq 2\pi$. Notiamo che $\gamma_1(t) := 1/\gamma(t) = \rho^{-1} e^{it}$ descrive $\partial B(0, \rho^{-1})$. Notiamo anche che $f(z) = -\frac{g(1/z)}{z^2}$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\partial C(0, \rho, \infty)} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{-it}) (-i\rho e^{-it}) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{g(\rho^{-1} e^{it})}{\rho^2 e^{-2it}} (i\rho e^{-it}) dt = \int_0^{2\pi} g(\rho^{-1} e^{it}) (i\rho^{-1} e^{it}) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} g(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_{\partial B(0, \rho)} g(z) dz. \end{aligned}$$

Dato che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, \rho)} g(z) dz = \text{Res}(g, 0)$$

si ha la tesi. \square

3.6.8 Teorema (secondo teorema dei residui). *Sia Ω un aperto illimitato contenente una $C(0, r, \infty)$ per $r > 0$ opportuno (in qualche senso Ω è un intorno di ∞). Supponiamo che $\partial\Omega$ sia \mathcal{C}^1 a tratti (si noti che $\partial\Omega$ è limitato), che z_1, \dots, z_k siano punti di Ω e che $f : \bar{\Omega} \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ sia continua in $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ e olomorfa in $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ (anche in questo caso z_1, \dots, z_k sono singolarità isolate di f). Allora:*

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j) + 2\pi i \text{Res}(f, \infty).$$

Dimostrazione. Prendiamo $\rho > r$ in modo che tutti gli z_1, \dots, z_k abbiano modulo minore di ρ , e poniamo $\Omega_1 := \Omega \cap B(0, \rho)$. Applicando il primo teorema dei residui su Ω_1 (che quindi contiene tutti gli z_j):

$$\int_{\partial\Omega_1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j).$$

D'altra parte si vede facilmente che:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_1} f(z) dz &= \int_{\partial\Omega} f(z) dz + \int_{\partial B(0, \rho)} f(z) dz = \\ &= \int_{\partial\Omega} f(z) dz - \int_{\partial C(0, \rho, \infty)} f(z) dz = \int_{\partial\Omega} f(z) dz - 2\pi i \text{Res}(f, \infty). \end{aligned}$$

Mettendo insieme le due formule si ha la tesi. \square

3.6.9 Osservazione. Supponiamo che $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ sia olomorfa (cioè che f abbia solo un numero finito di singolarità che sono dunque isolate). Sia Ω un aperto limitato tale che $\partial\Omega$ sia \mathcal{C}^1 a tratti e non contenga nessuna delle singolarità. Allora

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{j=1, \dots, h \\ z_j \in \Omega}} \text{Res}(f, z_j) = -2\pi i \sum_{\substack{j=1, \dots, h \\ z_j \notin \Omega}} \text{Res}(f, z_j) - 2\pi i \text{Res}(f, \infty).$$

In particolare

$$\sum_{j=1}^h \text{Res}(f, z_j) + \text{Res}(f, \infty) = 0.$$

3.6.10 Osservazione. Supponiamo che $f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$ dove P e Q sono polinomi con

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad Q(z) = \sum_{j=0}^{n+1} b_j z^j.$$

Allora $\text{Res}(f, \infty) = -\frac{a_n}{b_{n+1}}$. Infatti si vede subito che $f(z) = \frac{a_n}{b_{n+1}} \frac{1}{z} (1 + \sigma(z))$, dove $\sigma(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$. Quindi $g(w) = -\frac{a_n}{b_{n+1}} \frac{1}{w} (1 + \sigma(w^{-1}))$ che ha chiaramente $-\frac{a_n}{b_{n+1}}$ come residuo in zero.

3.7 Qualche applicazione dei teoremi dei residui

3.7.1 Proposizione. *Supponiamo che P e Q siano due polinomi tale che Q non ha radici reali e $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 2$. Siano z'_1, \dots, z'_k le radici di Q con parte immaginaria positiva e z''_1, \dots, z''_h le radici di Q con parte immaginaria negativa. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z'_j \right) = -2\pi i \sum_{j=1}^h \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z''_j \right).$$

Dimostrazione. Per $R > 0$ consideriamo il “mezzo disco”

$$D_R^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) > 0, |z| < R\}$$

(vedi la figura 3.9 che ha come bordo la curva $\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$ dove $\gamma_{1,R}(t) = t$ per

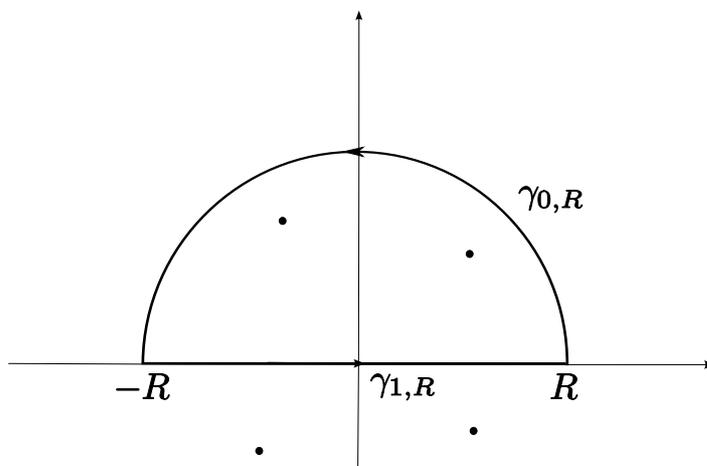


Figura 3.9: il mezzo disco

$-R \leq t \leq R$ (descrive il segmento $[-R, R]$) e $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$ per $0 \leq t \leq \pi$ (descrive la semicirconferenza superiore di raggio R). Per R abbastanza grande tutti gli z'_j stanno in D_R^+ ; applicando il teorema dei residui

$$2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z'_j \right) = \int_{\partial D_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \quad (3.12)$$

Ma per l'ipotesi sui gradi si ha che esiste una costante M tale che, per $|z|$ sufficientemente grande, si ha $\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2}$. Dunque

$$\left| \int_{\gamma_{2,R}} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \frac{M}{R^2} l(\gamma_{2,R}) = \frac{M}{R^2} \pi R = \frac{M\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Ne segue la tesi andando al limite in (3.12).

Si poteva anche considerare il “mezzo disco inferiore”

$$D_R^- := \{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) < 0, |z| < R\}$$

e con gli stessi calcoli, tenendo conto del fatto che l'orientamento del bordo di D_R^- porta a percorrere il segmento $[-R, R]$ in verso opposto a quello usuale, si ottiene la seconda formula. \square

3.7.2 Osservazione. Dall'enunciato precedente si deduce che

$$\sum_{j=1}^k \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z'_j \right) + \sum_{j=1}^h \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z''_j \right) = 0.$$

Questo è conseguenza del fatto che, se $\operatorname{grado}(P) \leq \operatorname{grado}(Q) - 2$, allora $\operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, \infty \right) = 0$, e dell'osservazione 3.6.9.

3.7.3 Esempio. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) + 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Infatti se $f(z) := \frac{z^2}{1+z^4}$, allora f ha quattro poli semplici in $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$, e, calcolando i residui nei due poli con parte immaginaria positiva, si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(f, \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) &= \left. \frac{z^2}{4z^3} \right|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4z} \Big|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{\bar{z}}{4|z|^2} \Big|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \\ \operatorname{Res} \left(f, \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right) &= \left. \frac{z^2}{4z^3} \right|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4z} \Big|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{\bar{z}}{4|z|^2} \Big|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

da cui la somma dei residui moltiplicata per $2\pi i$ dà:

$$2\pi i \left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \right) = 2\pi i \frac{-2i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3.7.4 Esempio. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2+2z+2)^2}, -1+i \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Infatti se $f(z) := \frac{1}{(z^2+2z+2)^2}$, allora f ha due poli doppi in $-1 \pm i$, e, calcolando il residuo nel polo $-1+i$, che è l'unico con parte immaginaria positiva, si ha:

$$\operatorname{Res}(f, -1+i) = h'(-1+i) \quad \text{dove } h(z) = \frac{1}{(z+1+i)^2} = (z+1+i)^{-2}$$

e $h'(z) = -2(z+1+i)^{-3}$ da cui

$$\operatorname{Res}(f, -1+i) = -2(-1+i+1)^{-3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}$$

che moltiplicato per $2\pi i$ dà il risultato scritto sopra.

3.7.5 Definizione (integrale nel senso del valore principale). Sia $[a, b]$ un intervallo in \mathbb{R} . Dato un punto x_0 di $]a, b[$ e una funzione $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ che sia continua su $[a, b] \setminus \{x_0\}$, chiameremo *integrale nel senso del valore principale in x_0* di f su $[a, b]$ il limite:

$$(v.p.x_0) \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

a patto che quest'ultimo esista. Più in generale, se $a < x_1 < \dots < x_n < b$ e $f : [a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ è continua su $[a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, chiameremo integrale nel senso del valore principale di f su $[a, b]$ l'espressione

$$(v.p.) \int_a^b f(x) dx := \sum_{j=1}^n (v.p.x_j) \int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x) dx$$

dove $a = c_0 < x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < \dots < c_{n-1} < x_n < c_n = b$. Non è difficile verificare che tale espressione, se esiste, non dipende dalla scelta dei punti intermedi c_j . Infine, se $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ e se $f : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ è continua chiameremo integrale nel senso del valore principale di f su \mathbb{R} l'espressione (sempre a patto che esista)

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} (v.p.) \int_{-R}^R f(x) dx.$$

3.7.6 Osservazione. La definizione di integrale nel senso del valore principale generalizza quella di *integrale improprio (o generalizzato) secondo Riemann*, in cui si richiede che esistano separatamente e siano finiti i limiti

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx$$

(siamo nel primo caso, in cui c'è una sola singolarità) e si definisce l'integrale improprio mediante la somma dei due limiti sopra indicati. È evidente che se esiste l'integrale improprio allora esiste l'integrale nel senso del valore principale ed essi coincidono. Il viceversa non è vero. Se consideriamo $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, allora:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln(\varepsilon) - \ln(\varepsilon)) = 0.$$

Quindi $(v.p.) \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$ mentre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln(\varepsilon) = -\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\ln(\varepsilon)) = +\infty$$

e dunque l'integrale improprio non esiste. Si può anche vedere che il fatto di avere escluso un intervallo **simmetrico** è essenziale. Per esempio si ha:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{2\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln(\varepsilon) - \ln(2\varepsilon)) = -\ln(2).$$

che non è quanto trovato prima. In generale, se gli integrali esistono come integrali impropri, toglieremo $(v.p.)$ davanti al simbolo di integrale.

3.7.7 Osservazione. Supponiamo che z_0 sia un polo di ordine 1 per f e, per $\rho > 0$, consideriamo la curva $\gamma_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}$ per $0 \leq t \leq \pi$ ("mezza circonferenza" di centro z_0 e raggio ρ). Allora

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Analogamente se f ha un polo di ordine 1 all'infinito si ha

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$$

dove $\gamma_R(t) = R e^{-it}$, per $0 \leq t \leq \pi$ ("mezza circonferenza" di centro 0 e raggio R , percorsa in senso orario).

Dimostrazione. Possiamo scrivere $f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + f_1(z)$, dove f_1 è olomorfa vicino a z_0 . Quindi

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \int_0^\pi \left(\frac{a_{-1}}{\rho e^{it}} + f_1(z_0 + \rho e^{it}) \right) i \rho e^{it} dz = \pi i a_{-1} + i \rho \int_0^\pi f_1(z_0 + \rho e^{it}) e^{it} dz$$

Dato che f_1 è limitata vicino a z_0 si vede facilmente che, se ρ tende a zero, il secondo addendo sopra tende a zero, da cui la tesi. Il caso all'infinito si ottiene facilmente passando alla funzione g . \square

3.7.8 Proposizione. *Supponiamo che P e Q siano due polinomi tale che $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 1$. Siano z'_1, \dots, z'_k le radici di Q con parte immaginaria positiva, z''_1, \dots, z''_h le radici di Q con parte immaginaria negativa e x_1, \dots, x_l le radici reali. Supponiamo che tutte le radici reali siano semplici. Allora*

$$\begin{aligned} (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = & 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z'_j \right) + \pi i \sum_{j=1}^l \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, x_j \right) + \pi i \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, \infty \right) = \\ & -2\pi i \sum_{j=1}^h \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z''_j \right) - \pi i \sum_{j=1}^l \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, x_j \right) - \pi i \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, \infty \right) \end{aligned}$$

Si noti che, per le ipotesi sui gradi, ∞ è (al più) un polo semplice per $\frac{P}{Q}$; inoltre se $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 2$ il residuo all'infinito fa zero. Se poi non ci sono nemmeno le radici reali allora si può togliere (v.p.) e si ricade nel caso della 3.7.1

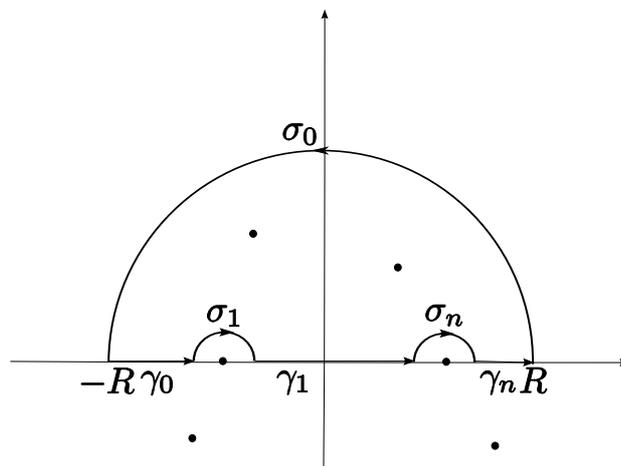


Figura 3.10: il mezzo disco ridotto

Dimostrazione. Consideriamo la curva $\gamma := \sigma_0 + \gamma_0 + \sigma_1 + \gamma_1 + \dots + \sigma_n + \gamma_n$ rappresentata nella figura 3.10 (con $n = 2$), dove R è sufficientemente grande in modo che tutti i poli con parte immaginaria maggiore o eguale siano contenuti nel mezzo disco di raggio $R - 1$ e dove le semicirconferenze $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ hanno dei raggi $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sufficientemente piccoli

in modo da non intersecarsi tra loro ed essere contenuti nel mezzo disco di raggio R . Applicando il teorema dei residui

$$2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z'_j \right) = \int_{\sigma_0} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \sum_{j=0}^n \int_{\sigma_j} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

Mandando a zero $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, per l'osservazione 3.7.7 (nota il verso delle curve) si ha

$$\int_{\sigma_j} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \rightarrow -\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{P}{Q}, x_j \right) \quad j = 1, \dots, n,$$

e per la definizione di integrale nel senso del valore principale

$$\sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \rightarrow (v.p.) \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

da cui

$$2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z'_j \right) + \pi i \sum_{j=1}^h \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, x_j \right) = (v.p.) \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{\sigma_0} \frac{P(z)}{Q(z)} dz.$$

Mandando R all'infinito si ottiene la tesi dato che, sempre per la 3.7.7

$$\int_{\sigma_0} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \rightarrow -\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{P}{Q}, \infty \right).$$

Anche in questo caso si può ragionare nel semipiano inferiore, ottenendo la seconda formula. \square

3.7.9 Esempio. Facciamo vedere che

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = -\pi.$$

Infatti, posto $f(z) := \frac{z}{z^2 + 2z + 2}$, si vede che f ha due poli semplici in $-1 \pm i$ (nessuno reale) e che f ha un polo semplice all'infinito dato che lo scarto dei gradi tra numeratore e denominatore è uno. Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1 + i) &= \left. \frac{z}{2z + 2} \right|_{z=-1+i} = \frac{-1+i}{2i} = \frac{-1}{2i} + \frac{1}{2}, \\ \operatorname{Res}(f, \infty) &= -1 \end{aligned}$$

(il residuo all'infinito è stato calcolato usando l'osservazione 3.6.10). Dunque l'integrale richiesto fa

$$2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, -1 + i) + \frac{1}{2} \operatorname{Res}(f, \infty) \right) = 2\pi i \left(\frac{-1}{2i} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\pi.$$

3.7.10 Esempio. Facciamo vedere che

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x^2 + 2x + 2)} dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Infatti, posto $f(z) := \frac{1}{z(z^2 + 2z + 2)}$, si vede che f ha tre poli semplici in $-1 \pm i$ (non reali) e 0 (reale), mentre f è olomorfa all'infinito dato che lo scarto dei gradi tra numeratore e denominatore è tre. Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1 + i) &= \frac{1}{z(z + 1 + i)} \Big|_{z=-1+i} = \frac{1}{(-1 + i)2i} = \frac{1}{2(-1 - i)} = \frac{-1 + i}{4}, \\ \operatorname{Res}(f, 0) &= \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dunque l'integrale richiesto fa

$$2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, -1 + i) + \frac{1}{2} \operatorname{Res}(f, 0) \right) = 2\pi i \left(\frac{-1 + i}{4} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

3.7.11 Proposizione. *Supponiamo che P e Q siano due polinomi tale che $\operatorname{grado}(P) \leq \operatorname{grado}(Q) - 1$. Siano z'_1, \dots, z'_k le radici di Q con parte immaginaria positiva, z''_1, \dots, z''_h le radici di Q con parte immaginaria negativa e x_1, \dots, x_l le radici reali. Supponiamo che tutte le radici reali siano semplici. Sia inoltre a un numero reale. Allora*

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz} P(x)}{Q(x)} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, z'_j) + \pi i \sum_{j=1}^l \operatorname{Res}(f, x_j) & \text{se } a > 0 \\ -2\pi i \sum_{j=1}^h \operatorname{Res}(f, z''_j) - \pi i \sum_{j=1}^l \operatorname{Res}(f, x_j) & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

dove abbiamo posto $f(z) := \frac{e^{iaz} P(z)}{Q(z)}$.

Dimostrazione. Consideriamo $a > 0$. Usando le stesse curve del teorema precedente si arriva a

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res} \left(e^{iaz} \frac{P(z)}{Q(z)}, z'_j \right) + \pi i \sum_{j=1}^l \operatorname{Res} \left(e^{iaz} \frac{P(z)}{Q(z)}, x_j \right) = \\ (v.p.) \int_{-R}^R \frac{e^{iax} P(x)}{Q(x)} dx + \int_{\sigma_0} e^{iaz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \end{aligned}$$

Per le ipotesi sui gradi si ha $\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|}$ per un'opportuna costante M e $|z|$ abbastanza grande; ne ricaviamo che, essendo $a > 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_0} e^{iaz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{ia(Re^{it})} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} iRe^{it} dt \right| \leq \\ &M \int_0^\pi e^{\Re(iaRe^{it})} dt = M \int_0^\pi e^{-aR \sin(t)} dt \end{aligned}$$

Si può vedere (usando ad esempio il teorema di Lebesgue riportato nel capitolo seguente) che l'ultimo integrale tende a zero (anche se l'integrando non tende uniformemente a zero) per $R \rightarrow \infty$. Da questo segue la tesi. Quando $a < 0$ si usa lo stesso ragionamento nel semipiano inferiore usando la curva coniugata e tenendo conto del cambio di verso. \square

3.7.12 Esempio. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{1+x^2} dx =: (*).$$

Tale integrale esiste nel senso dell'integrale improprio secondo Riemann, perché e^{2ix} è limitata e $\frac{1}{1+x^2}$ è dell'ordine di $1/x^2$ all'infinito e quindi non occorre scrivere (*v.p.*). Applichiamo la proposizione 3.7.11. Dato che l'integrando ha un unico polo semplice con parte immaginaria positiva, cioè $z = i$, si ha:

$$(*) = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{2iz}}{1+z^2}, i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{2iz}}{2z} \right|_{z=i} = 2\pi i \frac{e^{-2}}{2i} = \frac{\pi}{e^2}.$$

Con questo calcolo, passando alla parte reale e alla parte immaginaria, abbiamo trovato che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{1+x^2} dx = 0.$$

Notiamo che il fatto che il secondo integrale faccia zero si poteva vedere subito dato che l'integrando è dispari.

3.7.13 Esempio. Facciamo vedere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi.$$

Poniamo per questo $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$. Questa funzione verifica le condizioni della proposizione 3.7.11 ($a = 1$) Essa ha solo un polo semplice in $z = 0$ per cui

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi i \operatorname{Res}(f, 0) = \pi i \left. e^{iz} \right|_{z=0} = \pi.$$

Passando alla parte reale e alla parte immaginaria si ottiene

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx = 0, \quad (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi.$$

Peraltro nel secondo integrale la funzione integranda è continua anche in zero (a causa del $\sin(x)$) e quindi l'integrale vicino a zero esiste secondo Riemann. Inoltre essendo f una funzione pari si ha

$$\int_0^c f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-c}^c f(x) dx \Rightarrow \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c f(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

e questo mostra che f è integrabile in senso improprio secondo Riemann, dunque possiamo togliere (*v.p.*) dal simbolo del secondo integrale.

3.7.14 Esempio. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Poniamo per questo $f(z) := \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2}$. Questa funzione verifica le condizioni della proposizione 3.7.11 ($a = 1$) Essa ha due poli semplici in $z = -1 \pm i$ (nessuno reale) per cui

$$\begin{aligned} (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1+i) = 2\pi i \left. \frac{ze^{iz}}{2z+2} \right|_{z=-1+i} = \\ &= 2\pi i \frac{(-1+i)e^{i(-1+i)}}{-2+2i+2} = \pi(-1+i)e^{-1-i} = \pi(-1+i)e^{-1}(\cos(1) - i\sin(1)) = \\ &= \frac{\pi}{e} [((- \cos(1) + \sin(1)) + i(\cos(1) + \sin(1)))] . \end{aligned}$$

Prendendo parte reale e parte immaginaria si ottiene

$$\begin{aligned} (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2 + 2x + 2} dx &= \frac{\pi}{e} (-\cos(1) + \sin(1)), \\ (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + 2x + 2} dx &= \frac{\pi}{e} (\cos(1) + \sin(1)). \end{aligned}$$

Si potrebbe vedere (vedi l'osservazione 3.7.15 che segue) che in questo caso entrambi gli integrali sopra sono convergenti in senso improprio secondo Riemann e dunque possiamo togliere (v.p.).

3.7.15 Osservazione. Se $f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax)$ con $\operatorname{grado}(P) = \operatorname{grado}(Q) - 1$ e $a > 0$ allora f è integrabile in senso improprio a $+\infty$ e a $-\infty$, cioè esistono finiti

$$\int_{c_0}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{c_0}^c f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{-c_0} f(x) dx := \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^{-c_0} f(x) dx$$

dove c_0 è scelto in modo che tutte le radici di Q siano in $[-c_0, c_0]$. Vediamo per esempio che esiste il primo integrale. Fissiamo $c > c_0$; integrando per parti:

$$\int_{c_0}^c f(x) dx = \underbrace{\left[\frac{P(x) \cos(ax)}{Q(x) \cdot (-a)} \right]_{c_0}^c}_{(1)} + \underbrace{\int_{c_0}^c \left(\frac{d}{dx} \frac{P(x)}{Q(x)} \right) \frac{\cos(ax)}{a} dx}_{(2)}$$

Dato che $\frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow 0$ all'infinito e che $\cos(ax)$ è limitato, si ha:

$$(1) \rightarrow \frac{P(c_0) \cos(ac_0)}{Q(c_0) \cdot a} \quad \text{per } c \rightarrow +\infty.$$

Per quanto riguarda il secondo pezzo si può verificare che $\frac{d}{dx} \frac{P(x)}{Q(x)}$ è rapporto di due polinomi con differenza di gradi pari a due (nota che derivando $1/x$ si ottiene $-1/x^2$). Allora

$$(2) \rightarrow \int_{c_0}^{+\infty} \left(\frac{d}{dx} \frac{P(x)}{Q(x)} \right) \frac{\cos(ax)}{a} dx \quad \text{per } c \rightarrow +\infty$$

dove quest'ultimo integrale ha perfettamente senso perché appunto il termine che moltiplica $\cos(ax)$ è dell'ordine di $\frac{1}{x^2}$. Dunque $\int_{c_0}^c f(x) dx$ ha limite finito come volevamo dimostrare.

La stessa proprietà vale se nella definizione di f si mette $\cos(ax)$ invece di $\sin(ax)$.

La funzione f è il tipico esempio di funzione che è integrabile in senso improprio secondo Riemann, senza essere assolutamente integrabile: si può infatti verificare che $\int_{c_0}^{+\infty} |f(x)| dx = +\infty$. Questo pone comunque dei problemi, si vedrà infatti che f non è integrabile secondo Lebesgue.

3.7.16 Proposizione. *Siano P e Q due polinomi e sia α un numero reale non intero.*

Poniamo $f(x) := x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)}$ per $x > 0$ e supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty^+} x f(x) = 0.$$

Siano z_1, \dots, z_k le radici di Q e supponiamo che $z_j \notin [0, +\infty[$ per ogni j . Allora

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\alpha\pi i}} \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j)$$

dove per calcolare i residui di f dobbiamo definire $f(z) := z^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)}$ usando la determinazione di z^α data da $(\rho e^{i\theta})^\alpha := \rho^\alpha e^{i\alpha\theta}$ per $0 < \theta < 2\pi$. Tale funzione f non è definita sui numeri reali positivi, ma questo non ha rilevanza per il calcolo dei residui.

Dimostrazione. Scegliamo la determinazione di z^α e $f(z)$ come detto sopra. È chiaro che f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus (\{z_1, \dots, z_k\} \cup [0, +\infty])$. Se x è un numero reale positivo

$$\lim_{z \rightarrow x, \Im m(z) > 0} f(z) = f(x), \quad \lim_{z \rightarrow x, \Im m(z) < 0} f(z) = \frac{P(x)}{Q(x)} \lim_{\theta \rightarrow 2\pi, \rho \rightarrow x} \rho^\alpha e^{i\alpha\theta} = e^{2\alpha\pi i} f(x)$$

Consideriamo il cammino $\gamma_{R,r}$ rappresentato nella figura 3.11. Per R grande ed r piccolo,

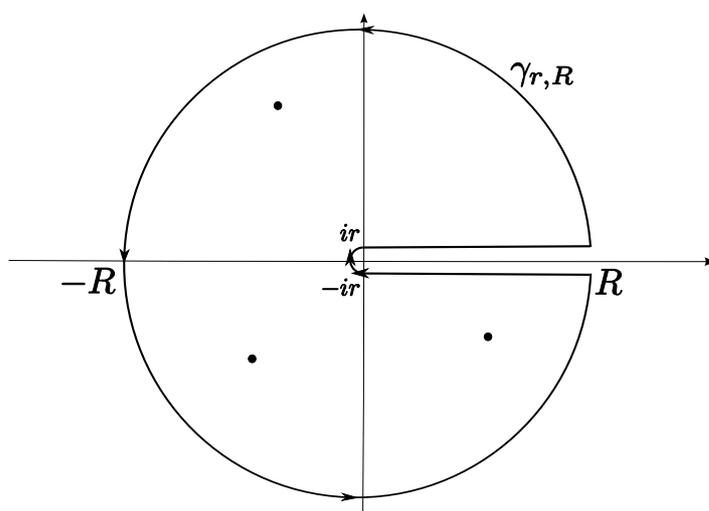


Figura 3.11: il “pacman”

la curva “allaccia” tutti gli z_j . Applicando il teorema dei residui.

$$2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j) = \int_{\gamma_{R,r}} f(z) dz.$$

Facendo tendere r a zero si ottiene

$$2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, z_j) = \int_{\partial B(0,R)} f(z) dz + \int_0^R f(x) dx + \int_R^0 e^{2\alpha\pi i} f(x) dx =$$

$$\int_{\partial B(0,R)} f(z) dz + (1 - e^{2\alpha\pi i}) \int_0^R f(x) dx$$

Mandando $R \rightarrow +\infty$ l'integrale su $\partial B(0, R)$ tende a zero a causa dell'andamento di f all'infinito, e dunque si ottiene la tesi. \square

3.7.17 Esempio. Calcoliamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx =: (*).$$

Applicando il risultato della proposizione 3.7.16 con $\alpha = 1/2$ si ha che, posto $f(z) := \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}$, risulta:

$$(*) = \frac{2\pi i}{1 - e^{\pi i}} (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)) = \pi i \left(\frac{\sqrt{z}}{2z} \Big|_{z=i} + \frac{\sqrt{z}}{2z} \Big|_{z=-i} \right) =: (**).$$

Per calcolare $(**)$ conviene mettere i e $-i$ in forma polare e ricordare che stiamo usando la determinazione della radice che usa come argomento l'argomento principale. Dunque se $z = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ si ha $\sqrt{z} = e^{\frac{\pi}{4}i}$, mentre se $z = -i = e^{3\frac{\pi}{2}i}$ si ha $\sqrt{z} = e^{3\frac{\pi}{4}i}$. Ne segue

$$(**) = \frac{\pi i}{2} \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{e^{\frac{\pi}{2}i}} + \frac{e^{3\frac{\pi}{4}i}}{e^{3\frac{\pi}{2}i}} \right) = \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}i} (e^{-\frac{\pi}{4}i} + e^{-3\frac{\pi}{4}i}) =$$

$$\frac{\pi}{2} (e^{\frac{\pi}{4}i} + e^{-\frac{\pi}{4}i}) = \frac{\pi}{2} 2\Re(e^{\frac{\pi}{4}i}) = \pi \cos(\pi/4) = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.7.18 Esempio. Calcoliamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)} dx =: (*).$$

Stavolta $\alpha = -1/3$ e $f(z) := \frac{1}{\sqrt[3]{z}(1+z^2)}$. Risulta:

$$(*) = \frac{2\pi i}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}i}} (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)) =$$

$$\frac{2\pi i(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i})}{(1 - e^{-\frac{2\pi}{3}i})(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i})} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{z}2z} \Big|_{z=i} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}2z} \Big|_{z=-i} \right) =$$

$$\frac{\pi i(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i})}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{2\pi}{3}i} + 1} \left(e^{-\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)i} + e^{-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)i} \right) = \frac{\pi i(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i})(e^{-\frac{2\pi}{3}i} + 1)}{2(1 - \cos(2\pi/3))} =$$

$$\frac{\pi i(e^{-\frac{2\pi}{3}i} + 1 - 1 - e^{\frac{2\pi}{3}i})}{2(1 - (-1/2))} = \frac{\pi i 2i \Im(e^{-\frac{2\pi}{3}i})}{3} =$$

$$\frac{\pi(-2) \sin(-2\pi/3)}{3} = \frac{2\pi \sin(2\pi/3)}{3} = \frac{2\pi \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

3.7.19 Esempio. Calcoliamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^4)} dx =: (*).$$

In questo caso $\alpha = 1/2$ e $f(z) := \frac{\sqrt{z}}{(1+z^4)}$. Risulta:

$$\begin{aligned} (*) &= \pi i \left(\operatorname{Res}(f, e^{\frac{\pi}{4}i}) + \operatorname{Res}(f, e^{\frac{3\pi}{4}i}) + \operatorname{Res}(f, e^{\frac{5\pi}{4}i}) + \operatorname{Res}(f, e^{\frac{7\pi}{4}i}) \right) = \\ &= \pi i \left(\frac{\sqrt{z}}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{\sqrt{z}}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{3\pi}{4}i}} + \frac{\sqrt{z}}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{5\pi}{4}i}} + \frac{\sqrt{z}}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{7\pi}{4}i}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} e^{\frac{\pi}{2}i} \left(\frac{e^{\frac{\pi}{8}i}}{e^{\frac{3\pi}{4}i}} + \frac{e^{\frac{3\pi}{8}i}}{e^{\frac{9\pi}{4}i}} + \frac{e^{\frac{5\pi}{8}i}}{e^{\frac{15\pi}{4}i}} + \frac{e^{\frac{7\pi}{8}i}}{e^{\frac{21\pi}{4}i}} \right) = \frac{\pi}{4} e^{\frac{\pi}{2}i} \left(e^{-\frac{5\pi}{8}i} + e^{-\frac{15\pi}{8}i} + e^{-\frac{25\pi}{8}i} + e^{-\frac{35\pi}{8}i} \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} \left(e^{-\frac{\pi}{8}i} + e^{-\frac{11\pi}{8}i} + e^{-\frac{21\pi}{8}i} + e^{-\frac{31\pi}{8}i} \right) = \frac{\pi}{4} \left(e^{-\frac{\pi}{8}i} + e^{\frac{5\pi}{8}i} + e^{-\frac{5\pi}{8}i} + e^{\frac{\pi}{8}i} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right) = \frac{\pi}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \left(1 - \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \right). \end{aligned}$$

Vediamo ora un modo di utilizzare i residui per calcolare la somma di alcune serie.

3.7.20 Lemma. Sia $0 \leq a \leq 2\pi$. Per $n \in \mathbb{N}$ consideriamo il quadrato Q_n in \mathbb{C} di vertici $\pm(n+1/2) \pm (n+1/2)i$ (vedi la figura). Allora esiste una costante C tale che

$$\left| \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1} \right| \leq C \quad \forall z \in \partial Q_n, \forall n.$$

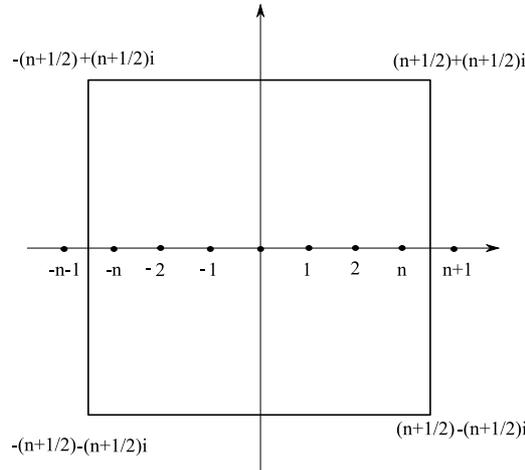


Figura 3.12: il quadrato Q_n

Dimostrazione. Il bordo di Q_n è composto dai quattro lati $L_n^{(o,\pm)}$ e $L_n^{(v,\pm)}$:

$$\begin{aligned} L_n^{(o,\pm)} &:= \{x \pm (n+1/2)i : -(n+1/2) \leq x \leq (n+1/2)\}, \\ L_n^{(v,\pm)} &:= \{\pm(n+1/2) + iy : -(n+1/2) \leq y \leq (n+1/2)\}. \end{aligned}$$

Dimostriamo la limitatezza sul lato orizzontale $L_n^{o,+}$: se $z = x + iy$ con $-(n + 1/2) \leq x \leq (n + 1/2)$ e $y = (n + 1/2)$ si ha:

$$\left| \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1} \right| = \left| \frac{e^{iax} e^{-a(n+1/2)}}{e^{2\pi ix} e^{-2\pi(n+1/2)} - 1} \right| \leq \frac{e^{-a(n+1/2)}}{1 - e^{-2\pi(n+1/2)}} =: C_n^+.$$

Si vede allora che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } a \neq 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \end{cases}, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} C_n^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } a \neq 2\pi \\ 1 & \text{se } a = 2\pi, \end{cases}$$

e dunque C_n^+ è limitata. Si noti che, se $0 \geq a < 2\pi$, $C_n^+ \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \pm\infty$. Consideriamo $L_n^{o,-}$; stavolta dobbiamo prendere $z = x + iy$ con $-(n + 1/2) \leq x \leq (n + 1/2)$ e $y = -(n + 1/2)$. Si ha:

$$\left| \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1} \right| = \left| \frac{e^{iax} e^{a(n+1/2)y}}{e^{2\pi ix} e^{2\pi(n+1/2)y} - 1} \right| = \left| \frac{e^{iax} e^{(a-2\pi)(n+1/2)}}{e^{2\pi ix} - e^{-2\pi(n+1/2)}} \right| \leq \frac{e^{(a-2\pi)(n+1/2)}}{1 - e^{-2\pi(n+1/2)}} =: C_n^-$$

e ragionando come per C_n^+ si vede che C_n^- è limitato, anzi tende a zero se $0 < a \leq 2\pi$. Consideriamo ora i lati verticali $L_n^{v,\pm}$ in cui $z = x + iy$ con $x = \pm(n + 1/2)$ e $-(n + 1/2) \leq y \leq (n + 1/2)$. Dato che $e^{\pm 2\pi i(n+1/2)} = e^{\pm \pi i} = -1$ si ha:

$$\left| \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1} \right| = \left| \frac{e^{\pm ia(n+1/2)} e^{-ay}}{e^{\pm 2\pi i(n+1/2)} e^{-2\pi y} - 1} \right| = \frac{e^{-ay}}{e^{-2\pi y} + 1} =: C(y)$$

e si vede ancora facilmente che $C(y)$ è limitata (su tutto \mathbb{R}). Si può anche notare che, se $0 < a < 2\pi$, allora la funzione $C(y)$ è integrabile su \mathbb{R} . \square

3.7.21 Proposizione. *Sia $0 \leq a \leq 2\pi$. Siano P e Q due polinomi tali che $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 2$ e siano z_1, \dots, z_k le radici di Q . Allora*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \frac{P(n)}{Q(n)} e^{ian} = -2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1}, z_j \right).$$

Dimostrazione. Per l'ipotesi sui gradi possiamo trovare una costante M tale che

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \text{per } |z| \text{ grande};$$

in particolare la serie scritta sopra converge assolutamente. Consideriamo il quadrato Q_n definito prima e prendiamo n in modo che Q_n contenga tutti gli z_j . Consideriamo la funzione $g(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1}$; tale funzione è olomorfa in tutto \mathbb{C} tranne $\{z_1, \dots, z_k\} \cup \mathbb{Z}$. Applicando il teorema dei residui:

$$\int_{\partial Q_n} g(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^k \text{Res}(g, z_j) + \sum_{|h| \leq n, Q(n) \neq 0} \text{Res}(g, h) \right) \quad (3.13)$$

(le radici di Q che sono anche degli interi le mettiamo nella prima sommatoria e non nella seconda). L'integrale scritto a sinistra tende a zero per $n \rightarrow \infty$, infatti se $z \in \partial Q_n$ si ha $|z| \geq (n + 1/2)$ e quindi

$$\left| \int_{\partial Q_n} g(z) dz \right| \leq \frac{M}{(n + 1/2)^2} Cl(\partial Q_n) = \frac{8MC}{(n + 1/2)} \rightarrow 0$$

(la lunghezza di ∂Q_n vale $8(n + 1/2) - C$ è la costante del lemma 3.7.20). Inoltre

$$\operatorname{Res}(g, h) = \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1}, h \right) = \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iaz}}{2\pi i e^{2\pi iz}}, hT \Big|_{z=h} = \frac{P(h)}{Q(h)} \frac{e^{iah}}{2\pi i}.$$

Mettendo questi fatti in 3.13 e andando al limite per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene la tesi. \square

In realtà, a patto di scrivere bene la tesi, si può anche considerare il caso in cui la differenza dei gradi sia 1. Analogamente a quanto fatto per gli integrali bisogna introdurre il valore principale di una serie:

3.7.22 Definizione. Se $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ è una successione con indici in \mathbb{Z} , chiamiamo *valore principale della serie degli a_n* il seguente limite (se esiste)

$$(v.p.) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n a_k.$$

3.7.23 Proposizione. Sia $0 < a < 2\pi$. Siano P e Q due polinomi tali che $\operatorname{grado}(P) \leq \operatorname{grado}(Q) - 1$ e siano z_1, \dots, z_k le radici di Q . Allora

$$(v.p.) \sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \frac{P(n)}{Q(n)} e^{ian} = -2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1}, z_j \right).$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si ripetono gli stessi ragionamenti del caso precedente e si riesce a concludere se si riesce a dimostrare che $\int_{\partial Q_n} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1} dz \rightarrow 0$ avendo a disposizione solo che

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|} \quad \text{per } |z| \text{ grande.}$$

Per trovare ciò notiamo che, usando le costanti indicate nella dimostrazione di 3.7.20

$$\begin{aligned} \left| \int_{L^{\circ,+}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1} dz \right| &\leq \frac{M}{(n + 1/2)} 2(n + 1/2) C_n^+ \rightarrow 0, \\ \left| \int_{L^{\circ,-}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1} dz \right| &\leq \frac{M}{(n + 1/2)} 2(n + 1/2) C_n^- \rightarrow 0, \\ \left| \int_{L^{v,\pm}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1} dz \right| &\leq \frac{M}{(n + 1/2)} \int_{-n-1/2}^{n+1/2} C(y) dy \rightarrow 0 \end{aligned}$$

($0 < a < 2\pi$!) dove l'ultimo limite è conseguenza del fatto che $\int_{-\infty}^{+\infty} C(y) dy < +\infty$. \square

3.7.24 Esempio. Siano $P(z) := 1$ e $Q(z) := z^2 + 1$. Allora se $0 \leq a \leq 2\pi$ si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{ina}}{n^2 + 1} &= -2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)(e^{2\pi iz} - 1)}, i \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)(e^{2\pi iz} - 1)}, -i \right) \right) = \\ &= -2\pi i \left(\frac{e^{iaz}}{2z(e^{2\pi iz} - 1)} \Big|_{z=i} + \frac{e^{iaz}}{2z(e^{2\pi iz} - 1)} \Big|_{z=-i} \right) = -\pi \left(\frac{e^{-a}}{(e^{-2\pi} - 1)} - \frac{e^a}{(e^{2\pi} - 1)} \right) = \\ &= \pi \left(\frac{e^a}{(e^{2\pi} - 1)} + \frac{e^{-a}}{(1 - e^{-2\pi})} \right) = \pi \left(\frac{e^{a-\pi}}{(e^\pi - e^{-\pi})} + \frac{e^{\pi-a}}{(e^\pi - e^{-\pi})} \right) = \pi \frac{\cosh(a - \pi)}{\sinh(\pi)}. \end{aligned}$$

In particolare, prendendo $a = 0$ (e sfruttando la parità di $n^2 + 1$)

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + 1} + 1 = \pi \frac{\cosh(a - \pi)}{\sinh(\pi)} + 1 = \frac{\pi}{\tanh(\pi)} + 1$$

da cui:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\tanh(\pi)} + 1 \right).$$

Se invece si prende $a = \pi$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} + 1 = \frac{\pi}{\sinh(\pi)} + 1$$

da cui:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sinh(\pi)} + 1 \right).$$

3.7.25 Esempio. Siano $P(z) := 1$ e $Q(z) := z^2$. Allora per ogni a con $0 \leq a \leq 2\pi$ si ha:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{e^{ina}}{n^2} = -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2(e^{2\pi iz} - 1)}, 0 \right) = -\operatorname{Res}(f, 0) \quad \text{dove } f(z) := \frac{2\pi i e^{iaz}}{z^2(e^{2\pi iz} - 1)}.$$

Lo zero è (purtroppo) un polo triplo per la funzione f e la parte analitica di f è

$$h(z) := \frac{2\pi iz e^{iaz}}{e^{2\pi iz} - 1} = \frac{e^{iaz}}{g(2\pi iz)} = \frac{e^{iaz}}{\tilde{g}(z)} = e^{iaz} \tilde{g}(z)^{-1},$$

dove abbiamo posto $g(z) := \frac{e^z - 1}{z}$ e $\tilde{g}(z) = g(2\pi iz)$.

Per trovare il residuo in zero dobbiamo calcolare $h''(0)/2$. Per questo calcoliamo le derivate di g in zero; dato che

$$g(z) = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

si deduce che

$$g^{(k)}(0) = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow \tilde{g}^{(k)}(0) = \frac{(2\pi i)^k}{k+1}. \quad (3.14)$$

Allora in particolare:

$$\tilde{g}(0) = 1, \quad \tilde{g}'(0) = \frac{2\pi i}{2} = \pi i, \quad \tilde{g}''(0) = -\frac{4\pi^2}{3}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} h'(z) &= ia e^{iaz} \tilde{g}(z)^{-1} - e^{iaz} \tilde{g}'(z) \tilde{g}(z)^{-2}, \\ h''(z) &= (ia)^2 e^{iaz} \tilde{g}(z)^{-1} - ia e^{iaz} \tilde{g}'(z) \tilde{g}(z)^{-2} - ia e^{iaz} \tilde{g}'(z) \tilde{g}(z)^{-2} - e^{iaz} \tilde{g}''(z) \tilde{g}(z)^{-2} + \\ &\quad 2e^{iaz} \tilde{g}'(z)^2 \tilde{g}(z)^{-3} = e^{iaz} [-a^2 \tilde{g}(z)^{-1} - (2ia \tilde{g}'(z) + \tilde{g}''(z)) \tilde{g}(z)^{-2} + 2\tilde{g}'(z)^2 \tilde{g}(z)^{-3}] \end{aligned}$$

Allora:

$$h''(0) = -a^2 - \left(2ia\pi i - \frac{4\pi^2}{3} \right) + 2(\pi i)^2 = -a^2 + 2\pi a - \frac{2\pi^2}{3}.$$

da cui:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{e^{ina}}{n^2} = -\frac{h''(0)}{2} = \frac{a^2}{2} - \pi a + \frac{\pi^2}{3} \quad \forall a \in [0, 2\pi].$$

Notiamo che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{e^{ina}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{ina}}{n^2} + \frac{e^{-ina}}{n^2} \right) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\cos(na)}{n^2},$$

e quindi il risultato trovato sopra si può esprimere:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\cos(na)}{n^2} = \frac{a^2}{4} - \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \forall a \in [0, 2\pi].$$

Prendendo $a = 0$ o $a = \pi$ si trovano le due formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

3.7.26 Esempio. Con ragionamenti analoghi a quelli dell'esempio precedente, ma usando la proposizione 3.7.23, si trova:

$$(v.p.) \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{e^{ina}}{n} = -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z(e^{2\pi iz} - 1)}, 0 \right) = -\operatorname{Res}(f, 0) \quad \forall a \in]0, 2\pi[$$

dove (con le stesse notazioni dell'esempio precedente)

$$f(z) := \frac{2\pi i e^{iaz}}{z(e^{2\pi iz} - 1)} = \frac{e^{iaz}}{z^2 \tilde{g}(z)} = \frac{h(z)}{z^2}.$$

Stavolta il polo $z = 0$ è doppio e il residuo da calcolare è pari ad $h'(0)$; tale valore si trova subito usando i calcoli dell'esempio precedente: $h'(0) = ia - \pi i$, da cui

$$(v.p.) \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{e^{ina}}{n} = -h'(0) = -ia + i\pi. \quad \forall a \in]0, 2\pi].$$

Notiamo che

$$(v.p.) \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{e^{ina}}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}, 0 < |n| \leq k} \frac{e^{ina}}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(\frac{e^{ian}}{n} + \frac{e^{-ian}}{-n} \right) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an)}{n},$$

da cui la relazione precedente diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an)}{n} = \frac{\pi - a}{2} \quad \forall a \in]0, 2\pi[.$$

Capitolo 4

Integrazione e norme integrali

4.1 Proprietà principali dell'integrale di Lebesgue

Per quanto segue ci serviranno varie proprietà di passaggio al limite degli integrali. Sfortunatamente tali proprietà non sono vere in generale per l'integrale di Riemann a cui siamo abituati. Siamo perciò costretti a estendere la nozione di integrale, considerando la definizione di misura e di integrale secondo Lebesgue. Tali definizioni sono sostanzialmente basate sull'approssimazione di un insieme generico mediante dei plurintevalli (=unione di rettangoli) numerabili, anziché finiti come si fa con Riemann. Alla fine si perviene ad una nozione di integrale che però coincide con quello solito su tutte le funzioni (continue, discontinue solo su un numero finito di punti, ...) con cui abbiamo abitualmente a che fare, ma che ha senso su una classe assai più ampia di funzioni (avendo in questa classe delle buone proprietà di passaggio al limite). La situazione è molto simile a quella in cui si trova quando si sceglie di usare i numeri reali per studiare l'analisi: i razionali (che sono gli unici numeri con cui normalmente interagiamo) non sono stabili rispetto al passaggio al limite (successioni di razionali possono tendere a oggetti che non sono numeri razionali). Si costruiscono allora i reali come un sopra-insieme dei razionali che è stabile per passaggio al limite, in modo che la teoria che ci si fa sopra sia più semplice da sviluppare, ben sapendo che poi (quasi sempre) i numeri con cui avremo a che fare saranno (alcuni tra i) razionali

Introduciamo allora, in questo paragrafo, le nozioni di misura e di integrale in \mathbb{R}^N . Non dimostreremo praticamente nulla, ma cercheremo di enucleare le proprietà fondamentali che si possono provare, dandone se possibile l'idea geometrica.

Ricordiamo prima di tutto alcune notazioni che useremo ne seguito.

Un intervallo è un sottoinsieme di \mathbb{R} individuato da una qualunque delle forme

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

dove a e b possono essere numeri reali oppure $\pm\infty$ e sono detti gli estremi dell'intervallo. Dato un intervallo I di estremi a e b la lunghezza di I è il numero positivo $b - a$ (che può essere zero se $b = a$, cioè se l'intervallo si riduce a un punto o $+\infty$ se l'intervallo è illimitato). Indicheremo con $|I|$ la lunghezza di I .

Sia data una funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$. Chiamiamo *epigrafico* di f il sottoinsieme di \mathbb{R}^{N+1}

$$\text{epi}(f) := \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq y\}$$

Chiamiamo *supporto* di f l'insieme

$$\text{spt}(f) := \text{chiusura di } \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}$$

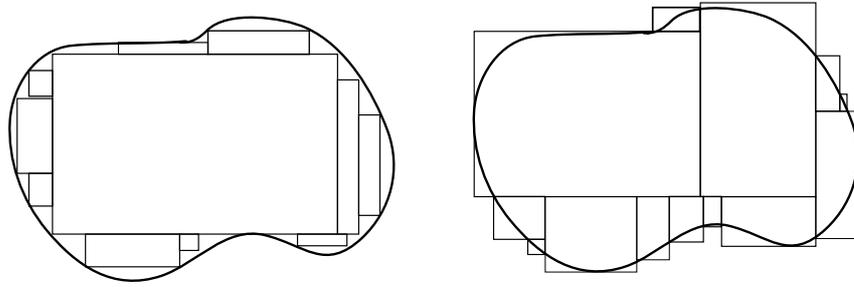


Figura 4.1: Approssimazione mediante plurirettangoli finiti interni ed esterni

Ricordiamo anche che, dato un qualunque numero reale x si introducono x^+ detto *parte positiva* di x e x^- detto *parte negativa* di x mediante

$$x^+ := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad x^- := \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

di modo che $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$, $x = x^+ - x^-$ mentre $|x| = x^+ + x^-$.

Il punto di partenza per la nozione di misura (area/volume) e quindi di integrale è la misura dei rettangoli. Chiameremo rettangolo in \mathbb{R}^N un insieme R della forma

$$R = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N \quad I_1, I_2, \dots, I_N \text{ intervalli}$$

e chiameremo misura del rettangolo R il numero (in $[0, +\infty]$)

$$|R| := |I_1| \cdot |I_2| \cdots |I_N|.$$

Quindi se $N = 2$ la misura è l'area (base \times altezza), se $N = 3$ la misura è il volume.

4.1.1 Definizione. Chiamiamo *plurirettangolo finito* una unione finita di rettangoli disgiunti, cioè un insieme P di \mathbb{R}^N esprimibile come:

$$P = \bigcup_{j=1}^k R_j \quad R_j \text{ rettangoli, } R_j \cap R_h = \emptyset \text{ se } j \neq h.$$

Chiamiamo misura di P la somma delle misure di tutti i rettangoli che compongono P :

$$|P| = \sum_{j=1}^k |R_j|.$$

Si può dimostrare che $|P|$ è indipendente dal modo (che non è chiaramente unico) in cui P è scomposto in rettangoli disgiunti.

Per completezza ricordiamo velocemente la definizione di integrale di Riemann in \mathbb{R}^N .

4.1.2 Definizione (misura e integrale di Riemann). Sia A un insieme limitato di \mathbb{R}^N . Poniamo:

$$m_R^*(A) := \inf \{|P| : A \text{ plurirettangolo finito } A \subset P\}$$

$$m_{R*}(A) := \sup \{|P| : A \text{ plurirettangolo finito } P \subset A\}$$

(vedi la figura 4.1). $m_R^*(A)$ e $m_{R*}(A)$ si dicono rispettivamente la misura esterna secondo Riemann (o secondo Peano) e la misura interna secondo Riemann dell'insieme A . Si dice che A è *misurabile secondo Riemann* se $m_R^*(A) = m_{R*}(A)$, cioè se approssimando A con

plurirettangoli inscritti o con plurirettangoli circoscritti si giunge al medesimo risultato. Se A è misurabile indichiamo con $m_R(A)$ il valore comune delle due misure (interna ed esterna).

Sia ora $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e a supporto limitato. Diciamo che f è misurabile secondo Riemann se gli epigrafici $\text{epi}(f^+)$ e $\text{epi}(f^-)$ sono insiemi misurabili secondo Riemann. In questo caso chiamiamo *integrale di Riemann* di f il numero

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx := m_R(\text{epi}(f^+)) - m_R(\text{epi}(f^-))$$

Infine se A è un insieme misurabile e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata possiamo dire che f è integrabile su A se la funzione \tilde{f} che è eguale a f su A e vale zero fuori di A è misurabile e in questo caso si definisce l'integrale di f su A come

$$\int_A f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x) dx.$$

Si potrebbe ora dimostrare una serie di proprietà per gli integrali; per esempio si può vedere che se A e B sono due insiemi misurabili disgiunti, allora la loro unione è misurabile e $m_R(A \cup B) = m_R(A) + m_R(B)$ (questo non è vero se A e B non sono misurabili). Oppure si potrebbe vedere che se f e g sono integrabili, allora la loro somma è integrabile e $\int_{\mathbb{R}^N} (f+g) = \int_{\mathbb{R}^N} f + \int_{\mathbb{R}^N} g$. Queste proprietà (e le varie altre che si possono dimostrare) fanno sì che la misura e l'integrale di Riemann siano un'ottimo modello matematico per l'idea di area o volume in questioni di geometria elementare. Tali nozioni hanno però alcuni difetti che si manifestano quando si cominciano a tirare in ballo i limiti. Un piccolo difetto è il fatto che si misurano solo insiemi limitati e si integrano funzioni limitate a supporto limitato. A questo però si potrebbe tentare di rimediare considerando gli integrali impropri (anche se in \mathbb{R}^N le cose non sono così chiare). Il grosso problema però è la *stabilità* degli insiemi misurabili e delle funzioni integrabili rispetto ad operazioni di limite. Non è per esempio vero (e invece servirebbe) che l'unione di una successione di insiemi misurabili è misurabile.

Per superare questo tipo di difficoltà considereremo una definizione più generale di misura, detta misura secondo Lebesgue, che chiameremo semplicemente misura.

4.1.3 Definizione. Chiamiamo *plurirettangolo numerabile* l'unione di una successione di rettangoli disgiunti, cioè un insieme P di \mathbb{R}^N esprimibile come:

$$P = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \quad R_j \text{ rettangoli, } R_j \cap R_h = \emptyset \text{ se } j \neq h.$$

Chiamiamo misura di P la serie (eventualmente infinita) delle misure di tutti i rettangoli che compongono P :

$$|P| = \sum_{j \in \mathbb{N}} |R_j|.$$

Si può dimostrare (ed è complicato) che $|P|$ è indipendente dal modo in cui P è scomposto in rettangoli disgiunti.

4.1.4 Definizione (misura e integrale secondo Lebesgue). Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N . Poniamo:

$$m^*(A) := \inf \{|P| : A \text{ plurirettangolo numerabile } A \subset P\}$$

(vedi la figura 4.2). $m^*(A)$, che può essere finita o $+\infty$, è chiamata la misura esterna secondo Lebesgue dell'insieme A . Diremo che A è *misurabile secondo Lebesgue* se

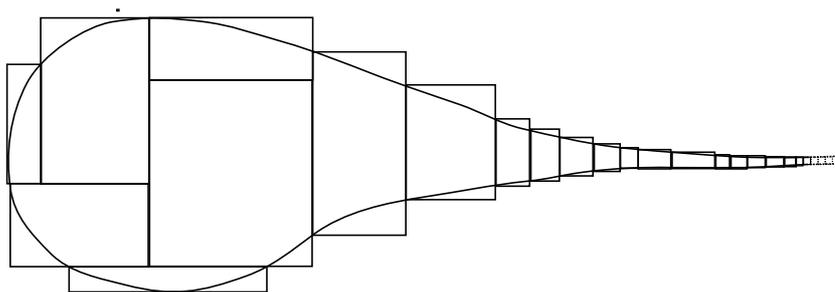


Figura 4.2: Approssimazione mediante plurirettangoli numerabili esterni

$$m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \quad \text{per ogni sottoinsieme } E \text{ di } \mathbb{R}^N$$

Questa proprietà dice che A *spezza bene* ogni altro sottoinsieme E - non è una proprietà intuitiva come quella usata per fare la misura di Riemann e per la verità non ne parleremo praticamente mai. L'importante è che questa proprietà individua una classe di insiemi buoni, di cui metteremo in evidenza le caratteristiche.

Indicheremo con \mathcal{M} la classe degli insiemi misurabili. Se $A \in \mathcal{M}$, cioè se A è misurabile, scriviamo $m(A)$ invece di $m^*(A)$ e chiamiamo $m(A)$ la *misura* (secondo Lebesgue) di A . Sia ora $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione (positiva a valori reali estesi). Diciamo che f è *misurabile* secondo Lebesgue se $\text{epi}(f)$ è un insieme misurabile. Per una tale f chiamiamo *integrale* di f l'espressione

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx := m(\text{epi}(f))$$

Tale integrale può benissimo essere $+\infty$.

Se invece si considera una funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, \infty]$ diremo che essa è misurabile se le due funzioni parte positiva f^+ e parte negativa f^- sono entrambe misurabili. Diremo che f è *integrabile* se f è misurabile e se $\int f^+ < +\infty$ e $\int f^- < +\infty$ e in tal caso chiameremo integrale di f l'espressione

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x) dx$$

Notiamo dunque che le funzioni misurabili positive hanno sempre integrale (eventualmente infinito) mentre le funzioni a segno variabile hanno integrale solo quando questo è finito. Infine se A è un insieme misurabile e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione possiamo dire che f è misurabile (integrabile) su A se la funzione \tilde{f} che è eguale a f su A e vale zero fuori di A è misurabile (integrabile). Si definisce inoltre l'integrale di f su A come

$$\int_A f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x) dx.$$

Notiamo che insiemi misurabili o funzioni integrabili non sono necessariamente limitati. Vediamo ora le proprietà principali degli insiemi e delle funzioni misurabili.

4.1.5 Proposizione (proprietà degli insiemi misurabili).

1. I plurirettangoli sono misurabili e la loro misura coincide con quella di partenza. In particolare l'insieme vuoto e tutto \mathbb{R}^N sono misurabili, di misura 0 e $+\infty$ rispettivamente.

2. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^N , allora

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M} \quad , \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.$$

Inoltre si ha (varie forme di additività numerabile):

(a) Se gli A_n sono a due a due disgiunti: $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n).$$

(b) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente: $A_n \subset A_{n+1}$, allora

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

(c) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente: $A_{n+1} \subset A_n$, e se $m(A_1) < +\infty$ allora

$$m\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

3. Se $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{M}$, allora $A \setminus B \in \mathcal{M}$. Inoltre, se $m(A \cap B) < +\infty$, allora $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$.

Se ne deduce in particolare che, se $B \subset A$, allora $m(B) \leq m(A)$.

4.1.6 Definizione. Diremo che un sottoinsieme E di \mathbb{R}^N è trascurabile se $m^*(E) = 0$.

4.1.7 Proposizione. 1. Se E è trascurabile, allora $E \in \mathcal{M}$ (e $m(E) = 0$).

2. Se E è trascurabile ed $E_1 \subset E$, allora E_1 è trascurabile.

3. Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di insiemi trascurabili, allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ è trascurabile.

Ogni insieme fatto da un numero finito di punti è ovviamente trascurabile. Anche \mathbb{N} e \mathbb{Z} sono trascurabili in quanto $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\}$ e $\mathbb{Z} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n, -n\}$. Ma anche l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è trascurabile. Infatti è noto che anche \mathbb{Q} è "numerabile", cioè è immagine di una successione (q_n) , cioè $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{q_n\}$.

4.1.8 Definizione. Nel seguito diremo che una proprietà $P(x)$ è vera quasi ovunque in \mathbb{R}^N o per quasi ogni x di \mathbb{R}^N , se l'insieme delle x di \mathbb{R}^N per cui $P(x)$ è falsa è trascurabile. Per esempio diremo che una funzione f è quasi ovunque nulla o equivalentemente che $f(x) = 0$ per quasi ogni x , intendendo con questo che l'insieme $\{x : f(x) \neq 0\}$ ha misura zero. Analogamente diremo che due funzioni f e g sono eguali quasi ovunque se la loro differenza è quasi ovunque nulla.

Analoghe proprietà valgono per le funzioni misurabili/integrabili.

4.1.9 Proposizione (proprietà delle funzioni misurabili).

1. Se f e g sono misurabili allora $f + g$ e fg sono misurabili¹. Inoltre se f e g sono integrabili, e $c \in \mathbb{R}$, allora $f + g$ e cf sono integrabili e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(x) dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (cf(x)) dx = c \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx.$$

2. Se f è misurabile allora $|f|$ è misurabile (il viceversa non è vero).
Se f è misurabile allora f è integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile.
3. Se f è misurabile, g è integrabile e $|f| \leq g$, allora f è integrabile e

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x) dx.$$

4. Se f è integrabile ed è positiva allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ per quasi ogni } x \quad (f = 0 \text{ quasi ovunque}).$$

5. f è misurabile se e solo se tutti gli insiemi $E_c := \{x : f(x) \leq c\}$ con $c \in \mathbb{R}$ sono misurabili.
6. Se f è misurabile e $g = f$ quasi ovunque, allora g è misurabile.
Se f è integrabile e $g = f$ quasi ovunque, allora g è integrabile e gli integrali sono gli stessi.
In particolare se f è misurabile e A è trascurabile, si ha che f è integrabile su A e che $\int_A f = 0$.
7. Se (f_n) è una successione di funzioni misurabili che tendono puntualmente ad una funzione $f: f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni x , allora f è misurabile. Lo stesso è vero se $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque, cioè se si rimpiazza il “per ogni x ” con “per quasi ogni x ”.

4.1.10 Proposizione (confronto con Riemann). Valgono i fatti seguenti.

- Se A è un insieme limitato misurabile secondo Riemann, allora A è misurabile e $m_{\mathbb{R}}(A) = m(A)$.
- Se f è una funzione limitata con supporto compatto integrabile secondo Riemann, allora è integrabile e le due definizioni di integrale coincidono.
- Se f è assolutamente integrabile in senso improprio secondo Riemann (su un intervallo di \mathbb{R}) allora è integrabile e l'integrale improprio coincide con l'integrale.

In particolare le funzioni continue o continue a tratti sono certamente misurabili e sono integrabili sugli intervalli chiusi e limitati.

Invece le funzioni integrabili in senso improprio secondo Riemann che non siano assolutamente integrabili non sono integrabili secondo Lebesgue (perché parte positiva e parte negativa hanno entrambe integrale infinito). Per esempio $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ non è integrabile secondo Lebesgue su \mathbb{R} .

¹bisognerebbe dire cosa si intende per $f(x) + g(x)$ se $f(x) = +\infty$ e $g(x) = -\infty$, o viceversa; si vede però che si può decidere di porre tale somma eguale ad un valore arbitrario e i risultati scritti sono veri - nel caso poi dell'integrabilità si può vedere che tali x costituiscono un insieme trascurabile che non influenza il valore dell'integrale.

4.1.11 Teorema (di Lebesgue o della convergenza dominata).

Sia (f_n) una successione di funzioni integrabili in un insieme misurabile A .

Supponiamo che esista g integrabile in \mathbb{R}^N con la proprietà $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni n in \mathbb{N} e per ogni (o per quasi ogni) x in A .

Supponiamo anche che per ogni (o per quasi ogni) x esista $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ che possiamo indicare con $f(x)$.

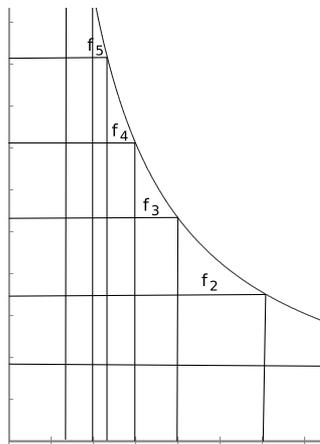
Allora la funzione f (definita arbitrariamente nelle x in cui non esiste il limite) è integrabile e

$$\int_A f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx.$$

4.1.12 Esempio. Abbiamo già visto che la convergenza puntuale in generale non implica la convergenza degli integrali. Mostriamo ora un altro controesempio di questo fatto, confrontandolo con il teorema precedente. Possiamo considerare la seguente successione di funzioni su \mathbb{R} :

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ oppure } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Si vede facilmente che $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_0^{1/n} n dx = \frac{1}{n}n = 1$ ma che per ogni x fissato $f_n(x) = 0$ se $x \leq 0$ o se $x > 0$ e $n > 1/x$; ne segue che $f_n(x) \rightarrow 0$ e dunque l'integrale non passa al limite. In effetti il teorema di convergenza dominata non può valere dato che "l'involuppo" delle f_n è la funzione $1/x$ che non è integrabile.



Dal teorema di Lebesgue si deducono i seguenti teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Notiamo che, tra le ipotesi scritte sotto, quella di misurabilità (che pure dobbiamo mettere) è verificata praticamente sempre - lo è per esempio non appena la funzione è continua (o continua a tratti). L'ipotesi cruciale è il fatto che gli integrandi siano **dominati** uniformemente rispetto al parametro.

4.1.13 Teorema. Sia A un aperto di \mathbb{R}^N e sia $F : A \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

- per ogni y fissato in \mathbb{R}^M la funzione $x \mapsto F(x, y)$ è continua in A ;
- per ogni x fissato in A la funzione $y \mapsto F(x, y)$ è misurabile;
- esiste $g : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile tale che $|F(x, y)| \leq g(y) \quad \forall x, \forall y$.

(la terza proprietà si può interpretare dicendo che la funzione $y \mapsto F(x, y)$ è integrabile in y “uniformemente rispetto a x in A ”).

Allora la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}^M} F(x, y) dy$$

è continua, cioè per ogni x_0 in I :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\mathbb{R}^M} F(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^M} F(x_0, y) dy$$

Supponiamo ora che k sia tra 1 ed N e che, oltre alle precedenti, si abbia:

- per ogni y fissato in \mathbb{R}^M $x \mapsto F(x, y)$ ha derivata parziale k -esima continua;
- per ogni x fissato in A la funzione $y \mapsto \frac{\partial}{\partial x_k} F(x, y)$ è misurabile;
- esiste $g_1 : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile tale che $\left| \frac{\partial}{\partial x_k} F(x, y) \right| \leq g_1(y) \quad \forall x, \forall y$.

Allora la funzione f è derivabile rispetto a x_k e si può derivare sotto il segno di integrale:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \int_{\mathbb{R}^M} \frac{\partial}{\partial x_k} F(x, y) dy.$$

4.1.14 Esempio. Consideriamo

$$f(x) := \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy.$$

La funzione scritta sopra ha senso se e solo se $x > 0$ (altrimenti l'integrale è infinito). Ci possiamo chiedere allora se f sia continua o derivabile in $]0, +\infty[$. Per provare la continuità, cercando di applicare la prima parte del teorema precedente, si è indotti a cercare una funzione integrabile g tale che

$$e^{-xy^2} \leq g(y) \quad \forall x > 0, \forall y \geq 0.$$

Si capisce facilmente che una tale g non si può trovare, perché in tal caso la $f(x)$ verrebbe finita anche in zero. Possiamo però fissare un numero $a > 0$ e ragionare su $[a, +\infty[$. È immediato che

$$e^{-xy^2} \leq e^{-ay^2} \quad \forall x \geq a, \forall y \geq 0$$

da cui si deduce la continuità di f in $]a, +\infty[$ (essendo $g(y) := e^{-ay^2}$ integrabile su $[0, +\infty[$). Dato però che $a > 0$ è arbitrario se ne deduce che f è continua su tutto $]0, +\infty[$.

Per studiare la derivabilità conviene fissare $0 < a < b < +\infty$ e notare che

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} e^{-xy^2} \right| = 2xye^{-xy^2} \leq 2bye^{-ay^2} \quad \forall x \in [a, b], \forall y \geq 0.$$

Allora f è derivabile in $]a, b[$ e per ogni x in $]a, b[$ si ha

$$f'(x) = -2x \int_0^{+\infty} ye^{-xy^2} dy.$$

Per l'arbitrarietà di a e b tale risultato è valido per ogni $x > 0$.

Un altro teorema di passaggio al limite, questa volta sotto il segno di serie, si ottiene dal teorema di Lebesgue ricordando che una serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ si può sempre vedere come l'integrale su $[0, +\infty[$ della funzione costante a tratti $f(x) := a_{[x]}$. Si ha allora:

4.1.15 Teorema (Teorema di Lebesgue per le serie). *Sia $(a_{n,m})$ una successione a due indici. Supponiamo che*

- per ogni n esiste $a_n := \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m}$;
- esista una successione (b_n) tale che $b_n \geq 0$ e

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n < +\infty, \quad |a_{n,m}| \leq b_n \quad \forall n, m.$$

Allora (a_n) è sommabile e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n,m} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

I seguenti teoremi stabiliscono che gli integrali in \mathbb{R}^N sono degli “integrali multipli”. È importante il fatto che il primo teorema (che riguarda funzioni positive) vale anche se gli integrali sono infiniti e può essere allora usato come criterio di integrabilità.

4.1.16 Teorema (di Tonelli). *Supponiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow [0, +\infty]$ sia misurabile. Per ogni y in \mathbb{R}^M poniamo $f_y(x) := f(x, y)$: Allora:*

- per quasi ogni y in \mathbb{R}^M f_y è misurabile su \mathbb{R}^N ;
- se poniamo $F(y) := \int_{\mathbb{R}^M} f_y$ (definendola a piacere dove f_y non è misurabile), allora F è misurabile su \mathbb{R}^M ;
- si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^M} F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x, y) dx \right) dy.$$

Notiamo che, in particolare, scambiando x e y , si vede che gli integrali fatti nell'ordine inverso portano allo stesso risultato.

4.1.17 Osservazione (principio di Cavalieri). Sia A un insieme misurabile di \mathbb{R}^{N+M} e per ogni y_0 in \mathbb{R}^M indichiamo con A_{y_0} l'insieme $A \cap \{(x, y) : y = y_0\}$ cioè la sezione di A fatta tramite l'iperpiano di equazione $y = y_0$. Allora (come si vede facilmente applicando il teorema di Tonelli alla funzione che vale 1 su A e zero fuori di A):

- per quasi ogni y in \mathbb{R}^M si ha che A_y è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^N ;
- la funzione $y \mapsto m(A_y)$, definita a piacere dove non ha senso, è misurabile su \mathbb{R}^M ;
- si ha

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^M} m(A_y) dy.$$

4.1.18 Osservazione. Si deduce dal teorema di Tonelli che tratti rettilinei sono trascurabili nel piano: per esempio l'asse x è trascurabile in quanto la misura della sua sezione con una qualunque parallela all'asse y è trascurabile (essendo fatta da un singolo punto).

4.1.19 Osservazione. Il teorema di Tonelli può essere usato come criterio di integrabilità: per verificare se una $f(x, y)$ è integrabile su \mathbb{R}^{N+M} basta controllare se

$$\int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x, y)| dx \right) dy < +\infty$$

dato che f è integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile.

Nel prossimo teorema, a differenza di quanto fatto nel precedente, si suppone che f sia integrabile. Come prima $f_y(x) = f(x, y)$.

4.1.20 Teorema (di Fubini). *Sia $f : \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora:*

- per quasi ogni y in \mathbb{R}^M f_y è integrabile su \mathbb{R}^N ;
- se poniamo $F(y) := \int_{\mathbb{R}^N} f_y$ (definendola a piacere dove f_y non è integrabile), allora F è integrabile su \mathbb{R}^M ;
- si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^M} F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x, y) dx \right) dy.$$

Anche in questo caso (se vale l'ipotesi che ora è l'integrabilità di f) gli integrali iterati non dipendono dall'ordine in cui sono svolti.

4.1.21 Teorema (di cambio di variabile). *Supponiamo che A sia un aperto di \mathbb{R}^N e che $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ sia una applicazione iniettiva e $\mathcal{C}^1(A)$.*

Allora ogni sottoinsieme misurabile E di A di ha che $\Phi(E)$ è misurabile, Inoltre se $f : \Phi(E) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ è integrabile si ha

$$\int_{\Phi(E)} f(x) dx = \int_E f(\Phi(y)) |\det(J_\Phi(y))| dy$$

dove J_Φ indica la matrice Jacobiana di Φ : $(J_\Phi)_{i,j}(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi_j(y)$.

4.1.22 Esempio (coordinate polari). Consideriamo $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$. È immediato verificare che:

$$J_\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin \theta \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_\Phi = \rho.$$

Peraltro Φ non è iniettiva come si vede subito, sia perché $\Phi(0, \theta) = (0, 0)$ per qualunque θ , sia perché $\Phi(\rho, \theta + 2\pi k) = \Phi(\rho, \theta)$ per k intero. Se prendiamo $A := \{\rho > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ si vede facilmente che A è un aperto e che Φ è iniettiva su A ; peraltro l'immagine di A è $B := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [0, +\infty[$ che non esaurisce tutto \mathbb{R}^2 . Se invece prendiamo $A_1 := \{\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ($A_1 = \bar{A}$) allora immagine di A_1 è tutto \mathbb{R}^2 (ma A_1 non è aperto e Φ non è iniettiva su A_1). Notiamo però che $A_1 \setminus A$ è trascurabile in quanto formato da tratti rettilinei (anche se alcuni illimitati) e per lo stesso motivo è trascurabile $\mathbb{R}^2 \setminus B = \{0\} \times [0, +\infty[$.

A questo punto prendiamo un insieme misurabile F in \mathbb{R}^2 e una funzione $f : F \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrabile.

Definiamo $E := \{(\rho, \theta) \in A_1 : \Phi(\rho, \theta) \in F\} = \Phi^{-1}(F) \cap A_1$; poniamo anche $F^* := F \setminus \{0\} \times$

$[0, +\infty[= F \cap B$ ed $E^* := \{(\rho, \theta) \in A : \Phi(\rho, \theta) \in F^*\} = \Phi^{-1}(F) \cap A$. Dunque $\Phi(E) = F$ e $\Phi(E^*) = F^*$ e si ha:

$$\begin{aligned} \int_F f(x, y) dx dy &= \int_{F^*} f(x, y) dx dy = \int_{\Phi(E^*)} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{E^*} f(\Phi(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta = \int_E f(\Phi(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

(nel primo e nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la trascurabilità di $F \setminus F^* \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$ e di $E \setminus E^* \subset A_1 \setminus A$ mentre nel passaggio tra la prima riga e la seconda abbiamo usato il teorema di cambio di variabile).

4.1.23 Esempio. Consideriamo la funzione $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Passando in coordinate polari (A_1 è quello di prima) e poi applicando Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{A_1} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} \right) d\theta = \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi [-e^{-t}]_0^{+\infty} = \pi \end{aligned}$$

Notiamo peraltro che (sempre per Fubini-Tonelli):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

4.2 Spazi di funzioni con norme integrali

4.2.1 Definizione. Dato un insieme misurabile A di \mathbb{R}^N consideriamo:

$$\mathcal{L}^1(A) = \{\text{funzioni integrabili su } A\},$$

$$\mathcal{L}^2(A) = \{\text{funzioni } f \text{ misurabili su } A \text{ tali che } f^2 \text{ sia integrabile}\},$$

$$\mathcal{L}^\infty(A) = \{\text{funzioni } f \text{ misurabili su } A \text{ tali che } \exists M \text{ per cui } |f| \leq M \text{ quasi ovunque}\}.$$

Gli elementi di $\mathcal{L}^2(A)$ sono dette funzioni *a quadrato sommabile* o *a energia finita* (chiamando energia di f l'integrale di f^2). Le funzioni di \mathcal{L}^∞ sono dette funzioni *essenzialmente limitate*.

4.2.2 Definizione (norme integrali). Data f in $\mathcal{L}^1(A)$ poniamo:

$$\|f\|_1 := \int_A |f(x)| dx.$$

Analogamente se $f \in \mathcal{L}^2(A)$ poniamo

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx}.$$

Infine per $f \in \mathcal{L}^\infty(A)$ poniamo:

$$\|f\|_\infty := \inf \{M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \text{ per quasi ogni } x\}.$$

4.2.3 Proposizione. *Valgono le seguenti proprietà:*

- $\mathcal{L}^1(A)$, $\mathcal{L}^2(A)$, $\mathcal{L}^\infty(A)$ sono spazi lineari;
- $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ verificano le proprietà (2) e (3) della norma (vedi la definizione 2.2.6). Non vale invece la (1) dato che

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ per quasi ogni } x.$$

(dove $\|f\|$ è una qualunque tra $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ e $\|f\|_\infty$).

- se $f \in \mathcal{L}^1(A)$ e se $g \in \mathcal{L}^\infty(A)$, allora $fg \in \mathcal{L}^1(A)$; inoltre $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
- se $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$, allora $fg \in \mathcal{L}^1(A)$; inoltre $\|fg\|_1 \leq \frac{1}{2} \|f\|_2^2 + \frac{1}{2} \|g\|_2^2$.

Per fare in modo di avere degli spazi normati con le norme integrali sopra introdotte dobbiamo introdurre un'altra definizione.

4.2.4 Definizione. Sia A un insieme misurabile di \mathbb{R}^N . Date due funzioni misurabili f e g diciamo che sono equivalenti e scriviamo $f \sim g$ se f e g sono uguali quasi ovunque. Considereremo ²

$$\begin{aligned} L^1(A) &= \mathcal{L}^1(A) \text{ in cui funzioni equivalenti sono considerate eguali,} \\ L^2(A) &= \mathcal{L}^2(A) \text{ in cui funzioni equivalenti sono considerate eguali,} \\ L^\infty(A) &= \mathcal{L}^\infty(A) \text{ in cui funzioni equivalenti sono considerate eguali.} \end{aligned}$$

in questo modo le funzioni

$$f(x) = 0 \text{ per ogni } x, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

rappresentano lo stesso oggetto in $L^1/L^2/L^\infty$ (sono nella stessa classe di equivalenza) dato che l'insieme \mathbb{Q} è trascurabile.

Possiamo infine considerare $\|f\|_1 / \|f\|_2 / \|f\|_\infty$ per f in $L^1(A)/L^2(A)/L^\infty(A)$. ³

Si vede allora che vale il seguente risultato.

4.2.5 Proposizione.

- $\|\cdot\|_1$ è una norma in $L^1(A)$;
- $\|\cdot\|_2$ è una norma in $L^2(A)$;
- $\|\cdot\|_\infty$ è una norma in $L^\infty(A)$.

²Per definire rigorosamente questi insiemi bisognerebbe parlare di classi di equivalenza rispetto alla relazione introdotta sopra: data f misurabile si definisce $[f] := \{g \text{ misurabile} : g \sim f\}$; allora $[f]$ si dice la classe di equivalenza di f rispetto a \sim , mentre f si dice un rappresentante $[f]$ - inoltre $[f] = [g]$ se e solo se $f \sim g$. Con queste definizioni $L^1(A) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^1(A)\}$, $L^2(A) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^2(A)\}$ e $L^\infty(A) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^\infty(A)\}$.

³In realtà dovremmo dire che $\|f\|_1 = \|\tilde{f}\|_1$ dove \tilde{f} è un qualunque rappresentante di f , notando che tale definizione sta in piedi perché funzioni equivalenti hanno lo stesso integrale.

È vero anche il seguente importante risultato.

4.2.6 Teorema. *Gli spazi $L^1(A)$, $L^2(A)$ ed $L^\infty(A)$ sono completi.*

4.2.7 Osservazione. Tutte le nozioni di integrale sono state date, fino ad ora, per funzioni a valori reali (estesi). Si può ripetere tutto per funzioni a valori complessi dicendo semplicemente che una funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile/integrabile se e solo se $\Re f$ e $\Im f$ (che sono a valori reali) sono entrambe misurabili/integrabili. Con questa definizione risulta immediatamente che se f è misurabile allora f integrabile se e solo se $|f|$ integrabile (n.b. il modulo di f è una funzione reale). Si possono definire quindi gli spazi L^1 , L^2 ed L^∞ anche per funzioni a valori complessi pur di sostituire il valore assoluto con il modulo.

L'importanza dello spazio L^2 sta nel fatto che in L^2 si può introdurre un prodotto scalare e si può di conseguenza parlare di ortogonalità e di proiezioni. Dato che ci interesserà anche il caso complesso, diamo la definizione direttamente in questo caso (che comprende anche quello in cui tutte le funzioni sono reali).

4.2.8 Definizione (prodotto scalare in L^2). Date due funzioni f, g in $L^2(A)$ (a valori complessi) definiamo il prodotto scalare $\langle f, g \rangle$ tra f e g ponendo

$$\langle f, g \rangle := \int_A f(x) \overline{g(x)} dx$$

(l'integrale ha senso perchè se f e g sono in $L^2(A)$ allora fg è integrabile).

Si diremo che f è ortogonale a g se $\langle f, g \rangle = 0$.

Il prodotto scalare ha le seguenti proprietà: date f, g in $L^2(A)$ e z in \mathbb{C} :

- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$, $\langle f, f \rangle = \|f\|^2$;
- $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$, $\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$;
- $\langle zf, g \rangle = z \langle f, g \rangle$, $\langle f, zg \rangle = \bar{z} \langle f, g \rangle$

La seguente disuguaglianza ha una notevole importanza ed è sostanzialmente indipendente da come è stato definito il prodotto scalare, dipendendo solo dalle proprietà elencate sopra.

4.2.9 Teorema (disuguaglianza di Schwartz). *Siano f e g in L^2 . Allora*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

In altri termini, per ogni f e g in $L^2(A)$ ($\mathcal{L}^2(A)$) vale:

$$\left| \int_A f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_A |g(x)|^2 dx}.$$

Dimostrazione. Per z in \mathbb{C} poniamo $p(z) := \|f - zg\|^2$. Allora:

$$\begin{aligned} 0 \leq p(z) &= \langle f - zg, f - zg \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, zg \rangle - \langle zg, f \rangle + \langle zg, zg \rangle = \\ &= \|f\|^2 - 2\Re(\bar{z} \langle f, g \rangle) + |z|^2 \|g\|^2. \end{aligned}$$

Se prendiamo z del tipo $x \langle f, g \rangle$ con x reale, otteniamo:

$$0 \leq \|f\|^2 - 2x |\langle f, g \rangle|^2 + x^2 |\langle f, g \rangle|^2 \|g\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che il polinomio di secondo grado in x scritto sopra deve avere discriminante negativo, cioè

$$|\langle f, g \rangle|^4 \leq \|f\|^2 |\langle f, g \rangle|^2 \|g\|^2 \Leftrightarrow |\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2.$$

Trattandosi di numeri positivi si ha la tesi. □

4.2.10 Osservazione. Se (f_n) è una successione di funzioni di $L^1(A)$ ed $f \in L^1(A)$ allora

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \Rightarrow \int_A f_n \rightarrow \int_A f. \quad (4.1)$$

Infatti l'operatore $I(f) := \int_A f$ è lineare su $L^1(A)$ (come è evidente) ed è anche continuo in quanto

$$|I(f)| = \left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| = \|f\|_1$$

(e dunque $\|I\| \leq 1$ – si vede poi che $\|I\| = 1$). Analogamente se (f_n) e (g_n) sono successioni di funzioni di $L^2(A)$ ed $f, g \in L^2(A)$ si ha

$$f_n \xrightarrow{L^2} f, g_n \xrightarrow{L^2} g \Rightarrow \int_A f_n g_n \rightarrow \int_A f g. \quad (4.2)$$

4.2.11 Osservazione. Se l'insieme A ha misura finita allora le funzioni limitate sono integrabili su A e quindi sono sia in $L^1(A)$ che in $L^2(A)$. Se ne deduce che $L^\infty(A) \subset L^2(A) \subset L^1(A)$. Per la seconda inclusione basta osservare che, se $f \in L^2(A)$

$$\int_A |f(x)| dx = \int_A |f(x)| \cdot 1 dx \leq \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_A 1^2 dx} < +\infty$$

per la disuguaglianza di Schwartz (con $g = 1$).

Per gli stessi motivi si vede che, nel caso di A limitato

$$f_n \xrightarrow{L^\infty} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^1} f.$$

Se invece $m(A) = +\infty$, allora i due spazi $L^1(A)$ e $L^2(A)$ sono inconfrontabili. Per esempio se $A = \mathbb{R}$ la funzione $f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$ è in $L^2(\mathbb{R})$ ma non in $L^1(\mathbb{R})$ perché all'infinito

è dell'ordine di $\frac{1}{x}$ che non è integrabile mentre $\frac{1}{x^2}$ è integrabile. Peraltro la funzione $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}$ è in $L^1(\mathbb{R})$ ma non in $L^2(\mathbb{R})$ (all'infinito non ci sono problemi né

per f_2 né per f_2^2 , mentre in zero f_2 è dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ che è integrabile e f_2^2 è dell'ordine di $\frac{1}{|x|}$ che non è integrabile.

4.2.12 Osservazione. Se A è un compatto di \mathbb{R}^N allora le funzioni continue su A sono elementi di $L^\infty(A)$ (dunque di $L^2(A) \subset L^1(A)$)⁴ e dire $f_n \xrightarrow{unif} f$ equivale a $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$. In effetti la norma $\|\cdot\|_\infty$ è la vecchia norma uniforme per le funzioni limitate (con la differenza del senso quasi ovunque per le funzioni). Possiamo quindi pensare che lo spazio $\mathcal{C}(A)$ sia un sottospazio chiuso di $L^\infty(A)$.

4.2.13 Esempio. Consideriamo $\alpha > 0$ e la successione di funzioni (f_n) definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ 0 < & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora:

$$\|f_n\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^\alpha dx = \frac{n^\alpha}{n} = n^{\alpha-1}.$$

⁴a patto, sempre, di pensare alle classi di equivalenza; in questo senso dire che una f di $L^1(A)$ è continua significa dire che c'è una funzione continua quasi ovunque eguale a f .

e quindi $f_n \xrightarrow{L^1} 0$ se e solo se $\alpha < 1$. Invece

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} n^{2\alpha} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n^{2\alpha}}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = n^{\alpha - \frac{1}{2}},$$

e in questo caso $f_n \xrightarrow{L^2} 0$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$. Dunque le due convergenze non coincidono in generale (si potrebbe anche vedere che (f_n) non ha limite in $L^2(\mathbb{R})$ quando $\alpha \geq \frac{1}{2}$ e non ha limite in $L^1(\mathbb{R})$ quando $\alpha \geq 1$).

Concludiamo con un confronto (senza dimostrazione) tra convergenza in L^1 o L^2 e la convergenza puntuale. Diciamo subito che in generale

$$\text{non è detto che } f_n \xrightarrow{L^1} f \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ per (quasi) ogni } x$$

Vale però il seguente risultato

4.2.14 Proposizione. *Se $f_n \xrightarrow{L^1} f$ oppure se $f_n \xrightarrow{L^2} f$, allora esiste una sottosuccessione (f_{n_k}) tale che $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ per quasi ogni x .*

In particolare se ne ricava che:

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \text{ (} f_n \xrightarrow{L^2} f \text{) e } f_n \rightarrow g \text{ quasi ovunque} \Rightarrow f = g$$

cioè la convergenza quasi ovunque individua il limite (se esiste) in L^1/L^2 .

4.3 Approssimazione di funzioni integrabili e conseguenze

Ricordiamo che la differenza simmetrica tra due insiemi A e B si definisce come $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4.3.1 Proposizione. *Se A è un insieme misurabile allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo numerabile P_ε tale che $m(A\Delta P_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Se $m(A) < +\infty$ allora il plurirettangolo P si può prendere finito (e dunque limitato).

Idea di dimostrazione. Nel caso in cui A abbia misura finita è chiaro dalla definizione di misura esterna che si trova un plurirettangolo numerabile $P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k$ contenente A la cui misura è vicina alla misura di A e quindi $m(A\Delta P)$ è piccola. Se poi si passa a una somma finita $P' = \sum_{k=1}^n |R_k|$, pur di prendere n grande, la misura $m(P \setminus P')$ è piccola e alla fine P' è un plurirettangolo finito con $m(A\Delta P')$ piccola. \square

4.3.2 Definizione. Se A è un insieme misurabile chiamiamo *indicatrice di A* la funzione 1_A definita da $1_A(x) = 1$ se $x \in A$, $1_A(x) = 0$ se $x \notin A$. L'indicatrice di A è misurabile, positiva e $m(A) = \int_{\mathbb{R}^N} 1_A$.

Diremo che una g è *costante a tratti* se si può scrivere $g = \sum_{k=1}^n 1_{R_k}$ dove R_1, \dots, R_k sono rettangoli. Notiamo che una tale g è integrabile se e solo se tali rettangoli sono tutti limitati.

Se A è un insieme aperto chiamiamo $\mathcal{C}_c^\infty(A)$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente derivabili e tali che il supporto di f è limitato ed è contenuto in A (tale f deve fare zero fuori da un chiuso limitato che non tocca il bordo di A).

4.3.3 Proposizione. *Sia A un insieme misurabile e sia f in $L^1(A)$ (oppure in $L^2(A)$). Consideriamo la funzione \tilde{f} definita su tutto \mathbb{R}^N ponendo $\tilde{f}(x) = f(x)$, se $x \in A$, $\tilde{f}(x) = 0$, se $x \notin A$. Allora*

- *esiste una successione (f_n) di funzioni costanti a tratti tali che $f_n \xrightarrow{L^1} \tilde{f}$ (rispettivamente $f_n \xrightarrow{L^2} \tilde{f}$; inoltre si può anche ottenere che $f_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ per quasi ogni x , cioè $f_n \rightarrow \tilde{f}$ quasi ovunque ⁵;*
- *se f è anche limitata, allora le f_n si possono trovare tutte equilimitate: $f_n(x) \leq C \forall n, \forall x$ per una opportuna costante (fissa) C ;*
- *Se A è un aperto allora le f_n , invece che costanti a tratti, si possono trovare in $C_c^\infty(A)$.*

Idea di dimostrazione. La dimostrazione di queste proprietà discende dall'approssimabilità in misura di un insieme misurabile mediante plurirettangoli finiti stabilita nella proposizione 4.3.1, dato che (a meno di qualche precisazione) approssimare l'epigrafico di una funzione integrabile mediante dei plurirettangoli finiti in \mathbb{R}^{N+1} equivale ad approssimare f con funzioni costanti a tratti. La convergenza puntuale quasi ovunque si può dedurre dalla 4.2.14.

Nel caso dell'aperto infine è abbastanza intuitivo (anche se lungo da dimostrare) che le funzioni costanti a tratti si possono "arrotondare" vicino ai punti di salto senza far variare troppo l'integrale. In questo modo si riesce a dimostrare l'approssimabilità (in integrale) mediante funzioni regolari. \square

Vediamo ora alcune conseguenze delle approssimazioni sopra indicate.

4.3.4 Proposizione (principio di eguaglianza debole). *Sia A un aperto f una funzione di $f \in \mathcal{L}^1(A)$. Se si ha*

$$\int_A f(x)\phi(x) dx = 0 \quad \forall \phi \text{ in } C_c^\infty(A)$$

allora f è quasi ovunque nulla (quindi $f = 0$ se la pensiamo in $L^1(A)$). Ne segue che, se $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$ e se

$$\int_A f(x)\phi(x) dx = \int_A g(x)\phi(x) dx \quad \forall \phi \text{ in } C_c^\infty(A) \quad (4.3)$$

allora $f = g$ quasi ovunque (quindi f e g sono la stessa funzione in $L^1(A)$). Lo stesso discorso vale in $\mathcal{L}^2(A)$.

Dimostrazione. Supponiamo per semplicità che A sia limitato (si può fare lo stesso senza, ma è più complicato). Allora se $A^+ := \{x : f(x) > 0\}$, $A^- := \{x : f(x) < 0\}$, A^+ e A^- sono misurabili e la funzione $g := 1_{A^+} - 1_{A^-}$ è integrabile. Dunque possiamo trovare una successione ϕ_n di funzioni $C_c^\infty(A)$ tali che $\phi_n \xrightarrow{L^1} g$ e $\phi_n \rightarrow g$ quasi ovunque; dato che $|g| \leq 1$ possiamo anche supporre che $|\phi_n(x)| \leq C$ per ogni x e per ogni n , dove C è un'opportuna costante. Allora si ha che $f\phi_n \rightarrow fg = |f|$ e anche $|f(x)\phi_n(x)| \leq C|f(x)|$ e quest'ultima è una funzione integrabile che non dipende da n . Applicando il teorema di Lebesgue

$$0 = \int_A f(x)\phi_n(x) dx \rightarrow \int_A |f(x)| dx \Rightarrow \int_A |f(x)| dx = 0$$

e dunque $f = 0$. \square

⁵notiamo che le f_n (f_n^2) sono integrabili e dunque $f_n(x) = 0$ fuori da un disco (che dipende da n)

4.3.5 *Osservazione.* Data f in $L^1(A)$ possiamo considerare l'operatore L_f che ad ogni ϕ in $C_c^\infty(A)$ fa corrispondere il numero $L_f\phi := \int_A f\phi$. Tale operatore è lineare e per la (4.3) la conoscenza di L_f su tutte le ϕ in $C_c^\infty(A)$ individua la f a meno di quasi ovunque (cioè individua la f come elemento di $L^1(A)$).

Conviene pensare che ognuna di queste funzioni ϕ rappresenti una "misurazione" che si può effettuare per cercare di trovare i valori di f , misurazione il cui risultato è $L_f\phi$. Con questa classe di misurazioni non potrò mai trovare l'esatto valore $f(x_0)$ in un punto assegnato x_0 dato che il risultato $L_f\phi$ coinvolge tutti i punti del supporto di ϕ ; potrò però andarci arbitrariamente vicino pur di prendere il supporto sempre più concentrato vicino al punto x_0 .

Un altro modo di interpretare il risultato detto sopra è dire che, se due fenomeni f e g sono diversi (nel senso che f differisce da g su un insieme non trascurabile), allora si trova una misurazione ϕ che li distingue, tale cioè che $L_f\phi \neq L_g\phi$.

Il fatto di utilizzare gli integrali per fare le misurazioni (è abbastanza intuitivo supporre che non si possa fare altro che delle "medie") porta inevitabilmente al fatto che (anche ammettendo di avere a disposizione misurazioni arbitrariamente accurate) si può conoscere f solo quasi ovunque, da cui la necessità della relazione di equivalenza introdotta all'inizio.

Un altro risultato che ci servirà più avanti è il seguente.

4.3.6 Lemma (di Riemann). *Sia f una funzione integrabile su \mathbb{R} . Allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che $f = 1_{[a,b]}$ con $a < b$ reali. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(nx) dx = \int_a^b \sin(nx) dx = \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_a^b = \frac{\cos(a) - \cos(b)}{n} \rightarrow 0.$$

Per linearità la stessa proprietà vale se f è costante a tratti. Passiamo al caso generale $f \in L^1(\mathbb{R})$. Possiamo trovare una successione f_k di funzioni costanti a tratti tali che $f_k \xrightarrow{L^1} f$ per $k \rightarrow +\infty$. Poniamo $F_k(n) := \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \sin(nx) dx$ e $F(n) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(nx) dx$.

Si ha

$$|F_k(n) - F(n)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f_k(x) - f(x)) \sin(nx) dx \right| \leq \|f_k - f\|_1 \quad \forall n$$

e dunque

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |F_k(n) - F(n)| \leq \|f_k - f\|_1 \rightarrow 0$$

cioè F_k converge a F uniformemente su \mathbb{N} . Ne segue che (usando il teorema 2.1.8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} F_k(n) = 0.$$

cioè la tesi. □

4.4 Derivate generalizzate in senso integrale

4.4.1 Definizione. Sia I un intervallo aperto (limitato o illimitato) di \mathbb{R} e sia f in $L^1(I)$. Diciamo che f è derivabile nel senso di L^1 o più semplicemente che f ha derivata in L^1 se esiste una successione di funzioni (f_n) ed esiste una funzione g tali che

$$\forall n \ f_n \in L^1(I), \ f_n \in C^1(I), \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \ f'_n \xrightarrow{L^1} g$$

($\mathcal{C}^1(I)$ = funzioni con derivata continua in I). In tal caso diremo che g è una derivata (in senso di L^1) di f .

Vedremo tra un momento che se g_1 e g_2 sono due derivate nel senso di L^1 allora $g_1 = g_2$ quasi ovunque e dunque tale derivata, se esiste è univocamente definita (in L^1) e la possiamo indicare con f' . Questo simbolo è coerente con il fatto che, se f è già una funzione \mathcal{C}^1 allora si può prendere f_n costantemente eguale a f : in questo caso la derivata nel senso di L^1 coincide con quella tradizionale, definita punto per punto (tramite il limite del rapporto incrementale).

4.4.2 Proposizione. *Se f e g sono in $L^1(I)$ e se g è (una) derivata di f nel senso di L^1 allora*

$$\int_I g(t)\phi(t) dt = - \int_I f(t)\phi'(t) dt \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I.) \quad (4.4)$$

Dimostrazione. Per la definizione esiste una successione (f_n) di funzioni in $\mathcal{C}^1(I)$ tali che $f_n \xrightarrow{L^1} f$ e $f'_n \xrightarrow{L^1} g$. Prendiamo una ϕ in \mathcal{C}_c^∞ ; integrando per parti:

$$\int_I f'_n(t)\phi(t) dt = - \int_I f_n(t)\phi'(t) dt + [f_n(x)\phi(x)]_a^b = - \int_I f_n(t)\phi'(t) dt$$

(dove a e b sono gli estremi di I e si è sfruttato il fatto che $\phi(a) = \phi(b) = 0$). Facendo tendere n all'infinito si trova la tesi (usando (4.1)). \square

4.4.3 Osservazione. La definizione di derivata generalizzata è univoca: se g_1 e g_2 sono due derivate di f nel senso indicato sopra allora $g_1 = g_2$ in L^1 (cioè $g_1(x) = g_2(x)$ per quasi ogni x). Infatti se g_1 e g_2 sono due derivate generalizzate per f si deduce dalla (4.4) che

$$\int_I (g_1(t) - g_2(t))\phi(t) dt = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(A).$$

Usando il principio di eguaglianza debole (vedi proposizione 4.3.4) si ottiene $g_1 = g_2$ quasi ovunque.

4.4.4 Proposizione. *Se $f \in L^1(I)$ ha una derivata g nel senso di L^1 allora f è continua e vale la formula:*

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \quad \forall t_0 \in I. \quad (4.5)$$

Dimostrazione. Sia (f_n) una successione in $L^1(I) \cap \mathcal{C}^1$ tale che $f_n \xrightarrow{L^1} f$ e $f'_n \xrightarrow{L^1} g$. Fissiamo un punto t_0 in I e definiamo

$$F_n(t) := \int_{t_0}^t f'_n(\tau) d\tau, \quad F(t) := \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau.$$

Allora, per qualunque t in I

$$|F_n(t) - F(t)| \leq \int_{t_0}^t |f'_n - g| d\tau \leq \int_I |f'_n - g| d\tau = \|f'_n - g\|_1$$

da cui $\|F_n - F\|_\infty \leq \|f'_n - g\|_1 \rightarrow 0$ e quindi $F_n \xrightarrow{unif} F$. In particolare F è una funzione continua in I (questo si poteva anche dimostrare direttamente, usando il teorema di Lebesgue). Fissiamo ora un qualunque intervallo $[a, b]$ contenuto in I ; si ha

$$\int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b (f_n(t_0) + F_n(t)) dt = (b - a)f_n(t_0) + \int_a^b F_n(t) dt$$

e quindi, facendo tendere n all'infinito

$$f_n(t_0) = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b F_n(t) \right) \rightarrow \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t) dt - \int_a^b F(t) \right)$$

Chiamiamo C il valore trovato a destra nella ultima relazione; quindi $f_n(t_0) \rightarrow C$ per $n \rightarrow \infty$. Mettendo insieme quanto visto fino ad ora si ha che $f_n = f_n(t_0) + F_n \xrightarrow{\text{unif}} C + F$, ma dato che $f_n \xrightarrow{L^1} f$ se ne deduce che $f = C + F$. Dunque f è continua e calcolando l'espressione precedente in t_0 si ha $C = f(t_0)$, da cui la tesi. \square

Analogamente al caso di L^1 si può dare la definizione che segue.

4.4.5 Definizione. Sia I un intervallo aperto (limitato o illimitato) di \mathbb{R} e sia f in $L^2(I)$. Diciamo che f è derivabile nel senso di L^2 o più semplicemente che f ha derivata in L^2 se esiste una successione di funzioni (f_n) ed esiste una funzione g tali che

$$\forall n \ f_n \in L^2(I), \ f_n \in C^1(I), \quad f_n \xrightarrow{L^2} f, \ f'_n \xrightarrow{L^2} g$$

In tal caso diremo che g è la derivata (in senso di L^2) di f e la indicheremo con f' . Anche in questo caso la definizione è ben posta in quanto, se f ha derivata in L^2 la derivata è unica.

Si vede anche in questo caso che se f ha derivata in L^2 essa è continua e vale la stessa formula di prima

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(t) dt \quad \forall t_0 \in I. \quad (4.6)$$

4.4.6 Esempio. La funzione $f(x) := |x|$ ha come derivata in L^2/L^1 la funzione $g(t) := \text{sgn}(t)$ definita da $g(t) = -1$ se $t < 0$, $g(t) = 1$ se $t > 0$ (e non c'è bisogno di definirla in zero, perché $\{0\}$ è trascurabile). In effetti se si considerano le f_n definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| > \frac{1}{n}, \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

si può vedere che $f_n \xrightarrow{L^2} f$ e $f'_n \xrightarrow{L^2} g$.

Viceversa la funzione $H(x)$ di *Heavyside* definita da $H(x) = 0$ per $x < 0$ e $H(x) = 1$ per $t > 0$, non ha derivata in L^1 per ché non è continua. Quindi non c'è modo di approssimare f in L^1 con delle f_n tali che le f'_n convergano a qualcosa in L^1 .

Capitolo 5

Serie di Fourier

5.1 La serie di Fourier in L^2

Sia $T > 0$ assegnato e per il resto di questo paragrafo poniamo $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ (T è un *periodo* assegnato e ω_0 è la corrispondente *frequenza angolare*).

In quanto segue considereremo funzioni periodiche di periodo T a valori complessi. Conviene allora definire

$$L_{per}^2(T) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f(t+T) = f(t) \quad \forall t, |f|^2 \text{ integrabile su } [0, T]\}.$$

Utilizzeremo in $L_{per}^2(T)$ il prodotto scalare di $L^2([0, T])$ (a valori complessi), introdotto in precedenza. I due spazi sono praticamente gli stessi, dato che una funzione di $L^2([0, T])$ si può facilmente estendere per periodicità una di $L_{per}^2(T)$ – le cose però cambiano abbastanza non appena si passa a funzioni più regolari (per esempio continue).

Dato n intero relativo indicheremo con $e_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione di $L_{per}^2(T)$ definita da:

$$\mathbf{e}_n(t) := e^{in\omega_0 t}$$

5.1.1 Proposizione. *Si ha*

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ T & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $n \neq m$ si ha:

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \int_0^T e^{in\omega_0 t} e^{im\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega_0 t}}{i(n-m)\omega_0} \right]_0^T = 0$$

(perché $t \mapsto e^{i(n-m)\omega_0 t}$ è periodica di periodo T). Se $n = m$:

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \int_0^T e^{i(n-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T dt = T.$$

□

5.1.2 Definizione. Per n in \mathbb{N} poniamo

$$E_n := \left\{ \sum_{k=-n}^n \lambda_k \mathbf{e}_k : \lambda_k \in \mathbb{C}, k = -n, \dots, n \right\};$$

quindi E_n è il sottospazio di dimensione finita (pari a $2n+1$) generato da $\mathbf{e}_{-n}, \dots, \mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n$. Inoltre data una funzione f in $L^2_{per}(T)$ poniamo:

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k(t) \quad \text{dove } c_k := \frac{1}{T} \langle f, \mathbf{e}_k \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Chiameremo f_n l'approssimante di Fourier di f di ordine n e chiameremo coefficienti di Fourier complessi in numeri c_k .

5.1.3 Proposizione. *La funzione f_n sopra introdotta ha le seguenti proprietà:*

- $f_n \in E_n$;
- per ogni g in E_n si ha $\langle f - f_n, g \rangle = 0$;
- per ogni g in E_n si ha:

$$\|f - g\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \quad (5.1)$$

e quindi f_n è l'elemento in E_n che ha minima distanza (L^2) da f ;

- si ha inoltre

$$\|f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f - f_n\|_2^2$$

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia. Per dimostrare la seconda basta notare che per ogni j tra $-n$ ed n :

$$\langle f_n, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{k=-n}^n \langle c_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = c_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j = \langle f, \mathbf{e}_j \rangle.$$

Dunque $\langle f - f_n, \mathbf{e}_j \rangle = 0$; ne segue che se $g = \sum_{j=-n}^n \lambda_j \mathbf{e}_j$ si ha $\langle f - f_n, g \rangle = 0$.

Dimostriamo (5.1); presa una g in E_n :

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \|(f - f_n) + (f_n - g)\|_2^2 = \langle (f - f_n) + (f_n - g), (f - f_n) + (f_n - g) \rangle = \\ &= \|f - f_n\|_2^2 + 2\Re \langle f - f_n, f_n - g \rangle + \|f_n - g\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \end{aligned}$$

perché $(f_n - g) \in E_n$ e quindi è ortogonale a $(f - f_n)$. Ne segue che $\|f - g\|_2^2 \geq \|f - f_n\|_2^2$ e l'eguaglianza vale esattamente quando $g = f_n$; dunque f_n è il punto in E_n di minima distanza da f . Per dimostrare l'ultima relazione basta prendere $g = 0$ in (5.1). \square

A questo punto ci possiamo chiedere se per $n \rightarrow \infty$ le f_n tendano a f in qualche senso. La prima cosa che può venire in mente è che $f_n(t) \rightarrow f(t)$ t per t , cioè la convergenza puntuale. Notiamo per inciso che per avere la convergenza uniforme ci vorrà come minimo la continuità di f , dato che le approssimanti f_n sono ovviamente funzioni continue, anzi infinitamente derivabili. Vediamo un lemma preliminare.

5.1.4 Lemma. *Si ha*

$$f_n(t) = \int_0^T f(\tau) D_n(t - \tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.2)$$

dove D_n è il nucleo di Dirichelet definito da

$$D_n(x) := \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n e^{ik\omega_0 x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre D_n ha le seguenti proprietà:

1. $D_n(x + T) = D_n(x)$ per ogni x in \mathbb{R} ;
2. $\int_0^T D_n(x) dx = \int_0^T D_n(t - x) dx = 1$ per ogni t in \mathbb{R} ;
- 3.

$$D_n(x) = \frac{1}{T} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 x\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 x}{2}\right)} = \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0 x)}{\tan\left(\frac{\omega_0 x}{2}\right)} + \cos(n\omega_0 x) \right] \quad \text{per } x \neq 0$$

$$e D_n(0) = \frac{2n+1}{T}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la (5.2) basta scrivere la definizione di f_n , sostituire ai c_k al loro espressione e scambiare sommatoria con l'integrale. È anche immediato constatare che D_n è T -periodico. Per vedere che $\int_0^T D_n = 1$ basta notare che $\int_0^T \mathbf{e}_k = 0$ se $k \neq 0$ mentre $\int_0^T \mathbf{e}_0 = T$. Essendo D_n T -periodico la seconda proprietà è immediata. Ricaviamo l'espressione di $D_n(x)$ per $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{i\omega_0 k x} &= \sum_{k=-n}^n (e^{i\omega_0 x})^k = e^{-i\omega_0 n x} \sum_{k=0}^{2n} (e^{i\omega_0 x})^k = e^{-i\omega_0 n x} \frac{(e^{i\omega_0 x})^{2n+1} - 1}{e^{i\omega_0 x} - 1} = \\ &= \frac{e^{\frac{i\omega_0 x}{2}} \left(e^{\frac{i\omega_0(n+1/2)x}{2}} - e^{-\frac{i\omega_0(n+1/2)x}{2}} \right)}{e^{\frac{i\omega_0 x}{2}} \left(e^{\frac{i\omega_0 x}{2}} - e^{-\frac{i\omega_0 x}{2}} \right)} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 x\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Ne segue la tesi. □

5.1.5 Teorema. *Se f è una funzione T -periodica e \mathcal{C}^1 allora f_n converge puntualmente a f . Inoltre esiste una costante M tale che $|f_n(t)| \leq M$ per ogni t e ogni n .*

Dimostrazione. Fissiamo t . Se la f è \mathcal{C}^1 allora la funzione $h_t(\tau) := \frac{f(t) - f(\tau)}{\tan(\omega_0(t - \tau))}$ è continua. Dato che $\int_0^T D_n(t - \tau) d\tau = 1$ possiamo scrivere

$$f(t) = \int_0^T f(t) D_n(t - \tau) d\tau = 1$$

e allora

$$\begin{aligned} f(t) - f_n(t) &= \int_0^T (f(t) - f(\tau)) D_n(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^T \frac{f(t) - f(\tau)}{\tan(\omega_0(t - \tau))} \sin(n\omega_0(t - \tau)) d\tau + \int_0^T (f(t) - f(\tau)) \cos(n\omega_0(t - \tau)) d\tau \end{aligned}$$

Per il Lemma di Riemann entrambi i due ultimi integrali tendono a zero per $n \rightarrow \infty$ - è importante qui che nel primo integrale c'è $h_t(\tau)$ che è continua, dunque integrabile. Per trovare la costante M si può prendere $M := \max_{t, \tau \in [0, T]} \{|h_t(\tau)| + |f(t) - f(\tau)|\}$ notando che seni e coseni sono comunque tra -1 e 1 . □

Quindi per avere la convergenza puntuale abbiamo dovuto chiedere f derivabile. Tale ipotesi si potrebbe migliorare, ma non si può arrivare a chiedere la sola continuità: si potrebbe infatti vedere che esiste una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in nessun punto !!! D'altra parte si potrebbe vedere che vale il seguente teorema in cui si rinuncia alla continuità, ma solo in un numero finito di punti.

5.1.6 Teorema. *Supponiamo che $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ siano dei punti in $[0, T]$ tali che f è continua e derivabile in ogni $]t_i, t_{i+1}[$ e $f'(t)$ ammette finiti i limiti da destra e da sinistra in ogni t_i (potendo anche essere discontinua in t_i). Allora per ogni t esistono i limiti da destra e da sinistra di f e vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t^+} f(t) \right).$$

Per trovare la convergenza uniforme bisogna richiedere ulteriore regolarità per f .

5.1.7 Teorema. *Supponiamo che f abbia derivata seconda continua. Allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[0, T]$.*

I teoremi precedenti, per quanto utili e interessanti, non gettano piena luce sulla convergenza delle f_n a f . In realtà, dato che le f_n nascono come le proiezioni in L^2 di f su E_n , dobbiamo insistere nel vedere le cose dal punto di vista di L^2 . La proprietà che viene spontaneo cercare sarà allora la *convergenza di f_n a f in $L^2_{per}(T)$* .

5.1.8 Osservazione. Si ha $T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$; inoltre

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \Leftrightarrow \|f\|_2^2 = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

Dimostrazione. Notiamo che, per la 5.1.1 si ha

$$\|f_n\|_2^2 = \left\| \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \sum_{k,h=-n}^n c_k \overline{c_h} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_h \rangle = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 T$$

Quindi dall'ultima delle 5.1.3 si ricava

$$T \left\| \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2$$

da cui seguono entrambe le tesi. □

Vediamo ora che le f_n “a qualcosa convergono”.

5.1.9 Proposizione. *Sia assegnata una successione $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ di numeri complessi tali che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$. Allora esiste una funzione g di $L^2_{per}(T)$ tale che $g_n := \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{L^2} g$ per $n \rightarrow \infty$. Inoltre:*

$$c_k = \frac{1}{T} \langle g, \mathbf{e}_k \rangle \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}, \quad \|g\|_2^2 = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Dimostrazione. Dimostriamo che (g_n) è una successione di Cauchy in $L^2_{per}(T)$. Siano $n > m$ interi, allora, per l'ortonormalità degli \mathbf{e}_j :

$$\begin{aligned} \|g_n - g_m\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k - \sum_{k=-m}^m c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \\ &= \left\| \sum_{k=-n}^{-m-1} c_k \mathbf{e}_k + \sum_{k=-m-1}^n c_k \mathbf{e}_k \right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{-m-1} |c_k|^2 + \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \end{aligned}$$

Dire che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ significa che $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ e $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_{-n}|^2 < +\infty$ e dunque, fissato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un \bar{n} intero tale che, se $n > m \geq \bar{n}$:

$$\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \sum_{k=-m-1}^{-n} |c_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

e quindi per $n > m \geq \bar{n}$:

$$\|g_n - g_m\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \Leftrightarrow \|g_n - g_m\|_2 < \varepsilon$$

Quindi (g_n) è di Cauchy e per la completezza di $L^2([0, T])$ essa ammette limite g in $L^2_{per}(T)$.

A questo punto abbiamo trovato che $g_n \xrightarrow{L^2} g$. Preso un j intero si ha

$$\langle g_n, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{k=-n}^n c_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j \quad \forall n \geq j$$

da cui al limite $\langle g, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j$. Per l'altra proprietà si ragiona allo stesso modo. \square

5.1.10 Osservazione. D'ora in poi scriveremo $g = \sum_{L^2, n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ per indicare g è somma della

serie in $L^2_{per}(T)$ cioè che $\sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{L^2} g$, per $n \rightarrow +\infty$. In maniera analoga scriveremo

$g = \sum_{unif., n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ per indicare g è somma della serie uniformemente su un qualunque

intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} , cioè che $\sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{unif} g$ (su $[a, b]$), per $n \rightarrow +\infty$.

5.1.11 Teorema (completezza dei polinomi trigonometrici). *Se f è in $L^2_{per}(T)$ allora la successione f_n converge in L^2 a f :*

$$f = \sum_{L^2, k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathbf{e}_k, \quad \text{dove } c_n = \frac{1}{T} \langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau.$$

Inoltre vale l'uguaglianza di Parseval

$$\int_0^T |f(\tau)|^2 d\tau = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Dimostrazione. Per la proposizione 5.1.9 esiste una g tale che $f_n \xrightarrow{L^2} g$ e tale g ha la proprietà $\langle g, \mathbf{e}_k \rangle = T c_k$. Dato che vale anche $\langle f, \mathbf{e}_k \rangle = T c_k$ (per definizione di c_k) si ottiene $\langle f - g, \mathbf{e}_k \rangle = 0$ per qualunque k intero. Ne segue che $f - g$ è ortogonale a tutti gli E_n .

Prendiamo ora una funzione ϕ di classe \mathcal{C}^1 e siano ϕ_n le approssimanti di Fourier di ϕ . Per il teorema 5.1.5 si ha che $\phi_n \rightarrow \phi$ puntualmente e inoltre, per un'opportuna costante C , si ha $|\phi_n(t)| \leq C$ per ogni m e ogni t . Allora $(f - g)\bar{\phi}_n \rightarrow (f - g)\bar{\phi}$ e $|(f - g)\bar{\phi}_n| \leq C|f - g| \in L^1$. Applicando il teorema di Lebesgue si ottiene allora:

$$0 = \langle f - g, \phi_n \rangle = \int_0^T (f(t) - g(t)) \overline{\phi_n(t)} dt \rightarrow \int_0^T (f(t) - g(t)) \overline{\phi(t)} dt$$

Ne segue in particolare

$$\int_0^T (f(t) - g(t)) \overline{\phi(t)} dt = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, T[)$$

che è sufficiente (vedi la 4.3.4) per avere $f = g$ quasi ovunque su $]0, T[$ da cui $f = g$ in $L^2_{per}(T)$ e cioè la tesi. \square

Il teorema sopra dice che l'insieme delle funzioni \mathbf{e}_k con k in \mathbb{Z} è una “base ortogonale” per $L^2_{per}(T)$ che genera ogni elemento di $L^2_{per}(T)$. I numeri c_k si possono quindi pensare come le “componenti” di f rispetto a tale base.

C'è quindi una perfetta corrispondenza tra le funzioni f di L^2 (funzioni di energia finita) e le successioni $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ con $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$.

Vediamo ora la versione in \mathbb{R} dei risultati precedenti. Supponiamo che f sia in $L^2_{per}(T)$ e sia a valori reali. Siano c_k i coefficienti di Fourier di f . Allora

$$c_{-k} = \langle f, \mathbf{e}_{-k} \rangle = \langle f, \overline{\mathbf{e}_k} \rangle = \langle \mathbf{e}_k, \overline{f} \rangle = \langle \mathbf{e}_k, f \rangle = \overline{\langle f, \mathbf{e}_k \rangle} = \overline{c_k}$$

(notiamo che vale anche il viceversa: $c_{-k} = \overline{c_k} \Rightarrow f$ reale). Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n &= c_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \mathbf{e}_n + c_{-n} \mathbf{e}_{-n}) = c_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \mathbf{e}_n + \overline{c_n} \overline{\mathbf{e}_n}) = \\ c_0 \mathbf{e}_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(c_n \mathbf{e}_n) &= c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(c_n) \cos(\omega_0 n t) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Im(c_n) \sin(\omega_0 n t) = \\ a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\omega_0 n t) \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{e per } k \geq 1: \\ a_k &= 2 \Re(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_0 k t) dt \\ b_k &= -2 \Im(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_0 k t) dt \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si possono allora ritrovare gli stessi risultati di convergenza trovati nel caso complesso.

5.1.12 Proposizione. *Sia f una funzione in $L^2_{per}(T)$ con f a valori reali e siano $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$ definiti in (5.3). Poniamo*

$$f_n(t) := \sum_{k=0}^n a_k \cos(\omega_0 k t) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\omega_0 k t). \quad (5.4)$$

Allora f_n converge a f in $L^2_{per}(T)$ (in energia) e si ha

$$\|f\|_2^2 = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2. \quad (5.5)$$

Viceversa supponiamo che $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$ siano due successioni di numeri reali tali che

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < +\infty.$$

Allora, definendo f_n come in (5.4), esiste una funzione f in $L^2_{per}(T)$ tale che $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Inoltre sviluppando tale f in serie di Fourier si ha che i coefficienti dati da (5.3) coincidono con gli $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$ di partenza e vale (5.5).

5.1.13 Osservazione. Scriveremo di nuovo $f \stackrel{L^2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$ per indicare che le due serie scritte a destra convergono in L^2 e che f è la loro somma e ammetteremo anche la scrittura $f \stackrel{unif.}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$ per indicare che la convergenza di entrambe le serie è uniforme su ogni intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} .

5.1.14 Osservazione. Un altro modo di vedere le cose nel caso di f a valori reali, è il seguente. Sia $k \neq 0$ e scriviamo $c_k = \rho_k e^{i\theta_k}$. Per le (5.3) si ha $a_k = 2\rho_k \cos(\theta_k)$ e $b_k = -2\rho_k \sin(\theta_k)$ e dunque

$$a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt) = 2\rho_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k).$$

In sostanza il modulo del coefficiente c_k è legato all'ampiezza della componente (sinusoidale) $a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt)$ mentre l'argomento di c_k è legato alla fase di tale componente.

5.1.15 Osservazione. Dato che le funzioni che consideriamo sono T -periodiche è facile vedere che i coefficienti di Fourier di f si possono ottenere come

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega_0 nt} dt$$

qualunque sia t_0 in \mathbb{R} (e lo stesso discorso vale per gli a_n/b_n).

5.1.16 Proposizione. Sia f in $L^2_{per}(T)$. Allora

1. f è reale se e solo se $c_{-k} = \overline{c_k}$ per ogni k ;
2. f è pari se e solo se $c_{-k} = c_k$ per ogni k ;
3. f è dispari se e solo se $c_{-k} = -c_k$ per ogni k ;
4. f è reale pari se e solo se $c_{-k} = c_k \in \mathbb{R}$ per ogni k ; questo è equivalente a dire che $b_k = 0$ per ogni k ;
5. f è reale dispari se e solo se $c_{-k} = -c_k \in i\mathbb{R}$ per ogni k (cioè i c_k sono immaginari puri); questo è equivalente a dire che $a_k = 0$ per ogni k ;

Dimostrazione. La prima proprietà è già stata vista prima. Dimostriamo la seconda supponendo f pari. Usando il cambio di variabile $s = -t$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_0 kt} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(-t) e^{-i\omega_0 kt} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s) e^{i\omega_0 ks} ds$$

da cui $c_k = c_{-k}$. In modo analogo si ragiona se f è dispari. Le altre proprietà seguono combinando quelle trovate e utilizzando l'espressione degli a_k, b_k . \square

5.1.17 Definizione. Se f è una funzione e $t_0 \in \mathbb{R}$ indichiamo con f_{t_0} la funzione translata di t_0 $f_{t_0}(t) := f(t - t_0)$.

5.1.18 Proposizione. Siano f in $L^2_{per}(T)$ e t_0 in $[0, T]$, e chiamiamo c_k^* i coefficienti di Fourier di f_{t_0} . Allora $c_k^* = e^{-i\omega_0 t_0 k} c_k$.

Dimostrazione. Con un semplice cambio di variabile nell'integrale

$$c_k^* = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - t_0) e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} f(\tau) e^{-i\omega_0 k (\tau + t_0)} d\tau =$$

$$\frac{e^{-i\omega_0 k t_0}}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega_0 k \tau} d\tau = e^{-i\omega_0 t_0 k} c_k.$$

□

5.1.19 Proposizione. Sia $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

e sia f in $L^2_{per}(T)$ la somma della serie di Fourier associata ai c_n : $f \stackrel{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$.

- Se si ha $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$, allora f è continua, T -periodica e $f \stackrel{unif.}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$.
- Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n| < +\infty$, allora f è \mathcal{C}^1 , f ed f' sono T -periodiche, $f \stackrel{unif.}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ e $f' \stackrel{unif.}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}'_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n i\omega_0 n \mathbf{e}_n$.
- In generale, dato un intero h , se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$, allora f è di classe \mathcal{C}^h , $f^{(j)}$ è T -periodica per $j = 0, \dots, h$ e $f^{(j)} \stackrel{unif.}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (i\omega_0 n)^j \mathbf{e}_n$ per $j = 0, \dots, h$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$. Allora, dato che le funzioni \mathbf{e}_n hanno modulo costantemente eguale a 1, si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n \mathbf{e}_n\|_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty.$$

(la norma uniforme essendo fatta su un qualunque intervallo $[a, b]$) e quindi la tesi segue dal teorema (2.4.2).

Supponiamo ora che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n| < +\infty$; notiamo che $\mathbf{e}'_n = i\omega_0 n \mathbf{e}_n$ e allora:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n \mathbf{e}'_n\|_{\infty} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n| < +\infty.$$

e quindi la tesi segue dal corollario (2.4.4) (seconda affermazione). Il caso generale si fa in modo analogo. □

5.1.20 Proposizione. Sia f una funzione in $L^2_{per}(T)$ e siano $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i suoi coefficienti di Fourier. Allora se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n|^2 < +\infty$ la funzione f è derivabile nel senso di L^2 e la sua derivata generalizzata è

$$f' \stackrel{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\omega_0 n c_n \mathbf{e}_n$$

che esiste in L^2 per l'ipotesi fatta. Inoltre la funzione f è continua, T -periodica e

$$f \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

Dimostrazione. Se $f_n := \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k$ allora $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Inoltre f_n è di classe C^1 e $f'_n =$

$\sum_{k=-n}^n i\omega_0 k c_k \mathbf{e}_k$ che costituiscono le somme parziali della serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\omega_0 n c_n \mathbf{e}_n$. Questa serie è convergente in L^2 perché, per ipotesi, i suoi coefficienti sono a quadrato sommabile. Dunque per definizione di derivata nel senso di L^2 questa serie è la derivata in L^2 di f . Per le proprietà delle funzioni con derivata in L^2 f è continua. Inoltre, dato che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n|c_n|}{n} \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(n^2 |c_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right) < +\infty$$

(abbiamo usato la disuguaglianza $ab \leq (a^2 + b^2)/2$) si deduce che

$$f \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

e quindi f è T -periodica. □

Concludiamo con un risultato che permette di trovare la somma di una serie di Fourier, utilizzando i metodi di analisi complessa visti in precedenza.

5.1.21 Proposizione. *Siano P e Q due polinomi con $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 1$. Indichiamo con z_1, \dots, z_h le radici di Q . Allora se*

$$f \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \frac{P(n)}{Q(n)} \mathbf{e}_n$$

si ha

$$f(t) = -2\pi i \sum_{j=1}^h \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, z_j \right) \quad \text{per } 0 < t < T \quad (5.6)$$

(in effetti poter prendere o meno $t = 0$ o $t = T$ non ha nessuna importanza poiché f è definita a meno di un quasi ovunque). Notiamo anche che la f è ben definita in quanto, a causa dell'ipotesi sui gradi,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \left| \frac{P(n)}{Q(n)} \right|^2 < +\infty$$

Se poi $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 2$ è chiaro che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, Q(n) \neq 0} \left| \frac{P(n)}{Q(n)} \right| < +\infty$$

e dunque f deve risultare continua e deve aversi $f(0^+) = f(T^-)$, in modo che f estesa per periodicità risulti continua.

Dimostrazione. Per quanto visto, posto

$$f_n(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n, Q(k) \neq 0} \frac{P(k)}{Q(k)} e^{ik\omega_0 t}$$

si ha $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Peraltro da 3.7.23 (usando $a = \omega_0 t \in]0, 2\pi[$), si ricava

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = -2\pi i \sum_{j=1}^h \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, z_j \right) \quad \forall t \in]0, T[.$$

Dato che la convergenza puntuale quasi ovunque individua il limite L^2 , ne segue la tesi. \square

5.2 Alcuni esempi

5.2.1 Esempio (onda quadra). Sia

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

ed eventualmente estesa per periodicit  (con periodo T) a tutto \mathbb{R} . Calcoliamo lo sviluppo in serie di Fourier di f . Applicando le formule si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt = 0;$$

e per $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 k t} dt - \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_0^{T/2} - \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{T/2}^T = \\ &= \frac{i}{2\pi k} (e^{-ik\pi} - 1) - \frac{i}{2\pi k} (1 - e^{-ik\pi}) = \frac{i}{\pi k} ((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_k = 0, \quad b_k = 2 \frac{1 - (-1)^k}{\pi k}$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\pi k} \sin(\omega_0 k t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t)$$

Nelle figure 5.1, 5.2, 5.3 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini n . Si noti come l'approssimazione (che come abbiamo visto   in energia) diventi *cattiva* vicino ai punti di salto anche per n grande.

5.2.2 Esempio (dente di sega). Sia

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ t - T & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

estesa per periodicità (con periodo T) a tutto \mathbb{R} . Per calcolare i coefficienti di Fourier possiamo usare l'intervallo $[-T/2, T/2]$ invece di $[0, T]$, notando che $f(t) = t$ in tale intervallo. Si ha allora:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t dt = 0;$$

e per $k \neq 0$ (integrando per parti):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{t e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 k t} dt = \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{\frac{T}{2} e^{-i\omega_0 k \frac{T}{2}} + \frac{T}{2} e^{i\omega_0 k \frac{T}{2}}}{k} + 0 = \frac{iT}{4\pi k} (e^{-\pi k i} + e^{\pi k i}) = (-1)^k \frac{iT}{2\pi k} = (-1)^k \frac{i}{\omega_0 k}. \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_k = 0, \quad b_k = -(-1)^k \frac{T}{\pi k} = -(-1)^k \frac{2}{\omega_0 k}.$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} -\frac{T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\omega_0 t).$$

Nelle figure 5.4, 5.5, 5.6 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini n . Anche in questo caso l'approssimazione non è molto buona vicino al punto di salto.

5.2.3 Esempio (onda triangolare). Sia $f(t) := |t| - \frac{T}{4}$ se $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$, estesa per periodicità (con periodo T) a tutto \mathbb{R} . Si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(t - \frac{T}{4} \right) dt = \frac{2}{T} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{Tt}{4} \right]_0^{\frac{T}{2}} = 0;$$

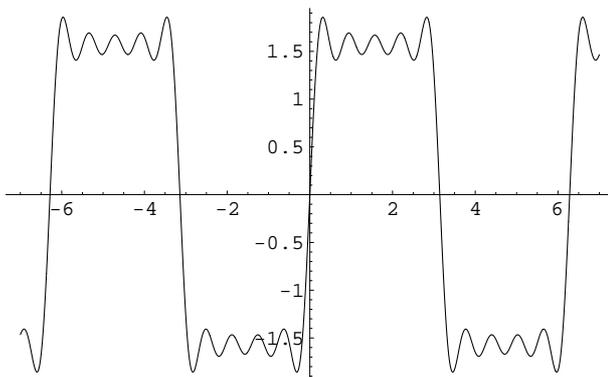


Figura 5.1: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine $n = 10$

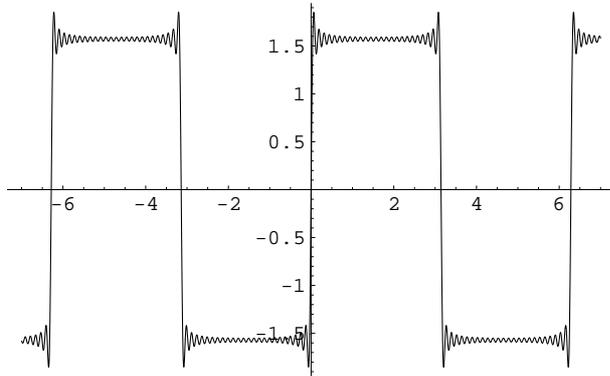


Figura 5.2: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine $n = 50$

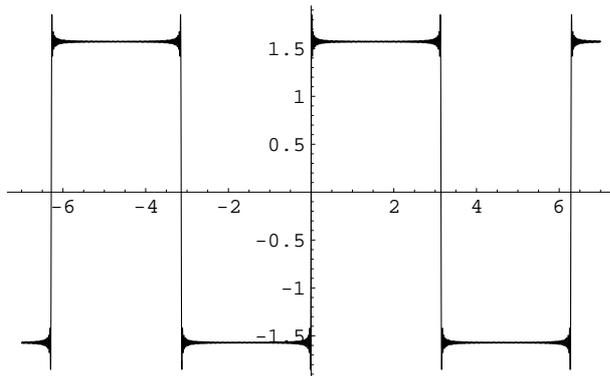


Figura 5.3: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine $n = 200$

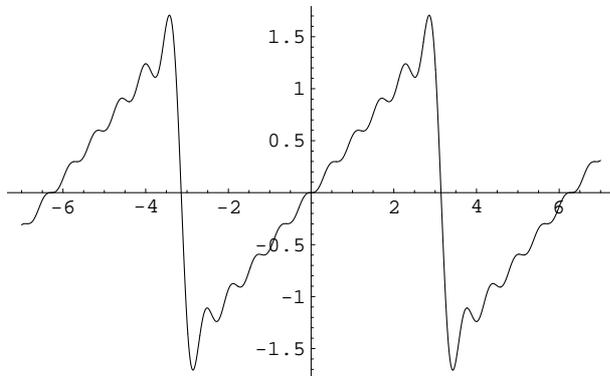


Figura 5.4: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine $n = 10$

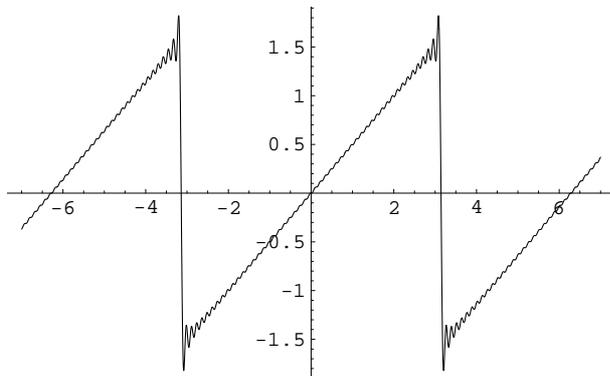


Figura 5.5: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine $n = 50$

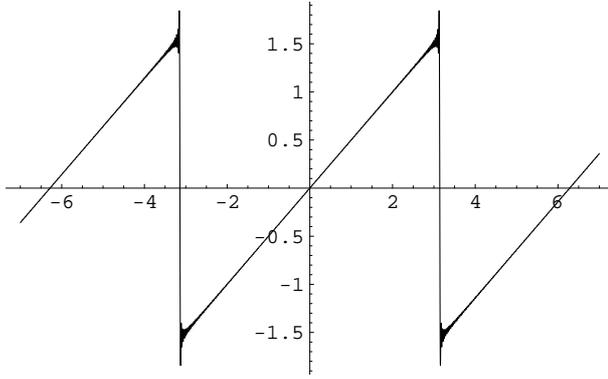


Figura 5.6: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine $n = 200$

e per $k \neq 0$ (si usa l'integrazione per parti):

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(|t| - \frac{T}{4} \right) e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{\left(|t| - \frac{T}{4} \right) e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-T/2}^{T/2} + \\
 &\quad - \frac{1}{T} \frac{1}{-i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) e^{-i\omega_0 k t} dt - \frac{1}{T} \frac{1}{-i\omega_0 k} \int_0^{\frac{T}{2}} (+1) e^{-i\omega_0 k t} dt = 0 + \\
 &\quad \frac{i}{2\pi k} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{-i\omega_0 k t} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 k t} dt \right\} = \frac{i}{2\pi k} \left\{ \left[\frac{e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \left[\frac{e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right\} = \\
 &\quad \frac{1}{2\pi\omega_0 k^2} (-1 + e^{ik\pi} + e^{-ik\pi} - 1) = \frac{1}{\pi\omega_0 k^2} ((-1)^k - 1) = \frac{T}{2\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1)
 \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_k = 0, \quad \text{e per } k > 0 \quad a_k = \frac{T}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1), \quad b_k = 0$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} \frac{T}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(k\omega_0 t) = -\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t).$$

Dato però che la serie dei moduli dei coefficienti $\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ è convergente si può dire che

$$f(t) \underset{unif.}{=} -\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t)$$

e in particolare la serie sopra converge a $f(t)$ in ogni t . Nelle figure 5.7, 5.8, 5.9 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini n . Stavolta l'approssimazione è nettamente migliore (per ordini n anche più bassi dei precedenti). A cercare il pelo nell'uovo c'è qualche problema nell'approssimare gli spigoli, che sono sempre un po' tondi nelle approssimanti. Si può anche notare che la serie delle derivate è

$$-\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} [-(2k+1)\omega_0 \sin((2k+1)\omega_0 t)] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t),$$

che è la serie di Fourier dell'onda quadra esaminata nel primo esempio. Dunque l'onda quadra è la derivata in senso di L^2 dell'onda triangolare. Osserviamo che quest'ultima non è \mathcal{C}^1 dato che non è derivabile in zero.

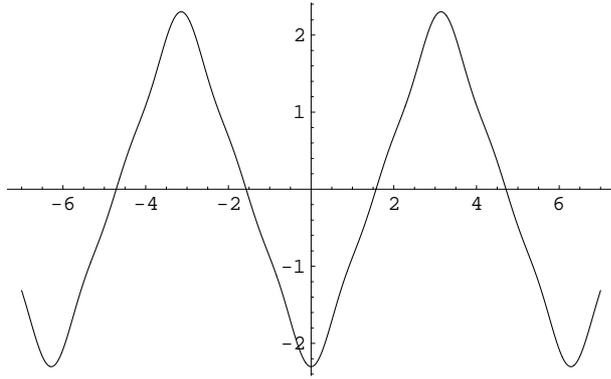


Figura 5.7: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine $n = 5$

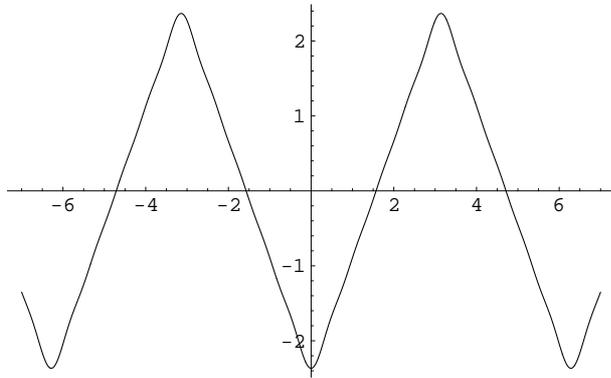


Figura 5.8: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine $n = 10$

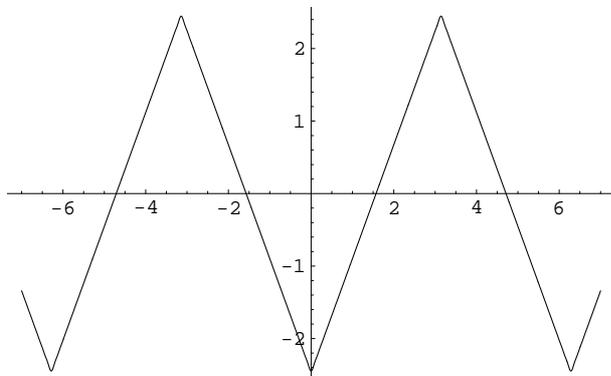


Figura 5.9: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine $n = 50$

5.2.4 Esempio. Sia $f(t) = t^2$ per $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ (estesa per periodicità su tutto \mathbb{R}). Si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 dt = \frac{1}{T} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T^2}{12};$$

e per $k \neq 0$ (integrando due volte per parti):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{t^2 e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2t e^{-i\omega_0 k t} dt = \\ &= 0 + \frac{1}{T} \left[\frac{2t e^{-i\omega_0 k t}}{\omega_0^2 k^2} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2e^{-i\omega_0 k t}}{\omega_0^2 k^2} dt = \frac{1}{T\omega_0^2 k^2} \left(2\frac{T}{2} e^{-ik\pi} + 2\frac{T}{2} e^{ik\pi} \right) + 0 = \\ &= \frac{2}{\omega_0^2 k^2} (-1)^k = \frac{T^2}{2\pi^2 k^2} (-1)^k. \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_0 = \frac{T^2}{12}, \quad \text{e per } k > 0 \quad a_k = \frac{T^2}{\pi^2} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad b_k = 0$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\omega_0 t)$$

Dato che $\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$ si deduce

$$f(t) \underset{unif.}{=} \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\omega_0 t)$$

(e in particolare la serie converge puntualmente a f). Se $T = 2\pi$ si ha allora:

$$t^2 \underset{unif.}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt) \quad \text{su } [-\pi, \pi]$$

Calcolando il tutto in $t = 0$ e rispettivamente in $t = \pi$ si ritrovano le formule:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Riportiamo anche per questo esempio (vedi figure 5.10, 5.11, 5.12) i grafici di alcuni polinomi di Fourier approssimanti - la situazione è simile a quella dell'onda triangolare. In effetti la funzione f che stiamo esaminando non è \mathcal{C}^1 (anche se la formula $f(t) = t^2$ potrebbe suggerire che lo sia). Per capirlo dobbiamo ricordare che la f è definita su tutto \mathbb{R} e vale t^2 solo in $[-T/2, T/2]$, mentre fuori da questo intervallo è estesa in modo da risultare periodica di periodo T (come è chiaro dai grafici delle approssimanti). Vista così è chiaro che f non è derivabile nei punti $\pm T/2$. In effetti se calcoliamo la serie delle derivate troviamo

$$\frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} [-k\omega_0 \sin(k\omega_0 t)] = -\frac{2T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\omega_0 t).$$

I coefficienti di quest'ultima serie sono solo a quadrato sommabile (mentre non sono sommabili) e quindi la derivata c'è solo nel senso di L^2 .

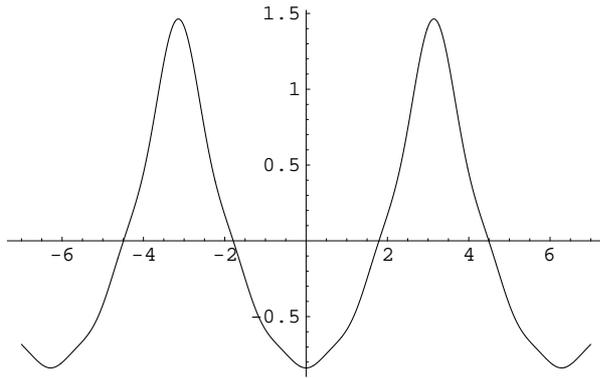


Figura 5.10: $f(t) = t^2 - \pi^2/3$: polinomio di Fourier di ordine $n = 5$

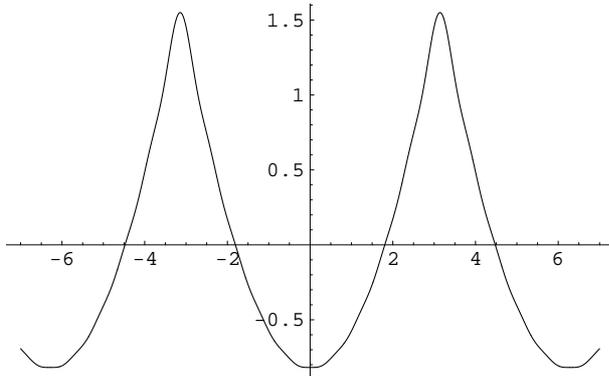


Figura 5.11: $f(t) = t^2 - \pi^2/3$: polinomio di Fourier di ordine $n = 10$

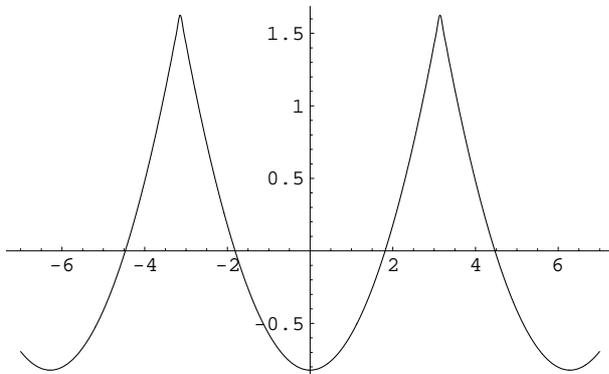


Figura 5.12: $f(t) = t^2 - \pi^2/3$: polinomio di Fourier di ordine $n = 50$

Concludiamo il paragrafo osservando che, negli esempi 3.7.24, 3.7.25 e 3.7.26 si sono in pratica trovato che

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + 1} e^{i\omega_0 n t} && \Rightarrow f(t) = \pi \frac{\cosh(\omega_0 t - \pi)}{\sinh(\pi)} \quad \text{in } [0, T], \\ f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{n^2} e^{i\omega_0 n t} && \Rightarrow f(t) = \frac{\omega_0^2 t^2}{2} - \pi \omega_0 t + \frac{\pi^2}{3} \quad \text{in } [0, T], \\ f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{n} e^{i\omega_0 n t} && \Rightarrow f(t) = i(\pi - \omega_0 t) \quad \text{in } [0, T]. \end{aligned}$$

(usando $a = \omega_0 t$ e la proposizione 5.1.21). Il primo degli esempi sopra si può generalizzare cercando l'espressione di

$$f(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\omega_0 n t}}{n^2 + b^2}$$

per $b > 0$. Ragionando come nel caso $b = 1$ si ha (per $0 \leq t \leq T$):

$$\begin{aligned} f(t) &= -2\pi i \left(\text{Res} \left(\frac{1}{z^2 + b^2} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, bi \right) + \text{Res} \left(\frac{1}{z^2 + b^2} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, -bi \right) \right) = \\ &= -2\pi i \left(\left[\frac{1}{2z} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1} \right]_{z=bi} + \left[\frac{1}{2z} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1} \right]_{z=-bi} \right) = -\frac{\pi}{b} \left(\frac{e^{-b\omega_0 t}}{e^{-2b\pi} - 1} - \frac{e^{b\omega_0 t}}{e^{2b\pi} - 1} \right) = \\ &= \frac{\pi}{b} \left(\frac{e^{b\omega_0 t}}{e^{2b\pi} - 1} + \frac{e^{-b\omega_0 t}}{1 - e^{-2b\pi}} \right) = \frac{\pi}{b} \left(\frac{e^{b(\omega_0 t - \pi)}}{e^{b\pi} - e^{-b\pi}} + \frac{e^{-b(\omega_0 t - \pi)}}{e^{b\pi} - e^{-b\pi}} \right) = \boxed{\frac{\pi \cosh(b(\omega_0 t - \pi))}{b \sinh(b\pi)}}. \end{aligned}$$

Possiamo anche passare alla derivata e trovare

$$f'(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i\omega_0 n e^{i\omega_0 n t}}{n^2 + b^2}.$$

da cui

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n}{n^2 + b^2} e^{i\omega_0 n t} = \frac{1}{i\omega_0} \frac{\pi b \omega_0 \sinh(b(\omega_0 t - \pi))}{\sinh(b\pi)} = \boxed{-i\pi \frac{\sinh(b(\omega_0 t - \pi))}{\sinh(b\pi)}}.$$

Un altro caso trattabile in questo modo è il calcolo di

$$f(t) \underset{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_0 n t}}{n - b}, \quad \text{per } b \notin \mathbb{Z}.$$

Usando sempre la stessa formula, per $0 < t < T$, su ha:

$$\begin{aligned} f(t) &= -2\pi i \text{Res} \left(\frac{1}{z - b} \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1}, b \right) = -2\pi i \left. \frac{e^{i\omega_0 t z}}{e^{2\pi i z} - 1} \right|_{z=b} = -2\pi i \frac{e^{i\omega_0 b t}}{e^{2\pi b i} - 1} = \\ &= -2\pi i \frac{e^{i\omega_0 b t - \pi b i}}{e^{\pi b i} - e^{-\pi b i}} = \boxed{-\pi \frac{e^{ib(\omega_0 t - \pi)}}{\sin(\pi b)}}. \end{aligned}$$

5.3 Serie di Fourier con soli seni o soli coseni. Funzioni nulle agli estremi

In questo paragrafo fissiamo $T > 0$ e poniamo $\tilde{\omega} := \frac{\pi}{T}$ (cioè la metà della frequenza angolare considerata nel paragrafo precedente).

Dato k intero positivo indicheremo anche con $\mathbf{s}_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni $\mathbf{s}_k(t) := \sin(\tilde{\omega}kt)$; notiamo che le funzioni \mathbf{s}_k sono nulle in zero e in T , qualunque sia k .

5.3.1 Teorema. *Sia f una funzione in $L^2([0, T])$ a valori reali. Poniamo, per $k \geq 1$*

$$u_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \mathbf{s}_k(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\tilde{\omega}t) dt \quad (5.7)$$

Allora

$$f = \sum_{L_2, n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$$

(cioè, come al solito, $\sum_{k=1}^n u_k \mathbf{s}_k \xrightarrow{L^2} f$ per $n \rightarrow \infty$). Inoltre

$$\frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^T f(t)^2 dt$$

Viceversa supponiamo che $(u_n)_{n \geq 1}$ sia una successione di numeri reali tali che $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$. Allora esiste un'unica f in $L^2([0, T])$ tale che $f = \sum_{L_2, n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$ e vale la relazione (5.7).

Dimostrazione. Estendiamo f a $[-T, T]$ in modo che sia dispari, ponendo

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \in [0, T] \\ -f(-t) & \text{se } t \in [-T, 0] \end{cases}$$

Per i risultati del paragrafo precedente

$$\tilde{f}(t) = \sum_{L_2, k=0}^n a_k \cos(\tilde{\omega}kt) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\tilde{\omega}kt)$$

ma essendo \tilde{f} dispari tutti gli a_k sono eguali a zero, mentre

$$b_k = \frac{2}{2T} \int_{-T}^T \tilde{f}(t) \sin(\tilde{\omega}kt) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \tilde{f}(t) \sin(\tilde{\omega}kt) dt = u_k$$

Allora, per quanto detto nel paragrafo precedente, $\tilde{f} = \sum_{L_2, k=1}^n u_n \mathbf{s}_n$ in $[-T, T]$. In particolare, restringendo tutto a $[0, T]$ si ha che $f = \sum_{L_2, k=1}^n u_n \mathbf{s}_n$ in $[0, T]$. Inoltre

$$T \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \frac{2T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \int_{-T}^T \tilde{f}^2(t) dt = 2 \int_0^T f^2(t) dt$$

da cui la formula con l'energia per gli u_k . Per il viceversa basta applicare il viceversa di 5.1.12 sull'intervallo $[-T, T]$ e restringersi a $[0, T]$. \square

Nello stesso modo si può sviluppare rispetto ai coseni. Per $t \in [0, T]$ indichiamo con $\mathbf{c}_k(t) := \cos(\tilde{\omega}kt)$ (notiamo che $\mathbf{c}'_k(0) = \mathbf{c}'_k(T) = 0$); allora vale anche il teorema seguente.

5.3.2 Teorema. *Sia f una funzione in $L^2([0, T])$ a valori reali. Poniamo, per k intero*

$$v_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\tilde{\omega}t) dt \quad \text{se } k \neq 0, \quad v_0 := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (5.8)$$

Allora

$$f \underset{L_2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n.$$

Inoltre

$$\frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 + T v_0^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^T f(t)^2 dt$$

Viceversa supponiamo che $(v_n)_{n \geq 1}$ sia una successione in \mathbb{R} con $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$. Allora

esiste una funzione in $L^2([0, T])$ tale che $f \underset{L_2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$ e vale la relazione (5.8).

Dimostrazione. Basta prolungare f a \tilde{f} definita su $[-T, T]$ in modo che \tilde{f} sia pari e imitare la dimostrazione precedente. \square

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente si hanno delle proprietà di regolarità della funzione f a seconda della sommabilità degli u_n . Non diamo la dimostrazione dei seguenti risultati che è simile a quelle fatte nel paragrafo precedente.

5.3.3 Proposizione. *Sia $(u_n)_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali tale che $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$*

e sia $f \underset{L_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$.

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$, allora f è continua, $f \underset{unif.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$ e $f(0) = f(T) = 0$.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| < +\infty$, allora f è \mathcal{C}^1 , $f \underset{unif.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$, $f(0) = f(T) = 0$ e $f' \underset{unif.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}'_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega}u_n \mathbf{c}_n$.
- In generale, dato un intero h , se $\sum_{n=1}^{\infty} n^h |u_n| < +\infty$, allora f è derivabile h volte e tutte le derivate di ordine minore o eguale ad h sono continue. Di tali derivate quelle ordine pari (compresa la funzione) sono nulle agli estremi dell'intervallo. Infine $f_n^{(j)} \underset{unif.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n^{(h)}$ (che è una serie di seni o di coseni a seconda che h sia pari o dispari..

5.3.4 Proposizione. *Sia $(v_n)_{n \geq 0}$ una successione di numeri reali tale che $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 < +\infty$*

e sia $f \underset{L_2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$.

- Se $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| < +\infty$, allora f è continua e $f \underset{unif.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$.

- Se $\sum_{n=0}^{\infty} n|v_n| < +\infty$, allora f è \mathcal{C}^1 , $f \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$, $f' \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}'_n = - \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega} v_n \mathbf{s}_n$ e $f'(0) = f'(T) = 0$.
- In generale, dato un intero h , se $\sum_{n=1}^{\infty} n^h |v_n| < +\infty$, allora f è derivabile h volte, tutte le derivate di ordine minore o eguale a h sono continue. Di tali derivate quelle di ordine dispari sono nulle agli estremi dell'intervallo. Infine $f_n^{(j)} \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n^{(h)}$ (che è una serie di coseni o di seni a seconda che h sia pari o dispari).

Le proposizioni seguente sono analoghe alla (5.1.20)

5.3.5 Proposizione. Sia f una funzione in $L^2([0, T])$ e siano $(u_n)_{n \geq 1}$ i coefficienti definiti come sopra. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$ allora f ha derivata in L^2 e $f' \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}'_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega} u_n \mathbf{c}_n$.

Inoltre f è continua, $f \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$ e $f(0) = f(T) = 0$.

Più in generale se h è un intero positivo tale che $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^h u_n)^2 < +\infty$ allora f ha derivata di ordine h nel senso L^2 e $f^{(h)} \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n^{(h)}$ (che è una serie di seni o di coseni a seconda se h è pari o dispari).

Inoltre $f^{(j)} \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n^{(j)}$ per $j = 0, \dots, h-1$ e $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(T) = 0$ se $j = 0, \dots, h-1$, j è pari.

5.3.6 Proposizione. Sia f una funzione in $L^2([0, T])$ e siano $(v_n)_{n \geq 0}$ i coefficienti definiti come sopra. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 v_n^2 < +\infty$ allora f ha derivata in L^2 e $f' \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}'_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega} v_n \mathbf{s}_n$.

Inoltre f è continua e $f \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$.

Più in generale se h è un intero positivo tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^h v_n)^2 < +\infty$ allora f ha derivata di ordine h nel senso L^2 e $f^{(h)} \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n^{(h)}$ (che è una serie di coseni o di seni a seconda se h è pari o dispari).

Inoltre $f^{(j)} \underset{\text{unif.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n^{(j)}$ per $j = 0, \dots, h-1$ e $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(T) = 0$ se $j = 0, \dots, h-1$, j è dispari. Quindi nel caso $j = 2$ la derivata prima è continua e nulla agli estremi.

5.4 Esempi di applicazioni a problemi differenziali ai limiti

Sia $T > 0$ e poniamo $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$. Consideriamo il seguente problema differenziale, dove a , b e c sono numeri complessi con $a \neq 0$.

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f & \text{in } [0, T], \\ y(0) = y(T), y'(0) = y'(T). \end{cases} \quad (P_f)$$

dove $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione assegnata e l'incognita è la funzione y . Mostriamo ora come, utilizzando le nozioni fin qui introdotte, si possa risolvere il problema sopra, in

un *sensu generalizzato*, per dei dati f molto generali. Si può poi indagare se, mettendo delle ipotesi più speciali su f , la soluzione y risolve il problema nel senso usuale.

5.4.1 Definizione. Sia $T > 0$ e sia f in $L^2([0, T])$. Diciamo che y è una soluzione del problema (P_f) nel senso dell'energia, se y è in $L^2([0, T])$, y ha derivate prima e seconda nel senso di L^2 , y , y' e y'' verificano la relazione scritta nella prima riga di (P_f) e vale la condizione al bordo espressa nella seconda riga di (P_f) . Notiamo che la condizione al bordo **ha senso** in quanto se y è derivabile due volte nel senso di L^2 essa e la sua derivata devono essere continue e dunque se ne possono prendere i valori in 0 e T . Quindi, se y è una soluzione nel senso dell'energia, essa **può non essere derivabile due volte** in senso usuale ma è **sicuramente di classe C^1** .

Per quanto segue conviene introdurre il *polinomio caratteristico* associato all'equazione differenziale scritta sopra: $P(z) := az^2 + bz + c$

5.4.2 Proposizione. *Supponiamo che non ci sia nessun intero relativo k tale che $P(i\omega_0 k) = 0$. Allora si hanno i fatti seguenti.*

1. Il problema (P_f) ha soluzione per ogni f in $L^2([0, T])$.

2. Se $f = \sum_{L_2, n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ allora la soluzione y è data da

$$y \underset{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \mathbf{e}_n$$

e quindi la soluzione è unica.

3. Se $f = \sum_{L_2, n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$ con $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$, allora y ha derivata seconda continua (cioè la soluzione è C^2) e periodica e verifica l'equazione in (P_f) nel senso usuale. Più in generale se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$ per $h \geq 0$, allora $y \in C^{h+2}$.

5.4.3 Proposizione. *Supponiamo che ci sia un solo intero relativo k_0 per cui $P(i\omega_0 k_0) = 0$*

0. Sia f in $L^2([0, T])$ e supponiamo che $f = \sum_{L_2, n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$. Allora si hanno i fatti seguenti.

1. Il problema (P_f) ha soluzione se e solo se $c_{k_0} = 0$.

2. Se $c_{k_0} = 0$ allora le soluzioni y hanno la forma

$$y \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k_0} \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \mathbf{e}_n + c \mathbf{e}_{k_0}$$

per un arbitrario numero c (dunque non c'è unicità).

3. Se $c_{k_0} = 0$ e se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$, allora ogni soluzione y è C^2 e verifica l'equazione in (P_f) nel senso usuale. Più in generale se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$ per $h \geq 0$, allora $y \in C^{h+2}$.

Notiamo che, se definiamo $\mathbb{X}_{k_0} := \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n : c_{k_0} = 0 \right\}$, allora possiamo dire che per ogni f in \mathbb{X}_{k_0} esiste unica una soluzione y in \mathbb{X}_{k_0} .

Dimostrazione delle due proposizioni. Supponiamo che ci sia una soluzione y ed estendiamo tale y a tutto \mathbb{R} in modo che sia periodica di periodo T . Non è difficile vedere (ma lo omettiamo) che a causa della condizione al bordo la y così estesa è ancora derivabile due volte in senso di $L^2_{per}(T)$. Allora possiamo scrivere

$$y \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n \mathbf{e}_n \quad \text{dove } \gamma_n = \frac{1}{T} \langle y, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Dato che esiste la derivata seconda nel senso di $L^2_{per}(T)$ si ha:

$$y' \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} i\omega_0 n \gamma_n \mathbf{e}_n, \quad y'' \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\omega_0^2 n^2 \gamma_n \mathbf{e}_n \quad \text{e} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^2 \gamma_n|^2 < +\infty$$

Dato che vale l'equazione, cioè che $ay'' + by' + cy$ ed f sono la stessa funzione in $L^2_{per}(T)$, allora hanno gli stessi coefficienti di Fourier, quindi per ogni n intero relativo:

$$c_n = -\omega^2 n^2 a \gamma_n + i\omega_0 n b \gamma_n + c \gamma_n = P(i\omega_0 n) \gamma_n. \quad (5.9)$$

Se tutti i numeri $P(i\omega_0 n)$ sono diversi da zero, allora γ_n è individuato univocamente da

$$\gamma_n = \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \quad (5.10)$$

Se invece c'è un k_0 per cui $P(i\omega_0 k_0) = 0$ allora per la (5.9) si deduce che $c_{k_0} = 0$ (e quindi questa condizione è necessaria per la risolubilità). Se $c_{k_0} = 0$ allora qualunque γ verifica la relazione (5.9) con $n = k_0$, mentre per $n \neq k_0$ γ_n è univocamente determinato da (5.10). Viceversa supponiamo che f verifichi (l'eventuale) condizione di compatibilità, che i coefficienti γ_n siano dati da (5.10) (con eventualmente γ_{k_0} indeterminato, se $P(i\omega_0 k_0) = 0$).

Allora è chiaro che si può trovare una costante K tale che $\left| \frac{n^2}{P(i\omega_0 n)} \right| \leq K$ e dunque:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k_0} |n^2 \gamma_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k_0} \left| \frac{n^2 c_n}{P(i\omega_0 n)} \right|^2 \leq K^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k_0} |c_n|^2 < +\infty$$

Questo significa che $y \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n \mathbf{e}_n$ è ben definita in $L^2_{per}(T)$ e che ha derivata seconda in $L^2_{per}(T)$. Dato che i suoi coefficienti verificano (5.9), allora y risolve l'equazione e dato che per la 5.1.19 y e y' sono continue e T -periodiche è anche verificata la condizione al bordo.

Per quanto riguarda l'ultimo punto della tesi basta notare che, se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$

allora $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{h+2} \left| \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \right| < +\infty$ e applicare la 5.1.19. \square

Nello stesso modo si tratta l'ultimo caso rimasto.

5.4.4 Proposizione. *Supponiamo che ci siano due interi relativi k_1 e k_2 per cui $P(i\omega_0 k_1) = P(i\omega_0 k_2) = 0$. Sia f in $L^2([0, T])$ e supponiamo che $f \underset{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$. Allora si hanno i fatti seguenti.*

1. Il problema (P_f) ha soluzione se e solo se $c_{k_1} = c_{k_2} = 0$.
2. Se $c_{k_1} = c_{k_2} = 0$ allora le soluzioni y hanno la forma

$$y \underset{L_2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k_1, n \neq k_2} \frac{c_n}{P(i\omega_0 n)} \mathbf{e}_n + c \mathbf{e}_{k_1} + d \mathbf{e}_{k_2}$$

per arbitrari c e d .

3. Se $c_{k_1} = c_{k_2} = 0$ e se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$, allora ogni soluzione y è \mathcal{C}^2 e verifica l'equazione in (P_f) nel senso usuale. Più in generale se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$ per $h \geq 0$, allora $y \in \mathcal{C}^{h+2}$.

Anche in questo caso, se definiamo $\mathbb{X} := \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n : c_{k_1} = c_{k_2} = 0 \right\}$, possiamo dire che per ogni f in \mathbb{X} esiste unica una soluzione y in \mathbb{X} .

5.4.5 Esempio. Fissiamo per semplicità $T = 2\pi$. Consideriamo λ reale e f a valori reali. Allora il problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, 2\pi], \\ y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi). \end{cases}$$

ha soluzione (nel senso di L^2) unica per ogni f in $L^2([0, 2\pi])$ se e solo se $\lambda \neq k^2$ per ogni k intero (basta controllare i k positivi dato che c 'è il quadrato).

Per esempio se $\lambda < 0$ c'è soluzione per ogni dato f in $L^2([0, 2\pi])$.

Se invece $\lambda = k_0^2$ per un intero $k_0 \neq 0$ allora esiste soluzione se e solo se i coefficienti c_{k_0} e c_{-k_0} relativi a f sono zero; cioè equivale a

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(k_0 t) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(t) \sin(k_0 t) dt = 0.$$

Se infine $\lambda = 0$ c'è soluzione se e solo se $c_0 = 0$ cioè se

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

In questi casi la soluzione y non è unica, ma lo diventa se si impone che verifichi

$$\int_0^{2\pi} y(t) \cos(k_0 t) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} y(t) \sin(k_0 t) dt = 0.$$

nel caso $k_0 \neq 0$ oppure

$$\int_0^{2\pi} y(t) dt = 0.$$

nel caso $\lambda = 0$.

In tutti casi la soluzione y è continua, derivabile, periodica con derivata periodica, mentre per avere che esista la derivata seconda in senso usuale bisogna avere qualche proprietà in più su f , per esempio che i coefficienti di f diano una serie sommabile.

Consideriamo ora un problema con condizione zero agli estremi. Non facciamo la dimostrazione che è analoga a quella della 5.4.2.

5.4.6 Proposizione. Sia $T > 0$ e poniamo $\tilde{\omega} := \frac{\pi}{T}$; ricordiamo che $\mathbf{s}_n(t) = \sin(\tilde{\omega} n t)$. Siano λ reale e f in $L^2([0, T])$ a valori reali. Diremo che y è soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, T], \\ y(0) = y(T) = 0 \end{cases} \quad (P_f^0)$$

se $y \in L^2([0, \pi])$, y è derivabile due volte nel senso di L^2 , y vale zero agli estremi e vale l'equazione scritta in (P_f^0) . Notiamo che dire $y(0) = y(T) = 0$ ha senso in quanto (avendo derivata seconda in L^2) y è continua.

Allora il problema (P_f^0) ha soluzione unica per ogni f in $L^2([0, T])$ se e solo se $\lambda \neq \tilde{\omega}^2 k^2$ per ogni $k > 0$ intero (nota che il risultato è diverso da quello dell'esempio precedente, dato che l'intervallo è cambiato). Tale soluzione è data da

$$y = \sum_{L_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\lambda - \tilde{\omega}^2 n^2} \mathbf{s}_n, \quad \text{dove} \quad f = \sum_{L_2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n$$

Se invece $\lambda = \tilde{\omega}^2 k_0^2$ per un intero $k_0 > 0$ allora esiste soluzione se e solo se il coefficiente k_0 -esimo relativo a f è zero, cioè se e solo se

$$\int_0^T f(t) \sin(k_0 \tilde{\omega} t) dt = 0.$$

In questo caso la soluzione y non è unica, ma lo diventa se si impone che verifichi

$$\int_0^{\pi} y(t) \sin(k_0 \tilde{\omega} t) dt = 0.$$

(potendosi in generale aggiungere a tale soluzione $u \mathbf{s}_{k_0}$ con u in \mathbb{R}).

In tutti casi la soluzione y è continua, derivabile e nulla in 0 e in T dunque effettivamente verifica la condizione agli estremi. Come nel caso precedente per avere che esiste la derivata seconda in senso usuale bisogna avere qualche proprietà in più su f , per esempio che $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$.

In maniera analoga si tratta un problema con condizione di derivata nulla al bordo.

5.4.7 Proposizione. Sia $T > 0$ e poniamo $\tilde{\omega} := \frac{\pi}{T}$; ricordiamo che $\mathbf{c}_n(t) = \cos(\tilde{\omega} n t)$. Siano λ reale e f in $L^2([0, T])$ a valori reali. Diremo che y è soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, T], \\ y'(0) = y'(T) = 0 \end{cases} \quad (P_f^1)$$

se $y \in L^2([0, \pi])$, y è derivabile due volte nel senso di L^2 , y, y' vale zero agli estremi e vale l'equazione scritta in (P_f^1) . Notiamo che dire $y'(0) = y'(T) = 0$ ha senso in quanto (avendo derivata seconda in L^2) y' è continua.

Allora il problema (P_f^1) ha soluzione unica per ogni f in $L^2([0, T])$ se e solo se $\lambda \neq \tilde{\omega}^2 k^2$ per ogni $k \geq 0$ intero. Tale soluzione è data da

$$y = \sum_{L_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{\lambda - \tilde{\omega}^2 n^2} \mathbf{c}_n, \quad \text{dove} \quad f = \sum_{L_2} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n$$

Se invece $\lambda = \tilde{\omega}^2 k_0^2$ per un intero $k_0 \geq 0$ allora esiste soluzione se e solo se il coefficiente k_0 -esimo relativo a f è zero, cioè se e solo se

$$\int_0^T f(t) \cos(k_0 \tilde{\omega} t) dt = 0.$$

In questo caso la soluzione y non è unica, ma lo diventa se si impone che verifichi

$$\int_0^{\pi} y(t) \cos(k_0 \tilde{\omega} t) dt = 0.$$

(potendosi in generale aggiungere a tale soluzione $v \mathbf{c}_{k_0}$ con v in \mathbb{R}). Anche in questo caso la regolarità di y aumenta se si hanno informazioni aggiuntive sulla sommabilità dei (v_n) .

Capitolo 6

Trasformate di Fourier e Laplace

6.1 La trasformata di Fourier in L^1 e in L^2

In questo paragrafo introdurremo la trasformata di Fourier per funzione definite su tutta la retta, senza ipotesi di periodicità. Per intuire un collegamento con le serie di Fourier (fatta per funzioni periodiche) facciamo un ragionamento “formale”. Prendiamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e, fissato $T > 0$, consideriamo i coefficienti di Fourier relativi all’intervallo $[-T/2, T/2]$; ciò equivale a dire che consideriamo la funzione T -periodica f_T che coincide con la f di partenza tra $-T/2$ e $T/2$, e sviluppiamo f_T in serie di Fourier. Come abbiamo visto i coefficienti sono

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \hat{c}_n$$

dove $\hat{c}_n := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$, e si ha:

$$f_T(t) \stackrel{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_n e^{in\omega_0 t} \omega_0.$$

La serie scritta sopra si può interpretare come un integrale di una funzione a scalini:

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{c}_{\left[\frac{\omega}{\omega_0}\right]} e^{i\omega_0 \left[\frac{\omega}{\omega_0}\right] t} d\omega$$

dato che

$$\left[\frac{\omega}{\omega_0}\right] = n \quad \text{se } n\omega_0 \leq \omega < (n+1)\omega_0,$$

e che il fattore ω_0 , essendo pari alla lunghezza dell’intervallino $[n\omega_0, (n+1)\omega_0]$ “diventa $d\omega$ ” nell’integrale. Mandando T all’infinito ω_0 tende a zero ed essendo $\omega - \omega_0 \leq \omega_0 \left[\frac{\omega}{\omega_0}\right] \leq$

ω si ha $\omega_0 \left[\frac{\omega}{\omega_0}\right] \rightarrow \omega$. Allora (*formalmente*)

$$\hat{c}_{\left[\frac{\omega}{\omega_0}\right]} = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_0 \left[\frac{\omega}{\omega_0}\right] t} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt =: \hat{f}(\omega)$$

e (sempre formalmente) $f_T(t) \rightarrow f(t)$, da cui:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Se queste formule hanno un fondamento (come vedremo di dimostrare ora) esse dicono che un segnale non periodico si esprime come un integrale di segnali periodici al variare di tutte le frequenze possibili (non più sui multipli della frequenza del segnale di partenza).

6.1.1 Definizione. Sia f in $L^1(\mathbb{R})$ (a valori complessi). Chiameremo *trasformata di Fourier di f* la funzione definita da

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

6.1.2 Proposizione. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora \hat{f} è continua e si ha anche

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Dimostrazione. La continuità è conseguenza del teorema 4.1.13, dato che la funzione di due variabili $F(\omega, t) := f(t)e^{-i\omega t}$ è continua in (ω, t) , in particolare è misurabile in t ed è continua in ω , e vale la relazione (uniforme in ω)

$$|F(\omega, t)| = |f(t)||e^{-i\omega t}| = |f(t)| \in L^1 \quad \forall t, \forall \omega.$$

Notiamo che se ne ricava $|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ per ogni t , da cui

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1. \quad (6.1)$$

Per il comportamento all'infinito consideriamo prima il caso $f = 1_{[a,b]}$. Allora

$$\hat{f}(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=a}^{t=b} = i \frac{e^{-ib\omega} - e^{-ia\omega}}{\omega}$$

che tende a zero per $\omega \rightarrow \pm\infty$. Per linearità la proprietà è vera se f è costante a tratti. Nel caso generale possiamo trovare una successione $(f_n)_n$ di funzioni costanti a tratti tali che $f_n \rightarrow f$ in L^1 . Allora $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ uniformemente su \mathbb{R} a causa della (6.1), e dunque per il teorema di scambio dei limiti 2.1.8 si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}_n(\omega) = 0.$$

□

6.1.3 Definizione. Indichiamo con $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue da \mathbb{R} in \mathbb{C} che tendono a zero a $\pm\infty$. In tale spazio consideriamo la convergenza ottenuta mediante la norma uniforme (si può vedere abbastanza facilmente che la norma uniforme è una buona norma in $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$).

6.1.4 Osservazione. È chiaro che, date f e g in $L^1(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha $\widehat{(\alpha f + \beta g)} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$. Inoltre per quanto visto nella dimostrazione appena fatta si ha $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$. Dunque l'operatore $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ definito da $\mathcal{F}(f) := \hat{f}$ è lineare e continuo (di norma minore o eguale a uno – si potrebbe anche vedere che tale norma fa uno).

6.1.5 Proposizione. Sia f in $L^1(\mathbb{R})$. Allora valgono i fatti seguenti.

1. Se $t^n f(t)$ è in $L^1(\mathbb{R})$, allora \hat{f} ha derivata n -esima, $\hat{f}^{(n)} \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ e

$$\hat{f}^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}(f)^{(n)}(\omega) = (-i)^n \mathcal{F}(t^n f(t))(\omega).$$

2. Se f ha derivata n -esima nel senso di L^1 allora

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega) = i^n \omega^n \mathcal{F}(f)(\omega) = i^n \omega^n \hat{f}(\omega).$$

3. Se $t_0 \in \mathbb{R}$ allora ($f_{t_0}(t) := f(t - t_0)$)

$$\mathcal{F}(f_{t_0})(\omega) = e^{-it_0\omega} \mathcal{F}(f)(\omega) = e^{-it_0\omega} \hat{f}(\omega).$$

4. Se $\omega_0 \in \mathbb{R}$ allora

$$(\hat{f})_{\omega_0}(\omega) = \mathcal{F}(f)_{\omega_0}(\omega) = \mathcal{F}(e^{i\omega_0 t} f(t))(\omega).$$

5. Se $a \neq 0$ allora

$$\mathcal{F}(f(at))(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

6. Si ha

$$\mathcal{F}(\bar{f})(\omega) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\omega)}.$$

Dimostrazione. 1. Se poniamo $F(\omega, t) := f(t)e^{-i\omega t}$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial \omega} F(\omega, t) = -it f(t) e^{-i\omega t}, \quad \text{e allora} \quad \left| \frac{\partial}{\partial \omega} F(\omega, t) \right| = t |f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$$

per cui si può applicare la seconda tesi del teorema 4.1.13 e derivare sotto il segno si integrale ottenendo

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \omega} F(\omega, t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-it) f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}(-it f(t))(\omega). \end{aligned}$$

Dato che \hat{f}' è trasformata di una funzione L^1 essa appartiene a $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$. Abbiamo dimostrato il caso $n = 1$, il caso generale si ottiene iterando il procedimento.

2. Supponiamo che f ed f' siano continue e in $L^1(\mathbb{R})$. Allora integrando per parti

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = [f(t) e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} + \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 0 + i\omega \hat{f}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Si è sfruttato il fatto (che accettiamo senza dimostrazione) che se $f, f' \in L^1$ allora $f(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$ da cui segue che il primo dei due termini dopo l'integrazione per parti fa zero.

Nel caso generale, per definizione di derivata in L^1 , possiamo trovare una successione $(f_n)_n$ di funzioni in L^1 con derivata continua f'_n in L^1 e tali che $f_n \rightarrow f$ in L^1 e $f'_n \rightarrow f'$ in L^1 . Applicando la formula sopra alle f_n troviamo $\hat{f}'_n(\omega) = i\omega \hat{f}_n(\omega)$; peraltro a causa delle convergenze L^1 si ha $\hat{f}'_n \rightarrow \hat{f}'$ uniformemente e $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ uniformemente. Ne segue la tesi per $n =$; per n generale si itera il procedimento.

3. Si ha, usando la sostituzione $s = t - t_0$:

$$\begin{aligned}\widehat{f_{t_0}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{t_0}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega(s+t_0)} ds = e^{-it_0\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds = e^{-it_0\omega} \widehat{f}(\omega).\end{aligned}$$

4. Si ha

$$\begin{aligned}e^{i\omega_0 t} \widehat{f(t)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} f_{t_0}(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{t_0}(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = \widehat{f}(\omega - \omega_0) = \widehat{f_{\omega_0}}(\omega).\end{aligned}$$

5. Usando la sostituzione $s = at$ e tenendo conto del fatto che gli estremi si scambiano se $a < 0$, si ha:

$$\widehat{f(at)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-a\infty}^{+a\infty} f(s) e^{-i\omega s/a} ds = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

6. Si ha

$$\widehat{\overline{f}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt} = \overline{\widehat{f}(-\omega)}$$

□

6.1.6 Definizione. Data una funzione f indicheremo con f^* la funzione “riflessa”, cioè $f^*(t) = f(-t)$. Notiamo allora che, per le (5) e (6) della 6.1.5, si ha

$$\mathcal{F}(f^*) = \mathcal{F}(f)^*, \quad \mathcal{F}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)^*} = \overline{\mathcal{F}(f^*)}$$

o anche $\widehat{(f^*)} = \widehat{f}^*$ e $\widehat{\overline{f}} = \overline{\widehat{f}^*} = \overline{\widehat{f}^*}$.

6.1.7 Osservazione. Sia f in $L^1(\mathbb{R})$, allora si ha che

- f è pari se e solo se \widehat{f} è pari;
- f è dispari se e solo se \widehat{f} è dispari;
- f è reale se e solo se $\widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$;
- f è reale pari se e solo se \widehat{f} è reale pari;
- f è reale dispari se e solo se \widehat{f} è immaginaria pura dispari.

Per esempio si ha

$$f \text{ pari} \Rightarrow f = f^* \Rightarrow \widehat{f} = \widehat{f^*} \Rightarrow \widehat{f} = \widehat{f}^* \Rightarrow \widehat{f} \text{ pari},$$

e analogamente si ragiona per le altre proprietà. Per i viceversa si ragiona al contrario usando il fatto che vedremo tra breve che (in qualche senso) $f = \widehat{\widehat{f}}$.

6.1.8 Definizione. Sia f in $L^1(\mathbb{R})$. Per ogni numero reale $M > 0$ definiamo

$$f_M(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Notiamo che $f_M = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f} \cdot 1_{[-M, M]})^* = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f}^* \cdot 1_{[-M, M]})$ e quindi $f_M \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$; anzi f_M è di classe \mathcal{C}^∞ , a causa di (1) della 6.1.5.

6.1.9 Teorema. Se f è \mathcal{C}^1 e se f ed f' sono in $L^1(\mathbb{R})$, allora

$$f(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} f_M(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.2)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella di 5.1.5; si ha

$$\begin{aligned} f_M(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left(\int_{-M}^M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \right) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{\sin(M(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

(si è usato Fubini); dato che per ogni M si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(M(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} d\tau = 1$ possiamo scrivere (nel secondo integrale, si usa il cambio di variabile $s = M(t-\tau)$):

$$\begin{aligned} f(t) - f_M(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) - f(\tau)}{\pi(t-\tau)} \sin(M(t-\tau)) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)1_{[t-1, t+1]} - f(\tau)}{\pi(t-\tau)} \sin(M(t-\tau)) d\tau + \int_{t-1}^{t+1} \frac{f(t)}{\pi(t-\tau)} \sin(M(t-\tau)) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)1_{[t-1, t+1]} - f(\tau)}{\pi(t-\tau)} \sin(M(t-\tau)) d\tau + \frac{f(t)}{\pi} \int_{-M}^M \frac{\sin(s)}{s} ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $M \rightarrow +\infty$; tale limite è conseguenza del Lemma di Riemann per quanto riguarda il primo integrale, dato che $\frac{f(t)1_{[t-1, t+1]} - f(\tau)}{\pi(t-\tau)}$ è integrabile in τ (a causa della derivabilità

di f in t), mentre il secondo integrale tende a zero perché $\frac{\sin(s)}{s}$ ha integrale improprio finito. \square

6.1.10 Osservazione. In generale non si può scrivere $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, dato che non è vero in generale che \hat{f} è in $L^1(\mathbb{R})$. Lo si può fare se f è di classe \mathcal{C}^2 e f, f', f'' sono in $L^1(\mathbb{R})$, perchè in tal caso $\omega^2 \hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ all'infinito (da (2) della 6.1.5), e quindi \hat{f} è in $L^1(\mathbb{R})$. Quindi in questo caso si può scrivere $f(t) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-t)$.

Viceversa per l'esistenza del limite puntuale (6.2), può bastare di meno della derivabilità di f . In effetti vale il risultato seguente.

6.1.11 Teorema. Supponiamo che $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, f abbia derivata in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\setminus \{t_0\}$ per un opportuno $\delta > 0$ ed esistano finiti i limiti $f'(t_0^+)$ e $f'(t_0^-)$. Allora (devono esistere i limiti $f(t_0^+)$ e $f(t_0^-)$ e)

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = \lim_{M \rightarrow \infty} f_M(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.3)$$

6.1.12 Proposizione. Se f e g sono in $L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)g(t) dt. \quad (6.4)$$

Notiamo che gli integrali hanno senso perché gli integrandi sono prodotti di una funzione integrabile per una limitata.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)e^{-i\tau t} d\tau \right) dt = (*) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\tau t} dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\tau)g(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Per poter fare il passaggio (*) si usa il teorema di Fubini, notando che la funzione $f(t)g(\tau)e^{-i\tau t}$ è integrabile su \mathbb{R}^2 dato che (per Tonelli) risulta finito l'integrale del modulo:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(t)g(\tau)e^{-i\tau t}| dt d\tau = \int_{\mathbb{R}^2} |f(t)g(\tau)| dt d\tau = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \int_{\mathbb{R}} |g(\tau)| d\tau < +\infty.$$

□

6.1.13 Proposizione. Supponiamo che f e g siano in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ (infinitamente derivabili e nulle fuori da un intervallo). Allora \hat{f} e \hat{g} sono in $L^2(\mathbb{R})$ e si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)g(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t) dt. \quad (6.5)$$

Dimostrazione. Dato che f e g sono nulle fuori da un intervallo si ha, per la (1) di 6.1.5, che \hat{f} e \hat{g} sono infinitamente derivabili. Dato che f e g sono infinitamente derivabili si ha, per la (2) di 6.1.5, che per qualunque k $\omega^k \hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ e $\omega^k \hat{g}(\omega) \rightarrow 0$; in particolare \hat{f} e \hat{g} sono in L^2 . Allora per la (6.4) si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)g(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)g(t) dt.$$

dove si è usato che $\hat{f}(t) = 2\pi f(-t)$, a causa della regolarità di f , come già osservato in 6.1.10. È chiaro poi che il $-t$ può passare su g con un cambio di variabile nell'integrale. □

6.1.14 Osservazione. La proposizione precedente si può interpretare come segue: se f e g sono in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ si ha:

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\widehat{g^*}(\omega) d\omega = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\bar{g}^*)^*(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t) dt = 2\pi \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

In particolare, prendendo $f = g$ (sempre in $C_c^\infty(\mathbb{R})$)

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \|f\|_2^2.$$

6.1.15 Teorema. Si può estendere la trasformata di Fourier \mathcal{F} su tutto $L^2(\mathbb{R})$ in modo che (indicando sempre $\mathcal{F}(f)$ con \hat{f})

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{g}(t) dt = 2\pi \langle f, g \rangle$$

per ogni f e g in $L^2(\mathbb{R})$. In particolare, prendendo $f = g$ si ha $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|$ e quindi \mathcal{F} è un'applicazione lineare e continua da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ di norma $\sqrt{2\pi}$. Inoltre per ogni f in $L^2(\mathbb{R})$ risulta

$$f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))^*$$

e quindi \mathcal{F} è biunivoca e ha come inversa $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*$.

Dimostrazione. Data f in $L^2(\mathbb{R})$ si può trovare una successione di funzioni $(f_n)_n$ in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ che tendono a f in L^2 . Dato che $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f_n - f_m\|_2$ si vede che $(\hat{f}_n)_n$ è una successione di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$ e dunque essa converge a una funzione di $L^2(\mathbb{R})$ che chiamiamo \hat{f} . Tale funzione è univocamente determinata da f poiché se \hat{g} è limite di un'altra successione $(\hat{g}_n)_n$ dove $(g_n)_n$ sono funzioni in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ che tendono a f , si ha

$$\|\hat{f} - \hat{g}\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{f}_n - \hat{g}_n\|_2 = \sqrt{2\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - g_n\|_2 = \|f - f\|_2 = 0$$

e dunque $\hat{g} = \hat{f}$. Possiamo quindi chiamare \hat{f} la trasformata di Fourier di f . È abbastanza semplice a questo punto ricavare le altre proprietà affermate sopra mediante dei passaggi al limite. Per esempio, indicando sempre con $(f_n)_n$ una successione in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ che tende a f in L^2 , si ha (per la definizione di trasformata appena introdotta) che $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ in L^2 , da cui $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ in L^2 e infine $\hat{f}_n^* \rightarrow \hat{f}^*$ in L^2 . Dato che $f_n = \frac{1}{2\pi} \hat{f}_n^*$ (per la regolarità di f_n) si deduce che $f = \frac{1}{2\pi} \hat{f}^*$. \square

6.1.16 Osservazione. La trasformata di una funzione $L^2(\mathbb{R})$ non è un integrale (a priori neanche un integrale improprio). Però

$$\hat{f} = (L^2) - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \left(\text{cioè } \int_{-R}^{+R} f(t) e^{-i\omega t} dt \xrightarrow{L^2} \hat{f} \right).$$

Infatti è chiaro che $f \cdot 1_{[-R,R]} \xrightarrow{L^2} f$ e quindi, (essendo \mathcal{F} continua) si ha $\mathcal{F}(f \cdot 1_{[-R,R]}) \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}(f)$. Siccome

$$\mathcal{F}(f \cdot 1_{[-R,R]}) = \int_{-R}^{+R} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

si deduce la tesi. La stessa proprietà vale per l'antitrasformata, cioè

$$f = (L^2) - \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \left(\text{cioè } \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \xrightarrow{L^2} f \right).$$

Esprimeremo allora questi fatti (come facevamo per le serie di Fourier) scrivendo:

$$\hat{f}(\omega) \underset{L^2}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) \underset{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

6.1.17 Proposizione. *Supponiamo che P e Q siano due polinomi con $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 1$ e supponiamo che Q non abbia radici reali. Indichiamo con z_1, \dots, z_k le radici di Q . Allora $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ è in $L^2(\mathbb{R})$ e*

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi i \begin{cases} - \sum_{\substack{j=1, \dots, k \\ \Im m(z_j) < 0}} \text{Res} \left(\frac{P(z)e^{-i\omega z}}{Q(z)}, z_j \right) & \text{se } \omega > 0, \\ \sum_{\substack{j=1, \dots, k \\ \Im m(z_j) > 0}} \text{Res} \left(\frac{P(z)e^{-i\omega z}}{Q(z)}, z_j \right) & \text{se } \omega < 0. \end{cases}$$

Un'analogia formula vale per l'antitrasformata: se $\hat{f}(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$, dove P e Q sono come nel primo caso, allora:

$$f(t) = i \begin{cases} \sum_{\substack{j=1, \dots, k \\ \Im m(z_j) > 0}} \text{Res} \left(\frac{P(z)e^{-izt}}{Q(z)}, z_j \right) & \text{se } t > 0, \\ - \sum_{\substack{j=1, \dots, k \\ \Im m(z_j) < 0}} \text{Res} \left(\frac{P(z)e^{-izt}}{Q(z)}, z_j \right) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sappiamo per le proprietà della trasformata che

$$\int_{-R}^{+R} f(t)e^{-i\omega t} dt \xrightarrow{L^2} \hat{f}$$

per $R \rightarrow +\infty$. D'altra parte per i teoremi sui residui si ha che, se si fissa $t \neq 0$, allora $\int_{-R}^{+R} f(t)e^{-i\omega t} dt$ tende all'espressione scritta sopra. Dato che la convergenza puntuale individua il limite L^2 ne segue la tesi. Stesso discorso per l'antitrasformata. \square

Per \mathcal{F} in $L^2(\mathbb{R})$ valgono ancora tutte le proprietà enunciate nella proposizione 6.1.5. Non facciamo la dimostrazione che sarebbe una serie di passaggi al limite (in L^2) delle proprietà dimostrate. Riportiamo solamente le proprietà che legano derivabilità e sommità all'infinito poichè nel caso di L^2 assumono una forma leggermente diversa (le altre invece restano identiche pur di sostituire $L^2(\mathbb{R})$ a $L^1(\mathbb{R})$).

6.1.18 Proposizione. *Sia f in $L^2(\mathbb{R})$. Allora valgono i fatti seguenti.*

1. *Se $t^n f(t)$ è in $L^2(\mathbb{R})$, allora \hat{f} ha derivata n -esima nel senso di L^2 e si ha*

$$\mathcal{F}(f)^{(n)}(\omega) = (-i)^n \mathcal{F}(t^n f(t))(\omega).$$

2. *Se f è derivabile n volte nel senso di L^2 allora*

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega) = i^n \omega^n \mathcal{F}(f)(\omega);$$

in particolare $\omega^n \hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$.

Il risultato seguente non avrebbe a priori bisogno delle trasformate, ma la dimostrazione è assai semplice tenendo conto di quanto abbiamo trovato fin'ora.

6.1.19 Proposizione. *Supponiamo che $f \in L^2(\mathbb{R})$ e f abbia derivata prima nel senso di L^2 . Allora f è continua e $f(t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow \pm\infty$.*

Dimostrazione. Dalla (2) della proposizione 6.1.18 si deduce che $\omega \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f')(\omega) \in L^2$. Ne segue che $\hat{f} \in L^1$, infatti usando la disuguaglianza di Schwartz

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)| d\omega &= \int_{|\omega| \leq 1} |\hat{f}(\omega)| d\omega + \int_{|\omega| \geq 1} |\omega \hat{f}(\omega)| \frac{1}{|\omega|} d\omega \leq \\ &= \int_{|\omega| \leq 1} |\hat{f}(\omega)| d\omega + \left(\int_{|\omega| \geq 1} |\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \left(\int_{|\omega| \geq 1} \frac{1}{\omega^2} d\omega \right)^{1/2} < +\infty. \end{aligned}$$

Dato che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e che $f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f}^*)$ si ha $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ che è la tesi. \square

6.1.20 Esempio. Consideriamo la funzione $f(t) := e^{-at^2}$, dove $a > 0$. Allora

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iat^2} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t+i\frac{\omega}{2a})^2} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{\gamma_\omega} e^{-az^2} dz$$

dove, dato ω in \mathbb{R} , γ_ω indica la curva illimitata definita da $\gamma_\omega(t) = t + i\frac{\omega}{2a}$ per $t \in \mathbb{R}$. Dato $R > 0$ consideriamo la curva $\gamma_{\omega,R}(t) := \gamma_\omega(t)$ per $-R \leq t \leq R$ e le due curve di raccordo $\sigma_{\omega,\pm R}(t) := \pm R + it$ per $0 \leq t \leq \frac{\omega}{2a}$ (vedi la figura 6.1). Per il teorema dei residui, dato che la funzione e^{-az^2} non ha poli, si ha:

$$\int_{-\gamma_{\omega,R}} e^{-az^2} dz + \int_{-\sigma_{\omega,-R}} e^{-az^2} dz + \int_{\gamma_{0,R}} e^{-az^2} dz + \int_{\sigma_{\omega,R}} e^{-az^2} dz = 0$$

e non è difficile verificare che gli integrali sui pezzi di raccordo $\sigma_{\omega,\pm R}$ tendono a zero per $R \rightarrow +\infty$. Quindi mandando R all'infinito si ottiene (ricordando l'esempio 4.1.23):

$$\int_{\gamma_\omega} e^{-az^2} dz = \int_{\gamma_0} e^{-az^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

e quindi $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

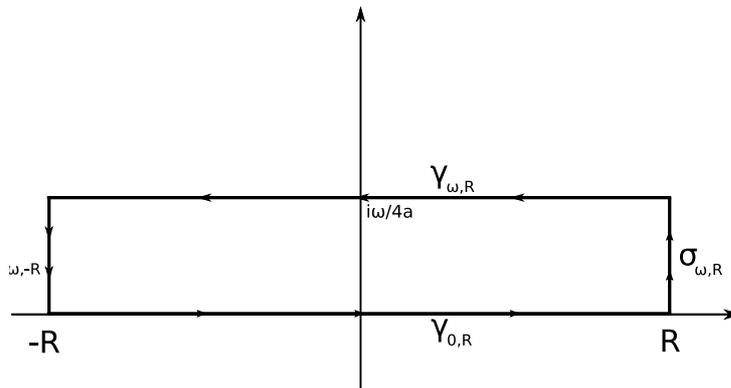


Figura 6.1: curve utilizzate nel calcolo della trasformata di e^{-at^2}

6.2 Problemi differenziali su \mathbb{R}

Consideriamo in questo paragrafo il problema

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f & \text{in } \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0 \end{cases} \quad (P_f^{\mathbb{R}})$$

dove a , b e c sono numeri complessi con $a \neq 0$ ed $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Questo problema è l'equivalente dei problemi sull'intervallo con condizione zero al bordo.

Al solito consideriamo una nozione generalizzata di soluzione: y risolve $(P_f^{\mathbb{R}})$ se y è in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, ha derivate prime e seconde in L^2 , verifica l'equazione nel senso di L^2 . A questo punto non c'è bisogno di dire altro dato che, essendo y e y' in L^2 esse **devono essere continue e tendere a zero all'infinito** a causa della proposizione 6.1.19.

Come in precedenza indichiamo con $P(z) = az^2 + bz + c$ il polinomio caratteristico dell'equazione scritta sopra.

6.2.1 Proposizione. *Supponiamo che*

- Se $P(i\omega) \neq 0$ per ogni ω in \mathbb{R} , allora per ogni f in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ il problema $(P_f^{\mathbb{R}})$ ha una e una sola soluzione y data dalla formula

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} \right) (t) \stackrel{L_2}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} e^{i\omega t} d\omega \quad (6.6)$$

- Se esistono degli ω (al massimo due) per cui $P(i\omega) = 0$ allora esiste una soluzione di $(P_f^{\mathbb{R}})$ se e solo se la funzione $\frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)}$ è in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$; se tale condizione è verificata la soluzione y è comunque unica ed è data dalla formula (6.6).
- Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora y è di classe \mathcal{C}^2 su \mathbb{R} e verifica l'equazione in senso tradizionale.

Dimostrazione. Supponiamo che y sia soluzione di $(P_f^{\mathbb{R}})$, allora y , y' e y'' hanno trasformate in L^2 e si ha:

$$\mathcal{F}(y') = i\omega \hat{y}, \quad \mathcal{F}(y'') = (i\omega)^2 \hat{y} = -\omega^2 \hat{y},$$

da cui, trasformando entrambi i membri dell'equazione

$$-\omega^2 a \hat{y} + i\omega b \hat{y} + c \hat{y} = \hat{f} \Leftrightarrow P(i\omega) \hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

A questo punto se $P(i\omega) \neq 0$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ è chiaro che $\frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)}$ è in L^2 ($\hat{f} \in L^2$ e $1/P(i\omega)$ è limitato) e quindi deve valere la formula (6.6) (in particolare c'è un'unica soluzione possibile). Viceversa, sempre se $P(i\omega)$ non si annulla mai, possiamo prendere y definita dalla formula (6.6), Dato che

$$\left| \omega^2 \frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} \right| \leq C |\hat{f}(\omega)| \Rightarrow \omega^2 \frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} \in L^2$$

(dove C è un'opportuna costante). Ne segue che y ha derivata seconda in L^2 e percorrendo a ritroso i passaggi di prima si ottiene che y risolve l'equazione. Abbiamo dunque dimostrato il primo punto.

Anche nel caso in cui $P(i\omega)$ si annulli in qualche ω (al massimo in due punti), ragionando come sopra si perviene alla relazione $\hat{y}(\omega)P(i\omega) = \hat{f}(\omega)$. Allora se la soluzione esiste bisogna che la funzione $\frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)}$ (definita eccetto che nelle radici di $P(i\omega)$) sia la trasformata di y e quindi sia L^2 . Viceversa se tale funzione è L^2 ha senso definire y mediante

la formula (6.6); inoltre è ancora vero che $\omega^2 \frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)}$ è in L^2 . Infatti, se si sceglie $R >$ tale che le radici di $P(i\omega)$ siano contenute in $] -R, R[$, si trova una costante C per cui

$$\left| \frac{\omega^2}{P(i\omega)} \right| \leq C \quad \forall \omega \text{ con } |\omega| \geq R, \Rightarrow \frac{\omega^2 \hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} \in L^2(\mathbb{R} \setminus [-R, R]),$$

mentre

$$\left| \frac{\omega^2 \hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} \right| \leq R^2 \left| \frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} \right| \quad \forall \omega \in [-R, R] \Rightarrow \frac{\omega^2 \hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} \in L^2([-R, R]).$$

Questo implica di nuovo che y ha derivata seconda in L^2 e verifica l'equazione.

Per quanto riguarda l'ultimo punto osserviamo che se $\hat{f} \in L^1$ allora

$$\mathcal{F}(y'')(\omega) = -\omega^2 \hat{y}(\omega) = \frac{-\omega^2}{P(i\omega)} \hat{f}(\omega) \in L^1$$

(perché, al solito, $\frac{-\omega^2}{P(i\omega)}$ è limitato all'infinito). Ne segue $y'' \in \mathcal{C}_0^0$. \square

6.2.2 Osservazione. È chiaro che l'ipotesi $\frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} \in L^2$ significa che \hat{f} è "buona" nelle radici di $P(i\omega)$; se \hat{f} è regolare (come di solito succede) allora tale condizione è equivalente a chiedere che in ogni radice reale di $P(i\omega)$ \hat{f} abbia uno zero di ordine almeno pari alla molteplicità della radice. In pratica se $\bar{\omega}$ è una radice semplice di $P(i\omega)$ allora bisogna che $\hat{f}(\bar{\omega}) = 0$, se $\bar{\omega}$ è una radice doppia di $P(i\omega)$ allora ci vuole $(\hat{f}(\bar{\omega}) = \hat{f}'(\bar{\omega}) = 0$ (e altro non può capitare dato che $P(i\omega)$ è un polinomio in ω di grado 2).

6.2.3 Esempio. Studiamo a titolo di esempio il problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = e^{-|t|} & \text{in } \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0. \end{cases}$$

Per prima cosa troviamo la trasformata del termine noto $f(t) = e^{-|t|}$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt = \left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right]_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{(1+i\omega)} = \frac{2}{\omega^2 + 1}. \end{aligned}$$

A questo punto notiamo che $P(i\omega) = \lambda - \omega^2$ non ha radici reali se $\lambda < 0$ mentre ha come radici $\pm\sqrt{\lambda}$ se $\lambda \geq 0$. Allora per $\lambda \geq 0$ non esistono soluzioni dato che $\hat{f}(\sqrt{\lambda}) = \frac{2}{1+\lambda} \neq 0$. Vediamo allora di risolvere il caso $\lambda < 0$; per semplificare le formule poniamo $\lambda := -b^2$ con $b > 0$. Da quanto fatto in generale otteniamo:

$$y(t) \underset{L_2}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + b^2)} d\omega = \begin{cases} i \sum_{\substack{(w^2-1)(w^2+b^2)=0 \\ \Im m(w) > 0}} \text{Res} \left(\frac{-2e^{itz}}{(z^2+1)(z^2+b^2)}, w \right) & \text{se } t \geq 0, \\ -i \sum_{\substack{(w^2-1)(w^2+b^2)=0 \\ \Im m(w) < 0}} \text{Res} \left(\frac{-2e^{itz}}{(z^2+1)(z^2+b^2)}, w \right) & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Per procedere nel calcolo dobbiamo distinguere il caso $b \neq 1$ in cui i poli da considerare per il calcolo dei residui sono $\pm i$ e $\pm ib$, tutti semplici, dal caso $b = 1$ i cui ci sono solo i poli $\pm i$ che però sono di ordine 2. Nel caso $b \neq 1$, ponendo $g(z) := \frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega^2+b^2)}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} i \operatorname{Res}(g, i) &= -i \left. \frac{2e^{izt}}{2z(z^2+b^2)+2z(z^2+1)} \right|_{z=i} = -i \frac{2e^{-t}}{2i(-1+b^2)+0} = -\frac{e^{-t}}{b^2-1}; \\ i \operatorname{Res}(g, bi) &= -i \left. \frac{2e^{izt}}{2z(z^2+b^2)+2z(z^2+1)} \right|_{z=bi} = -i \frac{2e^{-bt}}{0+2bi(-b^2+1)} = -\frac{e^{-bt}}{b(1-b^2)}; \\ -i \operatorname{Res}(g, -i) &= i \left. \frac{2e^{izt}}{2z(z^2+b^2)+2z(z^2+1)} \right|_{z=-i} = i \frac{2e^t}{-2i(-1+b^2)+0} = -\frac{e^t}{b^2-1}; \\ -i \operatorname{Res}(g, -bi) &= i \left. \frac{2e^{izt}}{2z(z^2+b^2)+2z(z^2+1)} \right|_{z=-bi} = i \frac{2e^{bt}}{0-2bi(-b^2+1)} = -\frac{e^{bt}}{b(1-b^2)}; \end{aligned}$$

e quindi

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{-bt}-be^{-t}}{b(b^2-1)} & \text{se } t > 0, \\ \frac{e^{bt}-be^t}{b(b^2-1)} & \text{se } t < 0, \end{cases} = \frac{e^{-b|t|} - be^{-|t|}}{b(b^2-1)}.$$

Nel caso $b = 1$ per calcolare i residui dobbiamo usare la parte analitica di g che vale $h_1(z) := \frac{-2e^{itz}}{(z+i)^2} = -2e^{itz}(z+i)^{-2}$ nel polo i e $h_2(z) := \frac{-2e^{itz}}{(z-i)^2} = -2e^{itz}(z-i)^{-2}$ nel polo $-i$. Allora:

$$\begin{aligned} i \operatorname{Res}(g, i) &= ih'_1(i) = -2i [ite^{itz}(z+i)^{-2} + e^{itz}(-2)(z+i)^{-3}]_{z=i} = \\ &= -2i \left(\frac{ite^{-t}}{4i^2} - 2\frac{e^{-t}}{8i^3} \right) = -\frac{te^{-t} + e^{-t}}{2}; \\ -i \operatorname{Res}(g, -i) &= -ih'_2(-i) = 2i [ite^{itz}(z-i)^{-2} + e^{itz}(-2)(z-i)^{-3}]_{z=-i} = \\ &= 2i \left(\frac{ite^t}{4(-i)^2} - 2\frac{e^t}{8(-i)^3} \right) = -\frac{te^t + e^t}{2}. \end{aligned}$$

Quindi se $b = 1$

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{te^{-t}+e^{-t}}{2} & \text{se } t > 0, \\ -\frac{te^t+e^t}{2} & \text{se } t < 0, \end{cases} = -\frac{|t|e^{-|t|} + e^{-|t|}}{2}.$$

A titolo di verifica controlliamo che la soluzione è di classe \mathcal{C}^1 come previsto dai risultati generali. Questo è chiaro in tutti i punti diversi da zero – bisogna allora verificare che $y(0^+) = y(0^-)$ e $y'(0^+) = y'(0^-)$. Consideriamo solo il caso $b \neq 1$. Dato che $y(t)$ si può scrivere in termini di $|t|$ è evidente che $y(0^+) = y(0^-) = \frac{1-b}{b(b^2-1)} = -\frac{1}{b(b+1)}$. Per quanto riguarda la derivata abbiamo:

$$\begin{aligned} t > 0 \Rightarrow y'(t) &= \frac{-be^{-bt} + be^{-t}}{b(b^2-1)} = \frac{-e^{-bt} + e^{-t}}{b^2-1} \quad \text{e dunque } y'(0^+) = 0; \\ t < 0 \Rightarrow y'(t) &= \frac{be^{bt} - be^t}{b(b^2-1)} = \frac{e^{bt} - e^t}{b^2-1} \quad \text{e dunque } y'(0^-) = 0. \end{aligned}$$

Consideriamo lo stesso problema con un altro dato:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = \operatorname{sgn}(t)e^{-|t|} & \text{in } \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0. \end{cases}$$

dove la funzione *segno* è definita da $\text{sgn}(t) = 1$, se $t > 0$ e $\text{sgn}(t) = -1$, se $t < 0$ (possiamo anche dire che $\text{sgn}(0) = 0$, ma non è molto importante dato che per definire un oggetto in L^2 basta definirne il valore per quasi ogni t). Troviamo la trasformata di $f_1(t) = \text{sgn}(t)e^{-|t|}$:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = - \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt = - \left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right]_0^{+\infty} = \\ &= - \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{(1+i\omega)} = \frac{-2\omega i}{\omega^2 + 1}. \end{aligned}$$

Come prima il problema è risolubile per $\lambda < 0$ (dato che è risolubile per qualunque dato in L^2) mentre per $\lambda \geq 0$ dobbiamo vedere se la funzione

$$\frac{\hat{f}_1(\omega)}{\lambda - \omega^2} = - \frac{2i\omega}{(\omega^2 + 1)(\lambda - \omega^2)} = \frac{2i\omega}{(\omega^2 + 1)(\omega - \sqrt{\lambda})(\omega + \sqrt{\lambda})} =: g(\omega)$$

è in $L^2(\mathbb{R})$. Ciò non è mai vero; infatti se $\lambda > 0$ la g ha due singolarità in $\pm\sqrt{\lambda}$ nei pressi delle quali g^2 non è integrabile ($\frac{1}{|x-x_0|^2}$ non è integrabile vicino a x_0). Se $\lambda = 0$ la $g(\omega)$ diventa $\frac{2i}{\omega(\omega^2 + 1)}$ che non è a quadrato sommabile vicino a zero. Dal punto di vista di \hat{f}_1 possiamo dire che non esiste soluzione in quanto, se $\lambda > 0$ $\hat{f}_1(\sqrt{\lambda}) \neq 0$, mentre se $\lambda = 0$, essendo 0 radice doppia del denominatore, ci vorrebbe $\hat{f}_1(0) = 0$ (e questa è vera) ma anche $(\hat{f}_1)'(0) = 0$ (e questa non vale).

Per risolvere il problema nel caso $0 > \lambda = -b^2$ si rifanno dei calcoli simili a quelli del caso precedente (invitiamo il lettore a farli effettivamente). Si può anche sfruttare quanto già trovato notando che la trasformata della soluzione relativa al dato f_1 è

$$\hat{y}_1(\omega) = -i\omega \frac{-2}{(\omega^2 + b^2)(\omega^2 + 1)} = -i\omega \hat{y}(\omega)$$

(dove y è quella calcolata prima). Allora deve essere $y_1(t) = -y'(t)$ (almeno nel senso di L^2 ma sappiamo che y è \mathcal{C}^1). Quindi, facendo le derivate si trova

$$y_1(t) = \text{sgn}(t) \frac{e^{-b|t|} - e^{-|t|}}{b^2 - 1} \quad \text{se } b \neq 1; \quad y_1(t) = -\frac{te^{-|t|}}{2} \quad \text{se } b = 1.$$

6.2.4 Esempio. Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} y'' + y' = \text{sgn}(t)e^{-|t|} & \text{in } \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0. \end{cases}$$

Il termine noto dell'equazione è la funzione f_1 dell'esempio precedente da cui $\hat{f}_1(\omega) = -\frac{2i\omega}{\omega^2 + 1}$. Allora si trova

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-2i\omega}{(\omega^2 + 1)(i\omega - \omega^2)} = \frac{2i}{(\omega^2 + 1)(\omega - i)} = \frac{2i}{(\omega + i)(\omega - i)^2}.$$

Allora il problema è risolubile: in effetti, in questo caso, il polinomio $P(i\omega)$ si annulla in un punto, cioè in $\omega = 0$, ma in tale punto anche \hat{f}_1 fa zero e siccome la molteplicità dello

zero è la stessa, allora la funzione risultante dal quoziente è L^2 (invece non è L^1). Allora:

$$y(t) \underset{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2ie^{i\omega t}}{(\omega+i)} d\omega = \begin{cases} i \operatorname{Res} \left(\frac{2ie^{itz}}{(z+i)(z-i)^2}, i \right) & \text{se } t \geq 0, \\ -i \operatorname{Res} \left(\frac{2ie^{itz}}{(z+i)(z-i)^2}, -i \right) & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Dato che

$$\begin{aligned} i \operatorname{Res} \left(\frac{2ie^{itz}}{(z+i)(z-i)^2}, i \right) &= -2 \left. \frac{d}{dz} \frac{e^{itz}}{(z+i)} \right|_{z=i} = -2 \left[\frac{ite^{itz}}{z+i} - \frac{e^{itz}}{(z+i)^2} \right]_{z=i} = \\ &= -2 \left(\frac{ite^{-t}}{2i} - \frac{e^{-t}}{4i^2} \right) = -te^{-t} - \frac{e^{-t}}{2} \\ -i \operatorname{Res} \left(\frac{2ie^{itz}}{(z+i)(z-i)^2}, -i \right) &= 2 \left[\frac{e^{itz}}{(z-i)^2} \right]_{z=-i} = 2 \frac{e^t}{4(-i)^2} = -\frac{e^t}{2} \end{aligned}$$

troviamo (ricordando che la funzione di Heavyside $H(t)$ vale 0 per $t < 0$ e 1 per $t > 0$)

$$y(t) = \begin{cases} -te^{-t} - \frac{e^{-t}}{2} & \text{se } t > 0, \\ -\frac{e^t}{2} & \text{se } t < 0, \end{cases} = -H(t)te^{-|t|} - \frac{e^{-|t|}}{2}.$$

Invitiamo il lettore a controllare che $y(0^+) = y(0^-) = -\frac{1}{2}$ e $y'(0^+) = y'(0^-) = -\frac{1}{2}$.

6.2.5 Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'' + b^2y = \sin(\omega_0 t) \operatorname{sgn}(t) e^{-|t|} & \text{in } \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0. \end{cases}$$

Ci chiediamo per quali valori dei parametri $b, \omega_0 > 0$ esista una soluzione y . Facciamo la trasformata del dato $h(t) := \sin(\omega_0 t) \operatorname{sgn}(t) e^{-|t|}$. Dato che $h(t) = \sin(\omega_0 t) f_1(t)$, dove f_1 è quella degli esempi precedenti, si ha:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \mathcal{F} \left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} f_1(t) \right) (\omega) = \frac{\hat{f}_1(\omega - \omega_0) + \hat{f}_1(\omega + \omega_0)}{2i} = \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{-2i(\omega - \omega_0)}{((\omega - \omega_0)^2 + 1)} - \frac{-2i(\omega + \omega_0)}{((\omega + \omega_0)^2 + 1)} \right] = \\ &= -\frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)^2 + (\omega - \omega_0) - (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)^2 - (\omega + \omega_0)}{((\omega - \omega_0)^2 + 1)((\omega + \omega_0)^2 + 1)} = \\ &= -\frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) [(\omega + \omega_0) - (\omega - \omega_0)] + (\omega - \omega_0) - (\omega + \omega_0)}{((\omega - \omega_0)^2 + 1)((\omega + \omega_0)^2 + 1)} = \\ &= -\frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)2\omega_0 - 2\omega_0}{((\omega - \omega_0)^2 + 1)((\omega + \omega_0)^2 + 1)} = -2\omega_0 \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - 1}{((\omega - \omega_0)^2 + 1)((\omega + \omega_0)^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Per quanto visto prima la condizione necessaria e sufficiente perché esista soluzione è che

$$-\frac{1}{\omega^2 - b^2} \hat{h}(\omega) \in L^2 \Leftrightarrow 2\omega_0 \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - 1}{(\omega^2 - b^2)((\omega - \omega_0)^2 + 1)((\omega + \omega_0)^2 + 1)} \in L^2.$$

Dato che $\pm b$ sono le uniche radici del denominatore, e sono semplici, è chiaro che per far venire la frazione in L^2 occorre e basta che $\pm b$ siano anche radici del numeratore, cioè che $b^2 - \omega_0^2 - 1 = 0$. Ma, se $b < 1$ questo non è mai possibile, mentre se $b \geq 1$ la condizione che si ottiene è $\boxed{\omega_0 = \sqrt{b^2 - 1}}$.

A titolo di esempio calcoliamo la soluzione y quando $b = 2$ e $\omega_0 = \sqrt{3}$. Si ha:

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2\sqrt{3}(\omega^2 - 4)}{(\omega^2 - 4)((\omega - \sqrt{3})^2 + 1)((\omega + \sqrt{3})^2 + 1)} = \frac{2\sqrt{3}}{((\omega - \sqrt{3})^2 + 1)((\omega + \sqrt{3})^2 + 1)}$$

che ha come singolarità i quattro poli semplici $\pm\sqrt{3} \pm i$. Se $G(z) := \frac{2\sqrt{3}e^{izt}}{((z-\sqrt{3})^2+1)((z+\sqrt{3})^2+1)}$, abbiamo

$$y(t) = \begin{cases} i \operatorname{Res}(G(z), \sqrt{3} + i) + i \operatorname{Res}(G(z), -\sqrt{3} + i) & \text{se } t > 0, \\ -i \operatorname{Res}(G(z), \sqrt{3} - i) - i \operatorname{Res}(G(z), -\sqrt{3} - i) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dato che

$$\begin{aligned} i \operatorname{Res}(G(z), \sqrt{3} + i) &= i \frac{2\sqrt{3}e^{izt}}{2(z - \sqrt{3})((z + \sqrt{3})^2 + 1) + ((z - \sqrt{3})^2 + 1)2(z + \sqrt{3})} \Big|_{z=\sqrt{3}+i} = \\ &= i \frac{2\sqrt{3}e^{i(\sqrt{3}+i)t}}{2i((2\sqrt{3} + i)^2 + 1)} = \frac{\sqrt{3}e^{(-1+\sqrt{3}i)t}}{12 + 4\sqrt{3}i} = \frac{(12\sqrt{3} - 12i)e^{(-1+\sqrt{3}i)t}}{192}; \\ i \operatorname{Res}(G(z), -\sqrt{3} + i) &= i \frac{2\sqrt{3}e^{izt}}{2(z - \sqrt{3})((z + \sqrt{3})^2 + 1) + ((z - \sqrt{3})^2 + 1)2(z + \sqrt{3})} \Big|_{z=-\sqrt{3}+i} = \\ &= i \frac{2\sqrt{3}e^{i(-\sqrt{3}+i)t}}{2i((-2\sqrt{3} + i)^2 + 1)} = \frac{\sqrt{3}e^{(-1-\sqrt{3}i)t}}{12 - 4\sqrt{3}i} = \frac{(12\sqrt{3} + 12i)e^{(-1-\sqrt{3}i)t}}{192}; \\ -i \operatorname{Res}(G(z), \sqrt{3} - i) &= -i \frac{2\sqrt{3}e^{izt}}{2(z - \sqrt{3})((z + \sqrt{3})^2 + 1) + ((z - \sqrt{3})^2 + 1)2(z + \sqrt{3})} \Big|_{z=\sqrt{3}-i} = \\ &= -i \frac{2\sqrt{3}e^{i(\sqrt{3}-i)t}}{-2i((2\sqrt{3} - i)^2 + 1)} = \frac{\sqrt{3}e^{(1+\sqrt{3}i)t}}{12 - 4\sqrt{3}i} = \frac{(12\sqrt{3} + 12i)e^{(1+\sqrt{3}i)t}}{192}; \\ -i \operatorname{Res}(G(z), -\sqrt{3} - i) &= -i \frac{2\sqrt{3}e^{izt}}{2(z - \sqrt{3})((z + \sqrt{3})^2 + 1) + ((z - \sqrt{3})^2 + 1)2(z + \sqrt{3})} \Big|_{z=-\sqrt{3}-i} = \\ &= -i \frac{2\sqrt{3}e^{i(-\sqrt{3}-i)t}}{-2i((-2\sqrt{3} - i)^2 + 1)} = \frac{\sqrt{3}e^{(1-\sqrt{3}i)t}}{12 + 4\sqrt{3}i} = \frac{(12\sqrt{3} - 12i)e^{(1-\sqrt{3}i)t}}{192}; \end{aligned}$$

otteniamo per $t > 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{(12\sqrt{3} - 12i)e^{(-1+\sqrt{3}i)t}}{192} + \frac{(12\sqrt{3} + 12i)e^{(-1-\sqrt{3}i)t}}{192} = \frac{e^{-t}}{192} 2\Re \left((12\sqrt{3} - 12i)e^{(\sqrt{3}i)t} \right) = \\ &= \frac{e^{-t}}{96} \left(12\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) + 12 \sin(\sqrt{3}t) \right) = \frac{e^{-t}}{8} \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) + \sin(\sqrt{3}t) \right) \end{aligned}$$

mentre per $t < 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{(12\sqrt{3} + 12i)e^{(1+\sqrt{3}i)t}}{192} + \frac{(12\sqrt{3} - 12i)e^{(1-\sqrt{3}i)t}}{192} = \frac{e^t}{192} 2\Re \left((12\sqrt{3} + 12i)e^{(\sqrt{3}i)t} \right) = \\ &= \frac{e^t}{96} \left(12\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) - 12 \sin(\sqrt{3}t) \right) = \frac{e^t}{8} \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t) \right), \end{aligned}$$

che volendo si può riassumere come

$$y(t) = \frac{e^{-|t|}}{8} \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) + \operatorname{sgn}(t) \sin(\sqrt{3}t) \right).$$

6.3 La trasformata di Laplace

La trasformata di Fourier, per quanto sia un ottimo strumento, ha il difetto di lavorare in $L^2(\mathbb{R})$ e quindi può trasformare solo funzioni che all'infinito vadano a zero (almeno in un senso integrale, cioè quello di avere energia finita). Questo per la verità può essere anche un pregio, quando, come negli esempi che abbiamo visto, la condizione zero all'infinito sia un requisito del problema; spesso però ci si trova a dover risolvere dei problemi differenziali in cui tale condizione all'infinito non è per nulla naturale. Vedremo in questo paragrafo come costruire un'altra trasformata, detta di Laplace, (comunque riconducibile alla trasformata di Fourier), che può trasformare funzioni che per $t \rightarrow +\infty$ non hanno nessun vincolo di crescita. Per fare ciò dobbiamo pagare un prezzo e cioè imporre che la funzioni trasformabili siano nulle vicino a meno infinito. Quindi la trasformata di Laplace è essenzialmente asimmetrica e si presta ad essere usata in problemi che descrivono processi con un *istante iniziale* (tipicamente lo zero) prima del quale *tutto è in quiete* e dopo il quale qualcosa comincia a muoversi.

Introduciamo lo spazio delle funzioni *localmente integrabili*

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ è misurabile e } f \text{ è integrabile su ogni intervallo } [a, b]\}$$

(sempre identificando le funzioni eguali quasi ovunque). Gli elementi di L^1_{loc} non hanno alcun vincolo di crescita a più o a meno infinito. Poniamo inoltre

$$L^+(\mathbb{R}) := \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \text{esiste } T \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x) = 0 \text{ per } x < T\}.$$

Possiamo dire che gli elementi di $L^+(\mathbb{R})$ sono funzioni a *supporto destro*. Indichiamo anche

$$L^+_0(\mathbb{R}) := \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ per } x < 0\}.$$

Dato α reale denotiamo inoltre con H_α il semispazio complesso aperto:

$$H_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > \alpha\}.$$

6.3.1 Definizione. Sia f in $L^+(\mathbb{R})$. Definiamo *ascissa di convergenza* di f il numero (eventualmente $\pm\infty$)

$$\alpha(f) := \inf \{x \in \mathbb{R} : e^{-xt} f(t) \in L^1(\mathbb{R})\}.$$

6.3.2 Proposizione. Sia f in $L^+(\mathbb{R})$. Allora per ogni numero complesso z con $\Re(z) > \alpha(f)$ si ha che $e^{-zt} f(t)$ è in $L^1(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sia $z = x + iy$ con $x = \Re(z) > \alpha(f)$. Per le proprietà dell'estremo inferiore possiamo trovare x' con $x > x' > \alpha(f)$ tale che $e^{-x't} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, se T è tale che $f(t) = 0$ per $t < T$, si ha:

$$|e^{-zt} f(t)| = e^{-xt} |f(t)| = e^{-(x-x')t} e^{-x't} |f(t)| \leq e^{-(x-x')T} |e^{-x't} f(t)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

□

6.3.3 Definizione. Per ogni $z = x + iy$ in $H_{\alpha(z)}$ possiamo definire la funzione $\check{f}(z)$ mediante

$$\check{f}(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt.$$

Notiamo che $\check{f}(x + iy) = \mathcal{F}(e^{-xt} f(t))(y)$. Diremo che \check{f} è la *trasformata di Laplace* di f e la denoteremo anche con $\mathcal{L}(f)$.

6.3.4 Proposizione. *Si ha*

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \check{f}(x + iy) = 0 \quad \forall x > \alpha(f);$$

inoltre, se $f \in L_0^+(\mathbb{R})$, si ha

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \Re z \geq \alpha}} \check{f}(z) = 0 \quad \forall \alpha > \alpha(f).$$

Dimostrazione. La prima proprietà è conseguenza del fatto che $\check{f}(x + iy) = \mathcal{F}(e^{-xt}f(t))(y)$ e del comportamento all'infinito della trasformata di Fourier. Per il secondo basta osservare che in questo caso

$$\check{f}(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} F(z, t) dt$$

dove

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \Re z \geq \alpha}} F(z, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad |F(z, t)| \leq e^{-\alpha t} |f(t)| \quad \forall t > 0, \forall z \text{ con } \Re z \geq \alpha$$

per cui si può applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale 4.1.13. \square

6.3.5 Teorema. *La funzione \check{f} è olomorfa su $H_{\alpha(f)}$. Inoltre per ogni n intero si ha $\alpha(t^n f(t)) = \alpha(f)$ e*

$$\frac{d}{z^n} \check{f}(z) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n(f(t)))(z).$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $n = 1$ (gli altri seguono iterando). Dimostriamo innanzitutto che $\alpha(tf(t)) = \alpha(f)$. Per questo fissiamo un qualunque $\alpha > \alpha(f)$ e prendiamo α' con $\alpha > \alpha' > \alpha(f)$; allora $e^{-\alpha' t} f(t) \in L^1$ da cui:

$$te^{-\alpha t} |f(t)| = te^{-(\alpha - \alpha')t} e^{-\alpha' t} |f(t)| \in L^1$$

(dato che f è a supporto destro e che $te^{-(\alpha - \alpha')t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$). Quindi $\alpha(tf(t)) \leq \alpha$ e per l'arbitrarietà di α si ha $\alpha(tf(t)) \leq \alpha(f)$. La disuguaglianza opposta è ovvia dunque si ha l'eguaglianza.

A questo punto, se $F(z, t) = f(t)e^{-zt}$ si ha $\check{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z, t) dt$ e chiaramente $\frac{\partial}{\partial z} F(z, t) = -tf(t)e^{-zt}$. Inoltre, fissato $\alpha > \alpha(f)$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} F(z, t) \right| = |tf(t)|e^{-\alpha t} \quad \forall z \text{ con } \Re z \geq \alpha.$$

Dato che la funzione scritta a destra è in L^1 , possiamo derivare sotto il segno di integrale e ottenere la tesi per ogni z con $\Re z > \alpha$. Per l'arbitrarietà di α la tesi è vera non appena $\Re z > \alpha(f)$. \square

6.3.6 Proposizione. *Sia f in $L^+(\mathbb{R})$ e supponiamo che f abbia derivata f' nel senso di L_{loc}^1 (automaticamente $f' \in L^+(\mathbb{R})$). Allora, se $\alpha := \max(\alpha(f), \alpha(f'))$ ¹ si ha*

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha.$$

¹In effetti non c'è nessun legame tra la trasformabilità di f e quella di f' ; vedremo successivamente che, ambientando la trasformata nelle *distribuzioni* (e quindi intendendo sia la trasformata che la derivata in un senso più generalizzato), si avrà invece $\alpha(f') \leq \alpha(f)$.

Cenno di dimostrazione. Se consideriamo il caso f di classe \mathcal{C}^1 , allora la tesi segue integrando per parti: dato z con $\Re z > \alpha$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-zt} dt = [f(t)e^{-zt}]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} zf(t)e^{-zt} dt = 0 + z\mathcal{L}(f)(z).$$

Si è usato il fatto che $f'(t)e^{-zt} \in L^1(\mathbb{R})$ e $f(t)e^{-zt} \in L^1(\mathbb{R})$ implicano $f(t)e^{-zt} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ (che si potrebbe dimostrare). Si passa poi al caso $f' \in L^1_{loc}$ approssimando mediante funzioni \mathcal{C}^1 e passando al limite. \square

Ricordiamo che $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ indica la funzione di Heavyside. Nell'enunciato seguente non chiediamo $f/f' \in L^+(\mathbb{R})$, ma intendiamo considerare le funzioni Hf e Hf' . Notiamo che, se $f' \in L^1_{loc}$, allora f è continua e dunque ha senso considerare $f(0)$.

6.3.7 Proposizione. *Sia f in L^1_{loc} e supponiamo che f abbia derivata f' nel senso di L^1_{loc} . Allora se $\alpha := \max(\alpha(Hf), \alpha(Hf'))$ si ha*

$$\mathcal{L}(Hf')(z) = z\mathcal{L}(Hf)(z) - f(0) \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha.$$

Cenno di dimostrazione. Consideriamo f di classe \mathcal{C}^1 . Allora integrando per parti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f'(t)e^{-zt} dt = [f(t)e^{-zt}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} zf(t)e^{-zt} dt = -f(0) + z\mathcal{L}(Hf)(z)$$

dove si è considerato z con $\Re z > \alpha$. \square

Più in generale si possono ricavare i seguenti enunciati.

6.3.8 Proposizione. 1. *Sia f in $L^+(\mathbb{R})$ e supponiamo che f abbia derivate $f', f'', \dots, f^{(k)}$ nel senso di L^1_{loc} (che sono automaticamente in $L^+(\mathbb{R})$).*

Allora posto $\alpha := \max(\alpha(f), \alpha(f'), \dots, \alpha(f^{(k)}))$ si ha:

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(z) = z^k \mathcal{L}(f)(z) \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha.$$

2. *Sia f in L^1_{loc} e supponiamo che f abbia derivate $f', f'', \dots, f^{(k)}$ nel senso di L^1_{loc} . Notiamo che in tal caso $f, f', \dots, f^{(k-1)}$ sono continue.*

Allora posto $\alpha := \max(\alpha(f), \alpha(f'), \dots, \alpha(f^{(k)}))$ si ha:

$$\mathcal{L}(Hf^{(k)})(z) = z^k \mathcal{L}(Hf)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} z^j f^{(k-1-j)}(0) \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha.$$

6.3.9 Proposizione. *Sia f in $L^+(\mathbb{R})$. Allora*

- se $t_0 \in \mathbb{R}$ $\alpha(f_{t_0}) = \alpha(f)$ e

$$\mathcal{L}(f_{t_0})(z) = e^{-t_0 z} \check{f}(z) \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha(f);$$

- se $z_0 \in \mathbb{C}$ $\alpha(e^{z_0 t} f(t)) = \alpha(f) + \Re z_0$ e

$$\mathcal{L}(e^{z_0 t} f(t))(z) = \check{f}(z - z_0) = \check{f}_{z_0}(z) \quad \forall z \text{ con } \Re(z - z_0) > \alpha(f).$$

Dimostrazione. Vediamo la prima delle due. È chiaro che $e^{-xt}|f|(t)$ è integrabile su \mathbb{R} se e solo se $e^{-xt}|f|(t-t_0)$ lo è da cui $\alpha(f_{t_0}) = \alpha(f)$. Per quanto riguarda la formula si vede facilmente che, per $\Re z > \alpha(f)$

$$\mathcal{L}(f_{t_0})(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-z(s+t_0)} ds = e^{-t_0 z} \check{f}(z).$$

Per quanto riguarda la seconda affermazione basta osservare che $|e^{z_0 t} f(t)e^{-xt}| = |f(t)|e^{-(x-\Re z_0)t}$ (da cui $\alpha(e^{z_0 t} f(t)) = \alpha(f) + \Re z_0$) e che

$$\mathcal{L}(e^{z_0 t} f(t))(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(z-z_0)t} dt = \check{f}_{z_0}(z) \quad \text{se } \Re(z-z_0) > \alpha(f).$$

□

6.3.10 Esempio. Si ha:

$$\begin{aligned} \alpha(H(t)) &= 0, & \mathcal{L}(H(t)) &= \frac{1}{z} & \forall z \text{ con } \Re z > 0; \\ \alpha(t^k H(t)) &= 0, & \mathcal{L}(t^k H(t)) &= \frac{k!}{z^{k+1}} & \forall z \text{ con } \Re z > 0; \\ \alpha(e^{z_0 t} H(t)) &= \Re z_0, & \mathcal{L}(e^{z_0 t} H(t)) &= \frac{1}{z-z_0} & \forall z \text{ con } \Re z > \Re z_0; \\ \alpha(t^k e^{z_0 t} H(t)) &= \Re z_0, & \mathcal{L}(t^k e^{z_0 t} H(t)) &= \frac{k!}{(z-z_0)^{k+1}} & \forall z \text{ con } \Re z > \Re z_0; \\ \alpha(\sin(\omega_0 t) H(t)) &= 0, & \mathcal{L}(\sin(\omega_0 t) H(t)) &= \frac{\omega_0}{z^2 + \omega_0^2} & \forall z \text{ con } \Re z > 0; \\ \alpha(\cos(\omega_0 t) H(t)) &= 0, & \mathcal{L}(\cos(\omega_0 t) H(t)) &= \frac{z}{z^2 + \omega_0^2} & \forall z \text{ con } \Re z > 0; \end{aligned}$$

6.3.11 Teorema (antitrasformata). *Sia α un numero reale e sia $g : H_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Supponiamo che esista una costante M tale che*

$$|g(z)| \leq \frac{M}{|z|^2 + 1} \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha. \quad (6.7)$$

Allora

- per ogni t reale e per ogni $x > \alpha$ l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} g(z)e^{zt} dz \quad (6.8)$$

esiste e non dipende da x ; dunque possiamo chiamare $f(t)$ tale integrale;

- $f(t)$ è continua in t e $f(t) = 0$ per $t \leq 0$ (quindi $f \in L^+(\mathbb{R})$);
- $\alpha(f) \leq \alpha$;
- $\check{f}(z) = g(z)$ per ogni z con $\Re z > \alpha$.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che

$$f_x(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} g(z)e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+iy)e^{iyt} dy$$

e quindi

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{xt} \hat{h}_x(t) \quad \text{dove } h_x(y) := g(x - iy).$$

dunque $f_x(t)$ esiste ed è continua in t dato che $h_x(y)$ è integrabile in y , a causa della ipotesi (6.7).

Dimostriamo che $f_x(t)$ non dipende da $x > \alpha$.

Per questo fissiamo $x_2 > x_1 > \alpha$ e un numero $R > 0$. Consideriamo il rettangolo $\mathcal{R}_{x_1, x_2, R} := \{x + iy \in \mathbb{C} : x_1 \leq x \leq x_2, -R \leq y \leq R\}$. Dato che g è olomorfa su $\mathcal{R}_{x_1, x_2, R}$ si ha

$$\int_{\partial \mathcal{R}_{x_1, x_2, R}} g(z) e^{zt} dz = 0.$$

I contributi dei tratti orizzontali del bordo del rettangolo tendono a zero:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} g(\xi \pm Ri) e^{(\xi \pm Ri)t} d\xi \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{\xi^2 + R^2 + 1} e^{x_2|t|} d\xi \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow +\infty.$$

Mandando R a $+\infty$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1 + iy) e^{(x_1 + iy)t} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_2 + iy) e^{(x_2 + iy)t} dy$$

per cui $f_x(t)$ non dipende da x e la indicheremo semplicemente con $f(t)$.

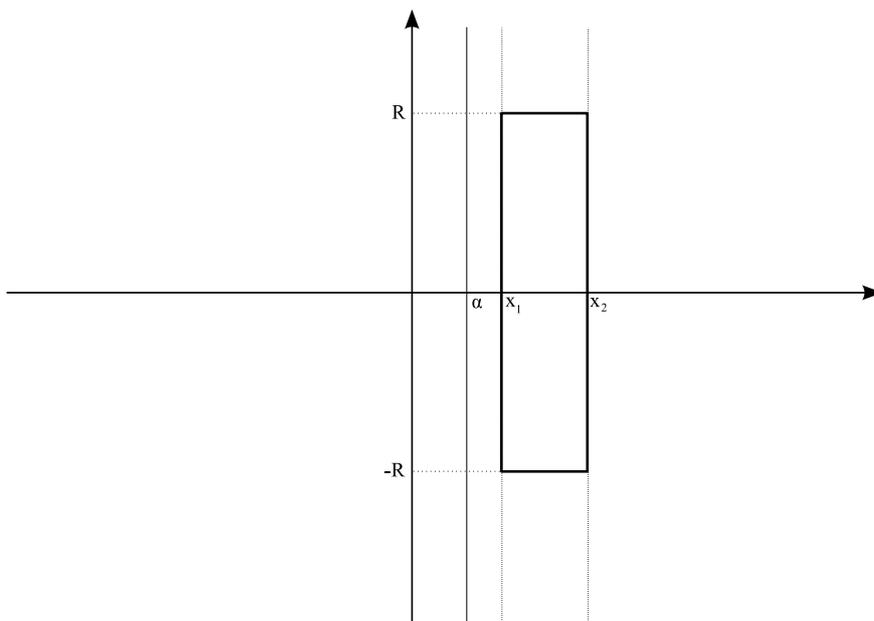


Figura 6.2: il rettangolo $\mathcal{R}_{x_1, x_2, R}$

Mostriamo che $f(t) = 0$ se $t < 0$. Si ha infatti, qualunque sia $x > \alpha$

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x + iy) e^{(x + iy)t}| dy \leq \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{x^2 + y^2 + 1} dy$$

ed è chiaro che il termine scritto a destra tende a zero per $x \rightarrow +\infty$ (dato che $t < 0$).

Mostriamo che $\alpha(f) \leq \alpha$: per questo basta mostrare che $e^{-xt} f(t)$ è integrabile per ogni $x > \alpha$. Preso un tale x possiamo trovare un x' con $\alpha < x' < x$ e dato che $f(t) = f_{x'}(t)$ abbiamo

$$|e^{-xt} f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-xt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{(x')^2 + y^2 + 1} e^{x't} dy = \text{costante} \cdot e^{-(x-x')t}$$

e l'ultimo termine scritto è integrabile in t a $+\infty$.

Rimane solo da vedere che $\check{f} = g$. Applicando il teorema 6.1.9 a h_x (che è infinitamente derivabile) si ottiene, per $z = x + iy$ con $x > \alpha$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(z) &= \mathcal{F}(e^{-xt}f(t))(y) = \mathcal{F}\left(e^{-xt}\frac{1}{2\pi}e^{xt}\hat{h}_x(t)\right)(y) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{h}_x(t))(y) = h_x(-y) = g(z + iy) = g(z). \end{aligned}$$

□

Il teorema precedente ammette la seguente generalizzazione, in cui si indebolisce l'ipotesi di crescita su g e si ottiene un'antitrasformata che non è continua.

6.3.12 Teorema. *Sia α un numero reale e sia $g : H_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che*

$$|g(z)| \leq \frac{M}{|z| + 1} \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha. \quad (6.9)$$

per una opportuna costante M . Allora

- per ogni x con $x > \alpha$ esiste

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x + iy)e^{iyt} dy := L_2(\mathbb{R}) - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R g(x + iy)e^{iyt} dy$$

(nel senso che gli integrali tra $-R$ a R , come funzioni di t , convergono in L^2 a una funzione di t che denotiamo come "integrale" tra $-\infty$ e $+\infty$). Ha senso allora definire:

$$f_x(t) := \frac{1}{L_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x + iy)e^{x+iyt} dy = \frac{1}{L_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)e^{zt} dz$$

(che è l'interale precedente moltiplicato per e^{xt}). Notiamo che la definizione non è data t per t ma solo come limite nel senso di L^2 .

- Dati x_1, x_2 in $] \alpha, +\infty[$ si ha $f_{x_1}(t) = f_{x_2}(t)$ per quasi ogni t ; dunque f_x individua una funzione di L_{loc}^1 indipendente da x che possiamo indicare semplicemente con f (notiamo che f è il prodotto di una funzione $L^2(\mathbb{R})$ per una funzione esponenziale, dunque è "localmente" L^2).
- $f(t) = 0$ per $t \leq 0$ (quindi $f \in L^+(\mathbb{R})$);
- $\alpha(f) \leq \alpha$ e $\check{f}(z) = g(z)$ per ogni z con $\Re z > \alpha$.

Dimostrazione. Iniziamo la dimostrazione del teorema precedente. Se indichiamo con $h_x(y) := g(x - iy)$ abbiamo $|h_x(y)|^2 \leq \frac{M^2}{(|y| + 1)^2}$, da cui si deduce che $h_x \in L^2(\mathbb{R})$. Per i teoremi sulla trasformata di Fourier in L^2

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R g(x + iy)e^{iyt} dy \xrightarrow{L^2} \hat{h}_x \quad \text{per } R \rightarrow +\infty.$$

e quindi possiamo definire $f_x(t) = e^{xt}\hat{h}_x(t)$. Dato che la convergenza L^2 implica la convergenza quasi ovunque di una sottosuccessione possiamo trovare una successione (R_k) di numeri reali con $R_k \rightarrow \infty$ tale che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x+i[-R_k, R_k]} g(z)e^{zt} dz \rightarrow f_x(t) \quad \text{per quasi ogni } t \quad (6.10)$$

Siano ora $x-1, x_2$ con $\alpha < x_1 < x_2$; possiamo trovare una successione (R_k) di numeri reali con $R_k \rightarrow \infty$ tale che la convergenza di (6.10) valga sia per $x = x_1$ che per $x = x_2$. Se ragioniamo come nella dimostrazione del teorema precedente, considerando il rettangolo $\mathcal{R}_{x_1, x_2, R_k}$, otteniamo di nuovo che i contributi sui lati orizzontali tendono a zero per $k \rightarrow \infty$ (il denominatore dell'integrale continua a essere divergente anche se non c'è più il quadrato). Ne segue che $f_{x_1} = f_{x_2}$ quasi ovunque e dunque possiamo scrivere f invece di f_x . Mostriamo che $f(t) = 0$ se $t < 0$. Dalla ipotesi (6.9) si ottiene

$$\|h_x\|_{L^2} \leq C \quad \forall x > \alpha$$

per un'opportuna costante C . Ne segue che

$$\|\hat{h}_x\|_{L^2} \leq C_1 \quad \forall x > \alpha$$

dove $C_1 = \sqrt{2\pi}C$ (per le proprietà della trasformata in L^2). Allora se $\bar{t} < 0$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{\bar{t}} f(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\bar{t}} e^{2xt} \hat{h}_x(t)^2 dt \leq e^{2x\bar{t}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} \hat{h}_x(t)^2 dt \leq e^{2x\bar{t}} C_1^2 \quad \forall x > \alpha.$$

e mandando x all'infinito si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\bar{t}} f(t)^2 dt = 0 \quad \forall \bar{t} < 0$$

che implica $f(t) = 0$ per quasi ogni $t < 0$.

Mostriamo che $\alpha(f) \leq \alpha$. Per questo basta far vedere che per ogni x con $x > \alpha$ si ha $e^{-xt} f(t) \in L^1([0, +\infty[)$. Sia allora $x > \alpha$ e sia x' con $\alpha < x' < x$; si ha $e^{-xt} f(t) = e^{-xt} f_{x'}(t) = e^{-xt} e^{x't} \hat{h}_{x'}(t) = e^{-(x-x')t} \hat{h}_{x'}(t)$. Applicando la disuguaglianza di Schwartz:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-x')t} \hat{h}_{x'}(t) dt \leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-2(x-x')t} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} |\hat{h}_{x'}(t)|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty$$

quindi $e^{-xt} f(t)$ è integrabile.

Infine ripetendo lo stesso ragionamento del teorema precedente si ottiene che $\check{f} = g$. \square

In realtà nell'ipotesi di andamento quadratico per g l'antitrasformata si può anche derivare, come afferma il seguente risultato, che non dimostriamo.

6.3.13 Proposizione. *Nell'ipotesi (6.7) del teorema 6.3.11 l'antitrasformata f non è solo continua ma ammette anche derivata f' nel senso di L^1 . Tale derivata è l'antitrasformata di $zg(z)$ (si noti che $zg(z)$ verifica l'ipotesi (6.9) del teorema 6.3.12).*

6.3.14 Osservazione. Se l'ipotesi sull'andamento all'infinito di g viene rafforzata, la regolarità di f aumenta. Si potrebbe dimostrare, usando i teoremi di derivabilità sotto il segno di integrale, che se

$$|g(z)| \leq \frac{M}{|z|^{m+2} + 1} \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha.$$

per un $m \geq 1$, allora la funzione f (definita nei teoremi precedenti) è di classe \mathcal{C}^m .

Nel caso in cui la g sia una funzione razionale abbiamo a disposizione un metodo, legato ai teoremi dei residui, per calcolarne l'antitrasformata.

6.3.15 Teorema. Supponiamo che P e Q siano due polinomi tali che $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 1$ e indichiamo con z_1, \dots, z_k le radici di Q . Poniamo $\alpha := \max \{\Re z_1, \dots, \Re z_k\}$. Allora per ogni $x > \alpha$ si ha:

$$(v.p.) \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} dz = \begin{cases} \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt}, z_j \right) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Dunque possiamo definire

$$f(t) := (v.p.) \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} dz \quad (6.12)$$

che risulta essere indipendente da $x > \alpha$ (e verificare la formula sopra). Tale funzione f è chiaramente in $L^+(\mathbb{R})$, inoltre $\alpha(f) \leq \alpha$ e $\check{f}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Dimostrazione. Consideriamo $t > 0$ e consideriamo la curva γ_R rappresentata nella figura 6.3 (stiamo pensando ad $\alpha > 0$, se fosse $\alpha < 0$ la curva non avrebbe i due tratti rettilinei orizzontali). Per R grande le radici di Q sono tutte contenute nella zona racchiusa da $\gamma : R$ e dunque

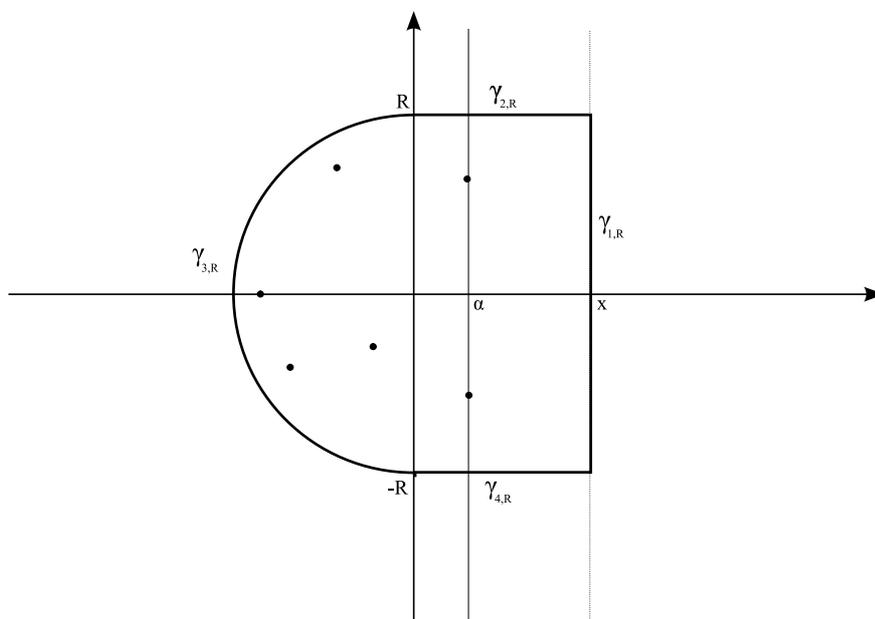


Figura 6.3: la curva $\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R} + \gamma_{4,R}$

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} dz = \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt}, z_j \right).$$

Si ha peraltro:

$$\left| \int_{\gamma_{2,R}} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} dz \right| = \left| \int_0^x \frac{P(\xi + iR)}{Q(\xi + iR)} e^{(\xi+iR)t} d\xi \right| \leq x \frac{M}{R} e^{xt}$$

per una opportuna costante M . Ne segue che $\int_{\gamma_{2,R}} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} dz \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$. Nello stesso modo si tratta l'integrale su $\gamma_{4,R}$. Passiamo a $\gamma_{3,R}$:

$$\left| \int_{\gamma_{3,R}} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} dz \right| = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} e^{Rte^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \leq R \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left| \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \right| e^{Rt \cos(\theta)} d\theta \leq M \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt \cos(\theta)} d\theta.$$

L'ultimo integrale tende anch'esso a zero per $R \rightarrow +\infty$ dato che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} e^{Rt \cos(\theta)} = 0 \quad \forall \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[, \quad |e^{Rt \cos(\theta)}| \leq 1 \quad \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

e quindi possiamo applicare il teorema di Lebesgue. Ne segue alla fine la formula (6.11) nel caso $t > 0$. Nel caso $t < 0$ si ripete lo stesso ragionamento usando la curva della figura 6.4 (nel caso $\alpha < 0$ ci saranno anche due tratti rettilinei come quelli della curva precedente). Stavolta non ci sono poli nella regione delimitata da γ_R per cui

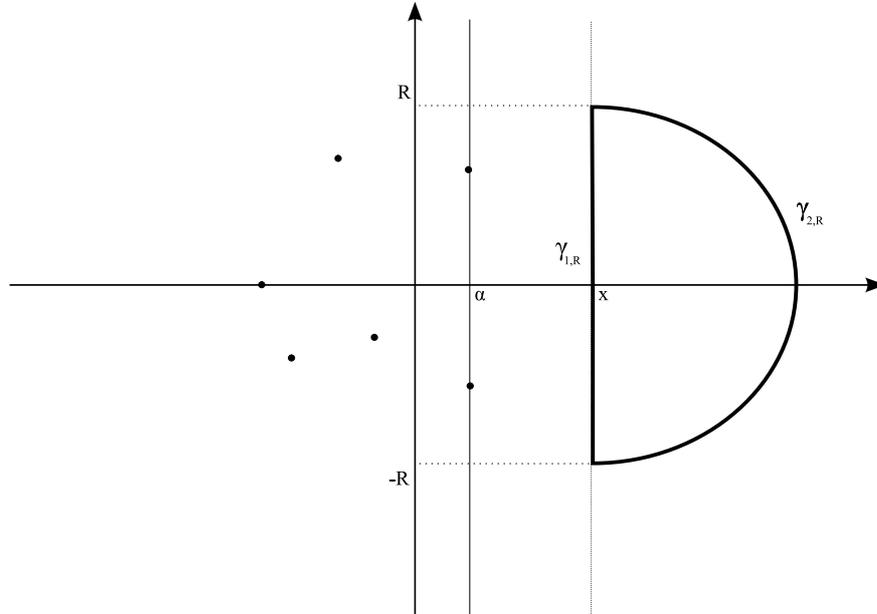


Figura 6.4: la curva $\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} dz = 0.$$

Inoltre, come prima $\int_{\gamma_{2,R}} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} dz \rightarrow 0$ (dato che $t < 0$) e quindi, passando al limite per $R \rightarrow +\infty$ si ottiene il secondo caso della formula (6.11).

Da questo punto in poi la dimostrazione è molto simile a quella dei teoremi precedenti e omettiamo ulteriori dettagli. \square

Abbiamo visto nei teoremi precedenti come costruire delle funzioni $f(t)$ che abbiano un'assegnata trasformata di Laplace $g(z)$. Ci si potrebbe chiedere se la f costruita sia l'unica possibile – in effetti è così, come mostra la seguente osservazione.

6.3.16 Osservazione. Se $f \in L^+(\mathbb{R})$, $\alpha(f) < +\infty$ e se esiste $\alpha \geq \alpha(f)$ tale che $\check{f}(z) = 0$ per ogni $z \in H_\alpha$ allora $f \equiv 0$. Per la linearità di \mathcal{L} ciò implica che due funzioni trasformabili che abbiano la stessa trasformata (per $\Re z$ sufficientemente grande) debbono essere eguali.

Infatti, fissato $x > \alpha$, per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $0 = \check{f}(x + iy) = \mathcal{F}(e^{-xt} f(t))(y)$ e dunque la funzione $e^{-xt} f(t)$ è nulla avendo trasformata di Fourier nulla. Ne segue $f(t) = 0$ per ogni t .

6.4 Problemi differenziali con condizioni di supporto destro

Sia $n \geq 2$ intero e siano a_0, a_1, \dots, a_n dei numeri complessi con $a_n \neq 0$; sia inoltre $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tale che $f(t) = 0$ per $t < 0$ (cioè $f \in L^+_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$). Vogliamo studiare il

problema

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f & \text{in } \mathbb{R}, \\ y(t) = 0 & \text{per } t < 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

Al solito cerchiamo soluzioni in senso generalizzato, vogliamo cioè che y abbia derivate fino all'ordine n nel senso di L^1 e che tali derivate, inserite nell'equazione realizzino l'eguaglianza. Per i fatti generali che abbiamo visto altre volte una tale y avrà comunque derivate continue fino all'ordine $n - 1$ – per la derivata n -esima bisognerà vedere come è fatta f . Notiamo anche che in questo caso tutte le derivate sono nulle prima di zero e quindi quelle di ordine minore di n devono raccordarsi a zero in modo continuo. Tutto quanto faremo si potrebbe ripetere sostituendo lo zero con un istante T generico: se partissimo da una f nulla prima di T potremmo cercare soluzioni nulle prima di T e troveremmo risultati analoghi a quelli che ora esponiamo.

Come sempre introduciamo il *polinomio caratteristico* P dell'equazione definito da

$$P(z) := a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

e chiamiamo z_1, \dots, z_k le sue radici.

Supponiamo che $\alpha(f) < +\infty$; allora è definita $\check{f} : H_{\alpha(f)} \rightarrow \mathbb{C}$. Se esiste una soluzione y e se $\alpha(y), \alpha(y'), \dots, \alpha(y^{(n)}) < +\infty$, allora, trasformando secondo Laplace entrambi i termini dell'equazione, otteniamo

$$P(z)\check{y}(z) = \check{f}(z) \quad \forall z \text{ con } \Re z > \max(\alpha(f), \alpha(y), \dots, \alpha(y^{(n)}))$$

(utilizzando le formule della proposizione 6.3.6). Quindi $\check{y}(z) = \frac{\check{f}(z)}{P(z)}$ per $\Re z > \alpha$, dove $\alpha = \max\{\alpha(f), \alpha(y), \dots, \alpha(y^{(n)}), \Re z_1, \dots, \Re z_k\}$; in particolare, per l'osservazione 6.3.16, di tali y ne può esistere al massimo una.

Viceversa facciamo vedere che la formula trovata individua effettivamente una soluzione y . Supponiamo per questo che la trasformata \check{f} sia dell'ordine di $\frac{1}{z}$ – più precisamente supponiamo che:

$$\text{per ogni } a > \alpha(f) \text{ esiste una costante } M_a \text{ tale che } |\check{f}(z)| \leq \frac{M_a}{|z|} \quad \forall z \in H_a. \quad (6.14)$$

Poniamo $\alpha := \max\{\alpha(f), \Re z_1, \dots, \Re z_k\}$ e fissiamo un qualunque $a > \alpha$. Se $g(z) := \frac{\check{f}(z)}{P(z)}$, troviamo allora

$$|g(z)| \leq \frac{M_a}{|z|^{n+1}} \quad \forall z \in H_a$$

e quindi, per il teorema 6.3.11, g è antitrasformabile secondo Laplace e possiamo definire y mediante la formula (6.8) in modo che $\alpha(y) \leq a$ e $\mathcal{L}(y) = g$ su H_a . Per l'arbitrarietà di $a > \alpha$ è chiaro che alla fine $\alpha(y) \leq \alpha$ e $\mathcal{L}(y) = g$ su H_α . Per la proposizione 6.3.13 (iterata n volte) la y risolve l'equazione. Abbiamo dunque provato che vale l'enunciato che segue (la seconda parte è conseguenza del teorema 6.3.15).

6.4.1 Proposizione. *Se il dato f verifica l'ipotesi 6.14, allora il problema (6.13) ammette una e una sola soluzione y individuata dalle proprietà $\alpha(y) \leq \alpha := \max\{\alpha(f), z_1, \dots, z_k\}$,*

$\check{y}(z) = \frac{\check{f}(z)}{P(z)}$ per $\Re z > \alpha$; inoltre

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} \frac{\check{f}(z)}{P(z)} e^{zt} dz$$

dove x è un qualunque numero con $x > \alpha$; tale l'integrale non dipende da x e fa zero per $t < 0$. Come già osservato $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è di classe \mathcal{C}^{n-1} .

Infine se $\check{f}(z) = \frac{R(z)}{Q(z)}$, dove R e Q sono polinomi e se z'_1, \dots, z'_h sono le radici di Q (e quindi $\alpha(f) = \max \{\Re z'_1, \dots, \Re z'_h\}$), allora si ha:

$$y(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^k \operatorname{Res} \left(\frac{R(z)e^{zt}}{P(z)Q(z)}, z_j \right) + \sum_{j=1}^h \operatorname{Res} \left(\frac{R(z)e^{zt}}{P(z)Q(z)}, z'_j \right) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0, \end{cases}$$

Vediamo ora come, mediante la trasformata di Laplace, si può risolvere il classico problema di Cauchy

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f & \text{in } \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \end{cases} \quad (6.15)$$

dove y_0, y_1, \dots, y_{n-1} sono n dati iniziali assegnati in \mathbb{C} e $f \in L^1_{loc}$. Faremo l'ipotesi che $\alpha(Hf) < +\infty$ e che

$$\mathcal{L}(Hf)(z) = \frac{R(z)}{Q(z)} \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha(Hf)$$

dove R e Q sono polinomi, $\operatorname{grado}(R) \leq \operatorname{grado}(Q) - 1$. Chiameremo z'_1, \dots, z'_h le radici di Q ; evidentemente $\alpha(Hf) = \max \{\Re z'_j, j = 1, \dots, h\}$. Come prima chiamiamo z_1, \dots, z_k le radici del polinomio caratteristico $P(z) := a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$.

Troveremo la soluzione $y(t)$ solo per $t \geq 0$; a priori quindi non potremmo dire nulla su quanto faccia $y(t)$ per $t < 0$, di solito però l'espressione che si trova per $y(t)$ fornisce immediatamente la soluzione anche per $t < 0$ (questo è sicuramente vero se $f = 0$).

Per trovare y moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per $H(t)$: a questo punto possiamo prendere la trasformata di Laplace di entrambi i lati e, applicando la proposizione 6.3.8 (secondo punto), otteniamo

$$\begin{aligned} P(z)\mathcal{L}(Hy)(z) - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j y^{(k-1-j)}(0) &= \frac{R(z)}{Q(z)} \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}(Hy)(z) &= \frac{1}{P(z)} \left(\sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-1} z^j y_{k-1-j} + \frac{R(z)}{Q(z)} \right) \Leftrightarrow \mathcal{L}(Hy)(z) = \frac{1}{P(z)} \left(S(z) + \frac{R(z)}{Q(z)} \right) \end{aligned}$$

dove

$$S(z) := \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-1} z^j y_{k-1-j} \quad (\operatorname{grado}(S) \leq n-1).$$

Usando il teorema 6.3.15 ne deduciamo (tralasciamo qualche dettaglio riguardo all'unicità)

6.4.2 Proposizione. *Nelle ipotesi scritte sopra soluzione del problema 6.15 verifica:*

$$y(t) = \sum_{j=1}^k \operatorname{Res} \left(\frac{e^{zt}}{P(z)} \left(\sum_{m=1}^n z^m y_{n-m} + \frac{R(z)}{Q(z)} \right), z_j \right) + \sum_{j=1}^h \operatorname{Res} \left(\frac{e^{zt}}{P(z)} \left(\sum_{m=1}^n z^m y_{n-m} + \frac{R(z)}{Q(z)} \right), z'_j \right) \quad \text{se } t > 0.$$

6.4.3 Osservazione. Se nella proposizione precedente consideriamo il caso $y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$ otteniamo una soluzione y del problema precedente (6.13), in un caso in cui l'ipotesi (6.14) non vale, ma si suppone che la trasformata di f sia una funzione razionale.

Capitolo 7

Cenno alla teoria delle distribuzioni

7.1 Le distribuzioni

7.1.1 Definizione. Indicheremo in questo capitolo

$$\mathcal{D} := \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ è infinitamente derivabile, } \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ per cui } \varphi(t) = 0 \text{ se } t \notin [a, b]\}.$$

\mathcal{D} indica quindi l'insieme delle funzioni a supporto compatto ed è dunque un sinonimo di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Gli elementi di \mathcal{D} sono tradizionalmente detti i *test*.

Diremo che una successione (φ_n) di elementi di \mathcal{D} converge a una φ in \mathcal{D} , se esistono a, b (indipendenti da n) tali che tutte le φ_n sono nulle fuori da $[a, b]$ e se per ogni k intero $\varphi_n^{(k)} \rightarrow \varphi^{(k)}$ uniformemente su $[a, b]$. Per indicare tale convergenza scriveremo $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.

7.1.2 Definizione. Chiameremo *distribuzione* una qualunque funzione $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ che sia lineare e continua, cioè tale che

$$u(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 u(\varphi_1) + \lambda_2 u(\varphi_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D};$$

se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, allora $u(\varphi_n) \rightarrow u(\varphi)$ (in \mathbb{C}).

Indicheremo con \mathcal{D}' l'insieme delle distribuzioni e scriveremo (u, φ) in luogo di $u(\varphi)$.

È evidente che \mathcal{D}' è uno spazio vettoriale. Introduciamo una nozione di convergenza anche in \mathcal{D}' : se (u_n) è una successione in \mathcal{D}' e se $u \in \mathcal{D}'$:

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u \text{ se e solo se } (u_n, \varphi) \rightarrow (u, \varphi) \quad \text{per ogni } \varphi \text{ in } \mathcal{D}.$$

Se ricordiamo la suggestione proposta nell'osservazione 4.3.5 possiamo pensare che (u, φ) sia il risultato della misurazione φ sulla distribuzione u . In questo senso le distribuzioni sono una generalizzazione delle funzioni come vedremo tra un momento.

7.1.3 Definizione. Sia f una funzione $L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Definiamo T^f ponendo

$$(T^f, \varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Si può vedere senza grosse difficoltà che $T^f \in \mathcal{D}'$. Inoltre, per il principio di eguaglianza debole, due funzioni f e g di L^1_{loc} sono eguali quasi ovunque (cioè sono lo stesso oggetto di L^1_{loc}) se e solo se $T^f = T^g$.

D'ora in poi possiamo allora *identificare* f e T^f e quindi vedere le funzioni (localmete integrabili) come delle particolari distribuzioni. Quindi scriveremo (per φ in \mathcal{D})

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt \quad \text{se } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{C}).$$

7.1.4 *Osservazione.* Se (f_n) ed f sono funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ tali che $f_n \rightarrow f$ in L^1 allora si deduce facilmente dal teorema della convergenza dominata che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t) dt. \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ciò significa che la convergenza L^1 (e lo stesso vale per tutte le altre convergenze considerate finora) implica la convergenza nel senso delle distribuzioni.

Notiamo che solo le funzioni localmente integrabili sono automaticamente delle distribuzioni. Per esempio la funzione $f(t) = \frac{1}{t}$ non si può pensare come distribuzione (almeno non in modo ovvio) dato che non è integrabile vicino a zero. Tale funzione verrà “recuperata” più avanti.

Vediamo ora un esempio di distribuzione che non è una funzione.

7.1.5 Esempio (delta di Dirac). Introduciamo δ in \mathcal{D}' ponendo

$$(\delta, \varphi) := \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

È facile verificare che δ è effettivamente una distribuzione. Mostriamo che $\delta \neq T^f$ per ogni f in L^1_{loc} . Supponiamo per assurdo che ci sia una tale f . Allora

$$\int_0^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt = \varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty[)$$

(dato che ogni funzione di $\mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty[)$ si può vedere in \mathcal{D} , ponendola 0 per $t < 0$). Ne segue per il principio di eguaglianza debole 4.3.4 che $f(t) = 0$ per quasi ogni $t > 0$. Allo stesso modo si ottiene $f(t) = 0$ per quasi ogni $t < 0$ e dunque dovrebbe essere $f = 0$. Ma questo è chiaramente impossibile dato che, presa una qualunque φ in \mathcal{D} con $\varphi(0) \neq 0$ troveremmo

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt = (f, \varphi) = \varphi(0) \neq 0.$$

Notiamo che δ è limite in \mathcal{D}' della successione (f_n) di funzioni definite da $f_n = n1_{[-1/2n, 1/2n]}$. Infatti per ogni φ in \mathcal{D} :

$$(f_n, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t) dt = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(t) dt \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

(si è applicato il teorema fondamentale del calcolo integrale).

Non è possibile, in generale, pensare al valore di una distribuzione in un punto. Si può però dire se una distribuzione è positiva, negativa o nulla su un intervallo.

7.1.6 Definizione. Sia u in \mathcal{D}' e sia I un sottointervallo aperto di \mathbb{R} (anche illimitato). Diciamo che $u \geq 0$ su I (risp. $u \leq 0$ su I) se

$$(u, \varphi) \geq 0 \quad (\text{risp. } (u, \varphi) \leq 0) \quad \text{per ogni } \varphi \text{ in } \mathcal{D} \text{ con } \varphi = 0 \text{ fuori } I \text{ e } \varphi \geq 0 \text{ in } I.$$

Analogamente diremo che $u = 0$ su I se

$$(u, \varphi) = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \text{ in } \mathcal{D} \text{ con } \varphi = 0 \text{ fuori } I.$$

Queste definizioni “vanno d'accordo” con il caso delle funzioni, dato che una funzione f di L^1_{loc} è nulla su I se e solo se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

(vedi la proposizione 4.3.4).

Analogamente possiamo dire che $u \geq v$, $u \leq v$ e $u = v$ su I se $u - v \geq 0$, $u - v \leq 0$ e $u - v = 0$ su I

Per esempio è facile vedere che la distribuzione δ è nulla sia su $] - \infty, 0[$ che su $]0, +\infty[$ e che $\delta \geq 0$ (ma non è nulla).

Come abbiamo osservato le distribuzioni si possono sommare (\mathcal{D}' è uno spazio lineare) – non è invece possibile, in generale, moltiplicarle tra loro. La moltiplicazione si potrà eseguire solo tra una distribuzione u e una funzione “molto regolare” ψ .

7.1.7 Definizione. Indicheremo nel seguito con \mathcal{E} lo spazio delle funzioni infinitamente derivabili sulla retta (cioè $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). Anche in questo caso possiamo introdurre una nozione di convergenza in \mathcal{E} ponendo:

$$\psi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \psi \quad \text{se e solo se} \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ e } \forall [a, b] \quad \psi_n^{(k)} \rightarrow \psi^{(k)} \text{ uniformemente su } [a, b].$$

Si può notare che $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \psi$ e $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ implica $\psi_n \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi \varphi$ (questo servirebbe per fare le dimostrazioni di varie affermazioni che seguono, che noi peraltro ometteremo).

7.1.8 Definizione (moltiplicazione). Date u in \mathcal{D}' e ψ in \mathcal{E} possiamo definire la distribuzione ψu mediante la formula:

$$(\psi u, \varphi) := (u, \psi \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

È chiaro che la definizione sopra individua una funzione lineare su \mathcal{D} (che, con un po' di pazienza, si dimostra essere continua) e quindi individua un elemento di \mathcal{D}' . Possiamo anche notare che, nel caso in cui u sia una funzione, si ritrova il prodotto in senso tradizionale. Infatti, date $f \in L^1_{loc}$ e ψ in \mathcal{E} :

$$(\psi T^f, \varphi) = (T^f, \psi \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(t) \varphi(t) dt = (T^{\psi f}, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

e quindi $\psi T^f = T^{\psi f}$.

7.1.9 Esempio. Sia $\psi \in \mathcal{E}$. Allora per ogni φ in \mathcal{D} :

$$(\psi \delta, \varphi) = (\delta, \psi \varphi) = \psi(0) \varphi(0) = \psi(0) (\delta, \varphi) = (\psi(0) \delta, \varphi)$$

e cioè $\psi \delta = \psi(0) \delta$. Notiamo che, di conseguenza, $\psi \delta = 0$ se e solo se $\psi(0) = 0$.

7.1.10 Definizione (traslazione). Se $u \in \mathcal{D}'$ e se $t_0 \in \mathbb{R}$ definiamo la traslata u_{t_0} mediante:

$$(u_{t_0}, \varphi) := (u, \varphi_{-t_0}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Anche in questo caso, se $u = T^f$ è una funzione si ritrova la definizione tradizionale, dato che per ogni φ in \mathcal{D} :

$$((T^f)_{t_0}, \varphi) = (T^f, \varphi_{-t_0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t + t_0) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) \varphi(t) dt = (T^{f_{t_0}}, \varphi),$$

cioè $(T^f)_{t_0} = T^{f_{t_0}}$. Spesso per indicare u_{t_0} scriveremo $u(t - t_0)$ anche se ciò non sarebbe lecito, visto che non ha senso prendere il valore di u in qualche punto.

7.1.11 Esempio. Vediamo chi è la traslata della δ . Se $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$(\delta_{t_0}, \varphi) = (\delta, \varphi_{-t_0}) = \varphi_{-t_0}(0) = \varphi(t + t_0)|_{t=0} = \varphi(t_0).$$

7.1.12 Definizione (riflessione). Se $u \in \mathcal{D}'$ definiamo la riflessa u^* di u mediante:

$$(u^*, \varphi) := (u, \varphi^*) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Se $u = T^f$ con f in L^1_{loc} allora per ogni φ in \mathcal{D} si ha:

$$((T^f)^*, \varphi) = (T^f, \varphi^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\varphi(t) dt = (T^{f^*}, \varphi),$$

e quindi $(T^f)^* = T^{f^*}$, cioè si ritrova la definizione tradizionale $f^*(t) := f(-t)$ (sempre modulo l'identificazione tra f e T^f). Anche in questo caso, a volte, indicheremo “impropriamente” u^* con $u(-t)$.

Possiamo anche dire che u è pari se $u^* = u$ e che u è dispari se $u^* = -u$.

7.1.13 Esempio. La distribuzione δ è pari dato che:

$$(\delta^*, \varphi) = (\delta, \varphi^*) = \varphi^*(0) = \varphi(-0) = \varphi(0) = (\delta, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Verifichiamo anche $(\delta_{t_0})^* = \delta_{-t_0}$ (da cui si riottiene che $\delta = \delta_0$ è pari).

Se $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$((\delta_{t_0})^*, \varphi) = (\delta_{t_0}, \varphi^*) = \varphi^*(t_0) = \varphi(-t_0) = (\delta_{-t_0}, \varphi).$$

La riflessione è un caso particolare del riscalamento.

7.1.14 Definizione (riscalamento). Se $u \in \mathcal{D}'$ e se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ definiamo la riscalata $u(at)$ (notazione “impropria”) mediante:

$$(u(at), \varphi) := \frac{1}{|a|} (u, \varphi(t/a)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Se $u = T^f$, $f \in L^1_{loc}$ allora $(T^f)(at) = T^{f(at)}$, infatti per ogni φ in \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} ((T^f)(at), \varphi) &= \frac{1}{|a|} (T^f, \varphi(t/a)) = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t/a) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\varphi(t) dt = (T^{f(at)}, \varphi). \end{aligned}$$

7.1.15 Definizione (coniugazione). Se $u \in \mathcal{D}'$ definiamo la coniugata \bar{u} di u mediante:

$$(\bar{u}, \varphi) := \overline{(u, \bar{\varphi})} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Se $u = T^f$ con f in L^1_{loc} allora per ogni φ in \mathcal{D} si ha:

$$(\overline{(T^f)}, \varphi) = \overline{(T^f, \bar{\varphi})} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{\varphi}(t) dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(t)\varphi(t) dt = (T^{\bar{f}}, \varphi),$$

e quindi $\overline{(T^f)} = T^{\bar{f}}$. Possiamo poi definire $\Re e(u) := \frac{u + \bar{u}}{2}$ e $\Im m(u) := \frac{u - \bar{u}}{2i}$. Allora u è reale se e solo se $\bar{u} = u$ mentre u è immaginaria pura se e solo se $\bar{u} = -u$.

7.1.16 Osservazione. Tutte le definizioni fatte vanno d'accordo con le corrispondenti convergenze. Si potrebbe infatti vedere che:

$$\begin{aligned} u_n \geq 0 \text{ su } I, u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u &\Rightarrow u \geq 0 \text{ su } I && \text{(lo stesso vale per } \leq \text{ e } =) \\ \psi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \psi, u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u &\Rightarrow \psi_n u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \psi u \\ u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u, &\Rightarrow (u_n)_{t_0} \xrightarrow{\mathcal{D}'} u_{t_0} \\ u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u, &\Rightarrow u_n(at) \xrightarrow{\mathcal{D}'} u(at) \\ u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u, &\Rightarrow u_n^* \xrightarrow{\mathcal{D}'} u^* && \text{(caso particolare della riga sopra)} \\ u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u, &\Rightarrow \bar{u}_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \bar{u} \end{aligned}$$

7.2 Derivazione e integrazione nelle distribuzioni

Una proprietà molto utile delle distribuzioni è che esse si possono sempre derivare.

7.2.1 Definizione (derivazione). Sia u in \mathcal{D}' . Definiamo u' ponendo:

$$(u', \varphi) := -(u, \varphi') \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

In generale se $k \in \mathbb{N}$ esiste $u^{(k)}$ definita da:

$$(u^{(k)}, \varphi) := (-1)^k (u, \varphi^{(k)}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Si può verificare facilmente che $u' \in \mathcal{D}'$. Vediamo cosa dice la definizione ora introdotta nel caso delle funzioni. Supponiamo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Allora per ogni φ in \mathcal{D} :

$$((T^f)', \varphi) = -(T^f, \varphi') = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \varphi(t) dt = (T^{f'}, \varphi)$$

(abbiamo integrato per parti e sfruttato il fatto che φ è nulla fuori da un intervallo). Quindi $(T^f)' = T^{f'}$. Questo rimane vero anche se f ha derivata nel senso di L^1_{loc} . Dunque la derivata distribuzionale è un'ulteriore generalizzazione del concetto di derivata.

7.2.2 Esempio. Consideriamo la funzione di Heavyside H . Dato che H è localmente integrabile essa è una distribuzione e possiamo derivarla. Sarà:

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = - [\varphi(t)]_0^{\infty} = \varphi(0)$$

per ogni φ in \mathcal{D} ; quindi $H' = \delta$.

7.2.3 Osservazione. Si vede facilmente che

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u \quad \Rightarrow \quad u' \xrightarrow{\mathcal{D}'} u'$$

e lo stesso vale per le derivate di ordine k qualsiasi.

7.2.4 Esempio. Consideriamo la funzione f definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 1 \\ \frac{3}{16}x^5 - \frac{5}{8}x^3 + \frac{15}{16}x + \frac{1}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Non è difficile verificare che f è \mathcal{C}^2 e che:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \geq 1 \\ \frac{15}{16}x^4 - \frac{15}{8}x^2 + \frac{15}{16} & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \geq 1 \\ \frac{15}{4}x^3 - \frac{15}{4}x & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases}.$$

Se definiamo $f_n(t) := f(nt)$ troviamo che $f'_n(t) = n f'(nt)$ e $f''_n(t) = n^2 f''(nt)$. Dato che $f_n(t) \rightarrow H(t)$ e che $|f_n(t)| \leq 1$, applicando il teorema della convergenza dominata si vede facilmente che $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} H - \frac{1}{2}$. Ne segue che $f'_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$ e $f''_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta'$.

7.2.5 Proposizione (derivata del prodotto). Siano $u \in \mathcal{D}'$ e $\psi \in \mathcal{E}$. Allora $(\psi u)' = \psi' u + \psi u'$

Dimostrazione. Data una qualunque $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$\begin{aligned} (\psi u)', \varphi &= -(\psi u, \varphi') = -(u, \psi \varphi') = -(u, (\psi \varphi)' - \psi' \varphi) = -(u, (\psi \varphi)') + (u, \psi', \varphi) = \\ &= (u', \psi \varphi) + (u, \psi', \varphi) = (\psi u', \varphi) + (\psi' u, \varphi) = (\psi u' + \psi' u, \varphi). \end{aligned}$$

Dato che l'eguaglianza vale per ogni φ abbiamo dimostrato la tesi. \square

7.2.6 Esempio. Prendiamo ψ in \mathcal{E} ; allora:

$$(\psi \delta)' = \psi' \delta + \psi \delta' = \psi'(0) \delta + \psi \delta'.$$

Ma

$$(\psi \delta)' = (\psi(0) \delta)' = \psi(0) \delta',$$

da cui si ottiene:

$$\psi \delta' = \psi(0) \delta' - \psi'(0) \delta.$$

7.2.7 Osservazione. Notiamo che δ e δ' sono linearmente indipendenti, cioè $\lambda_1 \delta + \lambda_2 \delta' = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Infatti se $\lambda_1 \delta + \lambda_2 \delta' = 0$ si ha

$$0 = (\lambda_1 \delta + \lambda_2 \delta', \varphi) = \lambda_1 (\delta, \varphi) - \lambda_2 (\delta, \varphi') = \lambda_1 \varphi(0) - \lambda_2 \varphi'(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Dato che si può facilmente produrre una φ in \mathcal{D} con $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$ si trova $\lambda_1 = 0$. Dato che si trova anche una φ in \mathcal{D} con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = -1$ si trova anche $\lambda_2 = 0$.

Da questo fatto e dalla formula dell'esempio precedente si ricava che $\psi \delta' = 0$ se e solo se $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Si potrebbe vedere in generale che:

$$\psi \delta^{(k)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(0) = \dots = \psi^{(k-1)}(0) = 0. \quad (7.1)$$

7.2.8 Esempio (valore principale di $1/t$). Consideriamo la funzione $f(t) := \ln(|t|)$. È ben noto che tale f è integrabile vicino a zero e quindi $f \in L_{loc}^1$. Possiamo considerarne dunque la derivata, che indichiamo con u . Facciamo vedere che $tu = 1$. Data φ in \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} (tu, \varphi) &= (u, t\varphi) = (f', t\varphi) = -(f, (t\varphi)') = - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(|t|) (t\varphi(t))' dt = \text{(per parti)} \\ &= [\ln(-t)t\varphi(t)]_{-\infty}^0 + [\ln(t)t\varphi(t)]_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} t\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = (1, \varphi), \end{aligned}$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di φ . Abbiamo quindi trovato una distribuzione che è lecito chiamare $\frac{1}{t}$ (anche se, come già detto, non è una vera funzione). Più precisamente la u si scrive come $(v.p.) \frac{1}{t}$ (valore principale di $\frac{1}{t}$) in quanto non è l'unica possibile distribuzione v con $tv = 1$. In effetti se consideriamo $v = u + \lambda \delta$, con λ costante, allora $tv = tu + \lambda t\delta = 1 + \lambda 0\delta = 1$ (utilizzando la formula $\psi \delta = \psi(0) \delta$). Vedremo tra poco che la formula $v = u + \lambda \delta$ individua tutte le distribuzioni v tali che $tv = 1$.

Il nome $(v.p.)\frac{1}{t}$ per la u introdotta sopra è giustificato dal fatto che

$$\begin{aligned} (u, \varphi) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(|t|)\varphi'(t) dt = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(|t|)\varphi'(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(|t|)\varphi'(t) dt \right) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left([\ln(|t|)\varphi(t)]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\varphi(t) dt + [\ln(|t|)\varphi(t)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi'(t) dt \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi'(t) dt \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln(\varepsilon) \left(\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} \right) + (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi'(t) dt = \\ &= 0(\varphi'(0) + \varphi'(0)) + (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi'(t) dt = (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi'(t) dt \end{aligned}$$

(si è usato il fatto ben noto che $\varepsilon \ln(\varepsilon) \rightarrow 0$ se $\varepsilon \rightarrow 0$).

Usando le stesse idee si può definire la distribuzione $\frac{1}{t^k}$ mediante

$$\frac{1}{t^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d}{dt^k} \ln(|t|)$$

Anche in questo caso si verifica che $t^k \frac{1}{t^k} = 1$ (ma non è l'unica distribuzione con tale proprietà – si veda più avanti per la discussione di quali siano le distribuzioni v che verificano $t^k v = 1$).

7.2.9 Proposizione. *Sia k intero. Allora*

$$u \in \mathcal{D}', \quad t^k u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \delta^{(j)} \quad \text{per } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}. \quad (7.2)$$

Cenno di dimostrazione. Se $\psi(t) = t^k$ allora $\psi(0) = \dots = \psi^{(k-1)}(0) = 0$ e per la (7.1) $\psi \delta^{(j)} = 0$, $j = 0, \dots, k-1$. Se u è una combinazione lineare delle $\delta^{(j)} = 0$, $j = 0, \dots, k-1$ si ottiene per linearità che $\psi u = 0$.

Vediamo il viceversa nel caso $k = 1$. Dobbiamo mostrare che se $tu = 0$ necessariamente esiste λ in \mathbb{C} per cui $u = \lambda \delta$. Fissiamo una qualunque η in \mathcal{D} con la proprietà $\eta(0) = 1$. Prendiamo poi una φ generica in \mathcal{D} e osserviamo che la funzione

$$\psi(t) := \frac{\varphi(t) - \varphi(0)\eta(t)}{t}, \quad \text{per } t \neq 0; \quad \psi(0) := \varphi'(0) - \varphi(0)\eta'(0)$$

è in \mathcal{D} . Allora

$$(u, \varphi) = (u, \varphi - \varphi(0)\eta + \varphi(0)\eta) = (u, t\psi) + \varphi(0)(u, \eta) = (tu, \psi) + (\delta, \varphi)(u, \eta) = (\lambda\delta, \varphi)$$

dove $\lambda = (u, \eta)$. Dato che φ è arbitraria se ne ricava $u = \lambda\delta$. Con metodi simili si dimostra anche il caso $k > 1$. \square

La proposizione precedente si può generalizzare nel modo che segue.

7.2.10 Proposizione. *Sia P un polinomio e siano x_1, \dots, x_k le sue radici reali, di molteplicità m_1, \dots, m_k . Allora*

$$u \in \mathcal{D}', \quad P(t)u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \sum_{h=1}^k \sum_{j=0}^{m_h-1} \lambda_{hj} \delta_{x_h}^{(j)} \quad \text{per } \lambda_{hj} \in \mathbb{C}. \quad (7.3)$$

7.2.11 Esempio. Le distribuzioni u tali che $(t^4 - 1)^2 u = 0$ sono tutte sole della forma

$$u = \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta'_1 + \lambda_3 \delta_{-1} + \lambda_4 \delta'_{-1}$$

al variare di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ in \mathbb{C} . Ciò segue dalla proposizione precedente dato che $P(t) = (t^4 - 1)^2 = (t - 1)^2 (t + 1)^2 (t^2 + 1)^2$ ha come radici reali 1 e -1 , di molteplicità due.

Dalla proposizione precedente si ricava con ragionamenti standard un analogo enunciato per il caso *non omogeneo*.

7.2.12 Proposizione. Sia P un polinomio e siano x_1, \dots, x_k le sue radici reali, di molteplicità m_1, \dots, m_k . Sia w una distribuzione e supponiamo che u_0 in \mathcal{D}' sia tale che $P(t)u_0 = w$. Allora

$$u \in \mathcal{D}', P(t)u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = u_0 + \sum_{h=1}^k \sum_{j=0}^{m_h-1} \lambda_{hj} \delta_{x_h}^{(j)} \quad \text{per } \lambda_{hj} \in \mathbb{C}. \quad (7.4)$$

Dimostrazione. Se $P(t)u = w$, allora è chiaro che $P(t)(u - u_0) = 0$ e quindi per la (7.3) $u - u_0 = \sum_{h=1}^k \sum_{j=0}^{m_h-1} \lambda_{hj} \delta_{x_h}^{(j)}$. Viceversa se $u = u_0 + \sum_{h=1}^k \sum_{j=0}^{m_h-1} \lambda_{hj} \delta_{x_h}^{(j)}$ moltiplicando per $P(t)$ si ottiene $P(t)u = P(t)u_0 + 0 = w$. \square

7.2.13 Proposizione (primitive). Sia w in \mathcal{D}' . Allora esiste u in \mathcal{D}' tale che $u' = w$, cioè esiste una primitiva di w . Inoltre se u e u_0 hanno entrambe derivata eguale a w , allora $u - u_0$ è costante.

Dimostrazione. Sia $\eta \in \mathcal{D}$ fissata con la condizione che $(1, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(t) dt = 1$. Data φ in \mathcal{D} definiamo la funzione $I(\varphi)$ mediante:

$$I(\varphi)(t) = \int_{-\infty}^t (\varphi(s) - (1, \varphi)\eta) ds.$$

Notiamo che la derivata di $I(\varphi)$ è $\varphi - (1, \varphi)\eta$, mentre $I(\varphi')(t) = \varphi(t) - \int_{-\infty}^t (1, \varphi')\eta(s) dt = \varphi(t)$, dato che $(1, \varphi') = -(1', \varphi) = -(0, \varphi) = 0$.

In particolare $I(\varphi)$ è infinitamente derivabile; inoltre se $[a, b]$ è un intervallo tale che φ ed η sono entrambe nulle fuori $[a, b]$, allora per $t < a$

$$I(\varphi)(t) = \int_{-\infty}^t (\varphi(s) - (1, \varphi)\eta) ds = \int_{-\infty}^t 0 ds = 0$$

mentre per $t > b$

$$\begin{aligned} I(\varphi)(t) &= \int_{-\infty}^t (\varphi(s) - (1, \varphi)\eta) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(s) - (1, \varphi)\eta) ds = \\ &= (1, \varphi - (1, \varphi)\eta) = (1, \varphi) - (1, \varphi)(1, \eta) = (1, \varphi) - (1, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

In definitiva $I(\varphi) \in \mathcal{D}$. È immediato che $I(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 I(\varphi_1) + \lambda_2 I(\varphi_2)$ e con un po' di pazienza si verifica che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow I(\varphi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} I(\varphi)$. Dunque ha senso definire

$$(u, \varphi) := -(w, I(\varphi)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Vediamo che $u' = w$. Infatti per ogni φ in \mathcal{D} :

$$(u', \varphi) = -(u, \varphi') = (w, I(\varphi')) = -(w, \varphi).$$

Per dimostrare la seconda affermazione basta far vedere che $u' = 0 \Rightarrow u$ costante. Infatti per ogni φ in \mathcal{D} :

$$0 = (u', I(\varphi)) = -(u, I(\varphi)') = -(u, \varphi - (1, \varphi)\eta) = -(u, \varphi) + (1, \varphi)(u, \eta) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Quindi per ogni φ in \mathcal{D} :

$$(u, \varphi) = ((u, \eta), \varphi)$$

cioè $u = (u, \eta)$. □

7.2.14 Teorema (equazioni differenziali lineari del primo ordine). *Siano a in \mathcal{E} e w in \mathcal{D}' . Allora l'equazione differenziale*

$$y' = ay + w \quad y \in \mathcal{D}'$$

ha soluzione e le soluzioni y sono tutte e sole quelle individuate dalla formula:

$$y = e^{A(t)} (\lambda + W) \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

dove $A \in \mathcal{E}$ è una primitiva di a e W è una primitiva di $e^{-A(t)}w$ (che esiste per la proposizione precedente). In sostanza vale la formula solita

$$y(t) = e^{A(t)} \left(\lambda + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} w(s) ds \right) \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{dove } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

pur di intenderla in maniera corretta, dato che w e y sono distribuzioni.

Dimostrazione. Verifichiamo che la y indicata sopra è effettivamente una soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} y' &= [e^{A(t)} (\lambda + W)]' = A'(t)e^{A(t)} (\lambda + W) + e^{A(t)} (\lambda + W)' = \\ &= a(t)e^{A(t)} (\lambda + W) + e^{A(t)} W' = a(t)y + e^{A(t)} e^{-A(t)} w = ay + w. \end{aligned}$$

Viceversa, se vale l'equazione, moltiplicando entrambi i termini per $e^{-A(t)}$ si ha:

$$y' - ay = w \Leftrightarrow e^{-A(t)}(y' - ay) = e^{-A(t)}w \Leftrightarrow (e^{-A(t)}y)' = e^{-A(t)}w.$$

Quindi se W è una primitiva di $e^{-A(t)}w$ si deduce che esiste una costante λ in \mathbb{C} per cui

$$e^{-A(t)}y = W + \lambda \Leftrightarrow y = e^{A(t)}(\lambda + W).$$

□

Il risultato precedente si può generalizzare al caso dei sistemi di equazioni del primo ordine. Non diamo la dimostrazione, che peraltro non è difficile e riproduce quasi esattamente quella del caso unidimensionale (una volta note le proprietà dell'esponenziale di una matrice).

7.2.15 Teorema (sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine). *Sia N intero e per $j, k = 1, \dots, N$ siano a_{jk} delle funzioni di \mathcal{E} . Siano inoltre w_1, \dots, w_N in \mathcal{D}' . Consideriamo il problema di trovare y_1, \dots, y_N in \mathcal{D}' che risolvono il sistema*

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1N}y_N + w_1 \\ \vdots & \\ y_N' &= a_{N1}y_1 + \dots + a_{NN}y_N + w_N \end{cases}$$

Se indichiamo con y il vettore degli y_j , con a la matrice degli a_{jk} e con w il vettore dei w_j il sistema si può scrivere esattamente come nel caso unidimensionale:

$$y' = ay + w.$$

Allora il sistema ha sempre soluzione e la famiglia delle soluzioni è descritta da

$$y = e^{-A(t)}(\lambda + W) \quad \lambda \in \mathbb{C}^N$$

dove $A \in \mathcal{E}$ è una (matrice) primitiva di a e W è una primitiva (vettoriale) di $e^{-A(t)}w$ e dove si è utilizzato l'esponenziale di una matrice introdotto a suo tempo. Anche ora possiamo scrivere la formula in maniera più espressiva (anche se meno rigorosa):

$$y(t) = e^{A(t)} \left(\lambda + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} w(s) ds \right) \quad \lambda \in \mathbb{C}^N \quad \text{dove } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

Quindi in questo caso l'insieme delle soluzioni è uno spazio affine di dimensione N .

Il risultato precedente ha come ricaduta la risolubilità delle equazioni (o sistemi) lineari di ordine N ; è infatti standard la possibilità di ricondurre un'equazione differenziale di ordine N a un sistema di N equazioni differenziali di ordine 1.

7.2.16 Teorema (equazioni differenziali lineari di ordine N). *Se a_0, a_1, \dots, a_N sono in \mathcal{E} , $a_N \neq 0$ e se $w \in \mathcal{D}'$, allora l'equazione:*

$$a_N y^{(N)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = w$$

ammette soluzione e la famiglia di tutte le sue soluzioni forma uno spazio affine di dimensione N . Più precisamente se \bar{y} è una soluzione dell'equazione allora la famiglia di tutte le soluzioni è data da

$$y = \bar{y} + y_0$$

al variare di y_0 fra tutte le soluzioni dell'equazione omogenea:

$$a_N y^{(N)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

che formano uno spazio lineare di dimensione (quest'ultima affermazione è nota dalla teoria classica delle equazioni lineari, dato che l'equazione omogenea non coinvolge distribuzioni ma solo funzioni, per giunta ultraregolari).

7.3 Distribuzioni temperate e trasformata di Fourier

7.3.1 Definizione. Definiamo lo spazio delle funzioni *rapidamente decrescenti* \mathcal{S} mediante

$$\mathcal{S} := \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : \forall h, k \text{ interi } t^h \varphi^{(k)}(t) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow \pm\infty \}.$$

Diremo che (φ_n) converge a φ in \mathcal{S} , e scriveremo $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, se

$$\forall h, k \text{ interi } t^h \varphi_n^{(k)}(t) \rightarrow t^h \varphi^{(k)}(t) \quad \text{uniformemente su } \mathbb{R}.$$

Non è difficile verificare che $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ e che:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi.$$

Definiamo lo spazio \mathcal{S}' delle *distribuzioni temperate* come l'insieme delle funzioni lineari e continue su \mathcal{S} : $u \in \mathcal{S}'$ significa dunque che $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ lineare e che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow$

$u(\varphi_n) \rightarrow u(\varphi)$. Come al solito scriveremo (u, φ) in luogo di $u(\varphi)$. Dunque le distribuzioni temperate formano un sottoinsieme di \mathcal{D}' , e sono individuate dal fatto di poter essere “misurate” non solo dalle φ di \mathcal{D} , ma anche dalle φ di \mathcal{S} .

Possiamo introdurre una convergenza anche in \mathcal{S}' ponendo

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} u \Leftrightarrow (u_n, \varphi) \rightarrow (u, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Non è difficile verificare che

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}', \quad \text{e} \quad u_n \xrightarrow{\mathcal{E}'} u \Rightarrow u_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} u \Rightarrow u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u.$$

Vediamo alcune proprietà delle distribuzioni temperate.

7.3.2 Proposizione. 1. Se $f \in L^1_{loc}$ e se esistono M, R ed n tali che

$$|f(t)| \leq M|t|^n \quad \text{per } |t| \geq R$$

(f ha “crescita polinomiale”) allora $f \in \mathcal{S}'$. Non è invece vero che $L^1_{loc} \subset \mathcal{S}'$, per esempio $f(t) = e^t$ non è una distribuzione temperata.

2. Se $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, oppure se $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, allora $f \in \mathcal{S}'$.

3. Se $u \in \mathcal{S}'$, allora $t^h u \in \mathcal{S}'$ per ogni h intero. Quindi se $u \in \mathcal{S}'$ si ha che $P(t)u \in \mathcal{S}'$ per ogni polinomio.

4. Se $u \in \mathcal{S}'$, allora $u^{(k)} \in \mathcal{S}'$ per ogni k intero.

7.3.3 Esempio. La funzione H di Heavyside, essendo localmente integrabile e limitata, è una distribuzione temperata. Ne segue che δ è una distribuzione temperata (e anche tutte le sue derivate).

La funzione $f(t) = \ln(|t|)$ è in \mathcal{S}' . Infatti essa è in L^1_{loc} e, come ben noto, cresce più lentamente di qualunque polinomio. Di conseguenza la sua derivata, che è (v.p.) $\frac{1}{t}$, appartiene \mathcal{S}' . Stesso discorso per tutte le derivate di f , che sono $\frac{1}{t^h}$.

Per le distribuzioni temperate ha senso fare la trasformata di Fourier \mathcal{F} . Cominciamo coll'osservare che \mathcal{F} si comporta bene in \mathcal{S} .

7.3.4 Proposizione. Se $\varphi \in \mathcal{S}$, allora $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ e si ha $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}$.

7.3.5 Definizione. Sia u in \mathcal{S}' . Allora possiamo definire la trasformata di Fourier di u , che indichiamo con \hat{u} o con $\mathcal{F}(u)$, mediante:

$$(\hat{u}, \varphi) := (u, \hat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Questa è una buona definizione e definisce una \hat{u} in \mathcal{S}' a causa della proposizione precedente.

Confrontiamo la definizione ora introdotta con quella tradizionale.

7.3.6 Esempio. Supponiamo che f sia in $L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$(\hat{f}, \varphi) = (f, \hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{\varphi}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\varphi(t) dt = (\hat{f}, \varphi)$$

(abbiamo usato la formula (6.4)). Questo significa che $\widehat{T^f} = T^{\hat{f}}$, cioè la trasformata definita ora coincide con quella solita (a patto di identificare, come sempre, f con T^f).

7.3.7 Esempio. Si ha

$$(\hat{\delta}, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = (1, \varphi)$$

e quindi $\hat{\delta} = 1$.

Le proprietà della trasformata che erano state trovate a suo tempo in L^1 e in L^2 si trasferiscono immediatamente a \mathcal{S}' .

7.3.8 Proposizione. *Sia u in \mathcal{S}' . Allora valgono i fatti seguenti.*

1. Per ogni intero n :

$$\hat{u}^{(n)} = \mathcal{F}(u)^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}(t^n u(t)).$$

2. Per ogni intero n :

$$\mathcal{F}(u^{(n)}) = i^n \omega^n \mathcal{F}(u) = i^n \omega^n \hat{u}.$$

3. Se $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(u_{t_0}) = e^{-it_0\omega} \mathcal{F}(u) = e^{-it_0\omega} \hat{u}.$$

4. Se $\omega_0 \in \mathbb{R}$:

$$(\hat{u})_{\omega_0} = \mathcal{F}(u)_{\omega_0} = \mathcal{F}(e^{i\omega_0 t} u(t)).$$

5. Se $a \neq 0$:

$$\mathcal{F}(u(at)) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(u) \left(\frac{\omega}{a} \right) = \frac{1}{|a|} \hat{u} \left(\frac{\omega}{a} \right),$$

da cui segue in particolare $\mathcal{F}(u^*) = \mathcal{F}(u)^*$.

6. Si ha:

$$\mathcal{F}(\bar{u}) = \overline{\mathcal{F}(u)^*} = \overline{\mathcal{F}(u^*)}.$$

7. Si ha:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(u)) = 2\pi u^*.$$

Dimostrazione. Prendiamo φ in \mathcal{S} . Allora applicando le varie proprietà della trasformata su φ (vedi la proposizione 6.1.5) si trova quanto segue. Si noti che usiamo la convenzione di chiamare t la variabile indipendente quando appare insieme alla funzione e ω quando appare insieme alla trasformata.

1. Si ha

$$((\hat{u})', \varphi) = -(\hat{u}, \varphi') = -(u, \widehat{\varphi}') = -(u, i\omega \widehat{\varphi}) = (-itu, \widehat{\varphi}) = (-i\widehat{t}u, \varphi)$$

e quindi, essendo φ arbitraria, $(\hat{u})' = -i\widehat{t}u$. Iterando si trova il caso generale.

2. Si ha

$$(\widehat{u}', \varphi) = (u', \widehat{\varphi}) = -(u, (\widehat{\varphi})') = -(u, -it\widehat{\varphi}) = (i\widehat{t}u, \varphi) = (i\omega \widehat{t}u, \varphi)$$

e quindi, essendo φ arbitraria, $\widehat{u}' = i\omega \widehat{t}u$. Iterando si trova il caso generale.

3. Si ha

$$(\widehat{u}_{t_0}, \varphi) = (u_{t_0}, \widehat{\varphi}) = (u, (\widehat{\varphi})_{-t_0}) = (u, \widehat{e^{-it_0 t} \varphi}) = (\widehat{u}, e^{-it_0 t} \varphi) = (e^{-it_0 \omega} \widehat{u}, \varphi)$$

e quindi, essendo φ arbitraria, $\widehat{u}_{t_0} = e^{-it_0 \omega} \widehat{u}$.

4. Si ha

$$(\widehat{e^{i\omega_0 t} u}, \varphi) = (e^{i\omega_0 t} u, \hat{\varphi}) = (u, e^{i\omega_0 t} \hat{\varphi}) = (u, \widehat{\varphi_{-\omega_0}}) = (\hat{u}, \varphi_{-\omega_0}) = ((\hat{u})_{\omega_0}, \varphi)$$

e quindi, essendo φ arbitraria, $\widehat{e^{i\omega_0 t} u} = (\hat{u})_{\omega_0}$.

5. Si ha

$$(\widehat{u(at)}, \varphi) = (u(at), \hat{\varphi}) = \frac{1}{|a|} (u, \hat{\varphi}(\omega/a)) = (u, \widehat{\varphi(at)}) = (\hat{u}, \varphi(at)) = \frac{1}{|a|} (\hat{u}(\omega/a), \varphi)$$

e quindi, essendo φ arbitraria, $\widehat{u(at)} = \frac{1}{|a|} \hat{u}(\frac{\omega}{a})$.

6. Si ha:

$$(\widehat{\hat{u}}, \varphi) = (\bar{u}, \hat{\varphi}) = \overline{(u, \hat{\varphi})} = \overline{(u, \widehat{\varphi^*})} = \overline{(\hat{u}, \varphi^*)} = (\bar{\hat{u}}, \varphi^*) = (\widehat{\hat{u}^*}, \varphi) = (\widehat{\hat{u}^*}, \varphi)$$

e quindi, essendo φ arbitraria, $\widehat{\hat{u}} = \bar{\hat{u}^*} = \widehat{\hat{u}^*}$.

7. Si ha:

$$(\widehat{\hat{u}}, \varphi) = (\hat{u}, \hat{\varphi}) = (u, \widehat{\hat{\varphi}}) = (u, 2\pi\varphi^*) = (2\pi u^*, \varphi)$$

e quindi, essendo φ arbitraria, $\widehat{\hat{u}} = 2\pi u^*$.

□

Dalle proprietà scritte sopra si deducono immediatamente i fatti seguenti.

7.3.9 Osservazione. Se u in \mathcal{S}' , allora si ha che:

- u è pari se e solo se \hat{u} è pari;
- u è dispari se e solo se \hat{u} è dispari;
- u è reale se e solo se $\hat{u}^* = \bar{\hat{u}} \hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$;
- u è reale pari se e solo se \hat{u} è reale pari;
- u è reale dispari se e solo se \hat{u} è immaginaria pura dispari.

7.3.10 Esempio. Come abbiamo già visto $\hat{\delta} = 1$. Più in generale, applicando la formula sulla translazione abbiamo:

$$\mathcal{F}(\delta_{t_0}) = e^{-it_0\omega} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

e anche:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\delta_{-t_0} + \delta_{t_0}}{2}\right) = \cos(t_0\omega), \quad \mathcal{F}\left(\frac{\delta_{-t_0} - \delta_{t_0}}{2i}\right) = \sin(t_0\omega) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

7.3.11 Esempio. Applicando la (7) della proposizione 7.3.8 agli esempi precedenti si trova:

$$\mathcal{F}(e^{\omega_0 t}) = 2\pi\delta_{\omega_0} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

(ricordando che $(\delta_{t_0})^* = \delta_{-t_0}$) e

$$\mathcal{F}(\cos(\omega_0 t)) = \pi(\delta_{t_0} + \delta_{-t_0}), \quad \mathcal{F}(\sin(\omega_0 t)) = -i\pi(\delta_{t_0} - \delta_{-t_0}) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

7.3.12 Esempio. Prendiamo $u = (v.p.)\frac{1}{t}$. Allora $tu = 1$. Passando alla trasformata:

$$\mathcal{F}(tu) = 2\pi\delta \Leftrightarrow i(\hat{u})' = 2\pi\delta \Leftrightarrow i\hat{u} = 2\pi H + c$$

per una opportuna costante c (al solito H è la funzione di Heavyside). Dato però che u è dispari dobbiamo fare in modo che \hat{u} sia dispari e questo è possibile se e solo se $c = -\pi$, di modo che si ottiene

$$\mathcal{F}\left((v.p.)\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{i}(2\pi H - \pi) = -i\pi\text{sgn}(\omega).$$

7.3.13 Esempio. Applicando volta \mathcal{F} alla formula precedente si ottiene $2\pi((v.p.)\frac{1}{\omega})^* = \mathcal{F}(-i\pi\text{sgn}(t))$, cioè:

$$\mathcal{F}(\text{sgn}(t)) = -2i(v.p.)\frac{1}{\omega}.$$

Un altro modo di ricavare l'ultima formula è di usare che, se $v = \text{sgn}(t)$, allora $v' = 2\delta$. Trasformando:

$$\mathcal{F}(v') = 2 \Leftrightarrow i\omega\hat{v} = 2 \Leftrightarrow \hat{v} = -2i(v.p.)\frac{1}{\omega} + c\delta$$

per un'opportuna costante c . Ma dato che \hat{v} deve essere dispari, bisogna che $c = 0$.

7.3.14 Esempio. Le formule precedenti si possono generalizzare usando le proprietà delle traslazioni. Dalla prima delle due si ricava:

$$\mathcal{F}\left((v.p.)\frac{e^{i\omega_0 t}}{t - t_0}\right) = -i\pi e^{-it_0(\omega - \omega_0)}\text{sgn}(\omega - \omega_0),$$

da cui anche:

$$\mathcal{F}\left((v.p.)\frac{\cos(\omega_0 t)}{t - t_0}\right) = -i\frac{\pi}{2}e^{-it_0\omega} (e^{it_0\omega_0}\text{sgn}(\omega - \omega_0) + e^{-it_0\omega_0}\text{sgn}(\omega + \omega_0))$$

Se per esempio $t_0 = 0$, dato che $\text{sgn}(\omega - \omega_0) + \text{sgn}(\omega + \omega_0) = 2 \cdot 1_{\mathbb{R} \setminus [-\omega_0, \omega_0]}$

$$\mathcal{F}\left((v.p.)\frac{\cos(\omega_0 t)}{t}\right) = -i\pi 1_{]-\infty, -\omega_0] \cup [\omega_0, +\infty[}.$$

Analogamente

$$\mathcal{F}\left((v.p.)\frac{\sin(\omega_0 t)}{t - t_0}\right) = -\frac{\pi}{2}e^{-it_0\omega} (e^{it_0\omega_0}\text{sgn}(\omega - \omega_0) - e^{-it_0\omega_0}\text{sgn}(\omega + \omega_0))$$

e se $t_0 = 0$ (dato che $\text{sgn}(\omega - \omega_0) - \text{sgn}(\omega + \omega_0) = -2 \cdot 1_{[\omega_0, \omega_0]}$):

$$\mathcal{F}\left((v.p.)\frac{\sin(\omega_0 t)}{t}\right) = \pi 1_{[-\omega_0, \omega_0]}.$$

Quest'ultimo risultato peraltro non richiede di parlare di distribuzioni in quanto $\frac{\sin(\omega_0 t)}{t}$ è una funzione L^2 .

Dalla seconda formula si ricava invece

$$\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t}\text{sgn}(t - t_0)) = -2ie^{-it_0(\omega - \omega_0)}(v.p.)\frac{1}{\omega - \omega_0}.$$

da cui:

$$\mathcal{F}(\cos(\omega_0 t)\text{sgn}(t - t_0)) = -ie^{-it_0\omega} \left(e^{it_0\omega_0}(v.p.)\frac{1}{\omega - \omega_0} + e^{-it_0\omega_0}(v.p.)\frac{1}{\omega + \omega_0} \right).$$

e

$$\mathcal{F}(\sin(\omega_0 t) \operatorname{sgn}(t - t_0)) = -e^{-it_0\omega} \left(e^{it_0\omega_0} (v.p.) \frac{1}{\omega - \omega_0} - e^{-it_0\omega_0} (v.p.) \frac{1}{\omega + \omega_0} \right).$$

che nel caso di $t_0 = 0$ danno:

$$\mathcal{F}(\cos(\omega_0 t) \operatorname{sgn}(t)) = -\frac{2\omega i}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \mathcal{F}(\sin(\omega_0 t) \operatorname{sgn}(t)) = -\frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

7.3.15 Esempio. Dai calcoli fatti negli esempi precedenti si ricava:

$$\mathcal{F}(H) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{2}\right) = -i(v.p.) \frac{1}{\omega} + \pi\delta.$$

7.3.16 Proposizione. Sia $T > 0$. Diciamo che una distribuzione u è T -periodica se $u_T = u$. Se $u \in \mathcal{S}'$ è T -periodica allora, posto $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$, si ha

$$\hat{u} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^* \delta_{k\omega_0}$$

per una opportuna successione $(c_k^*)_{k \in \mathbb{Z}}$ di numeri complessi. Notiamo che la distribuzione scritta sopra è definita da

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^* \delta_{k\omega_0}, \varphi \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^* \varphi(k\omega_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

che ha senso, dato che le φ di \mathcal{S} vanno a zero molto rapidamente.

Se poi la $u = f$ è una funzione di $L^2_{per}(T)$ allora i coefficienti c_k^* sono dati da

$$c_k^* = \frac{2\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt = 2\pi c_k$$

(intendendo con $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ i “vecchi” coefficienti di Fourier di f).

Cenno di dimostrazione. Applicando la trasformata alla relazione $u_T = u$ si ha

$$\widehat{u}_T = \hat{u} \Leftrightarrow e^{-iT\omega} \hat{u} = \hat{u} \Leftrightarrow (e^{-iT\omega} - 1) \hat{u} = 0.$$

Dato che $\psi(\omega) := (e^{-iT\omega} - 1)$ si annulla nei multipli interi di ω_0 , che sono tutti zeri semplici, ne segue $\hat{u} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^* \delta_{\omega_0 k}$ per c_k^* in \mathbb{C} (per motivi analoghi a quanto visto nella proposizione 7.2.10). Supponiamo ora che $u = f$ con f in $L^2_{per}(T)$. Allora per definizione di trasformata, per ogni φ in \mathcal{S} si deve avere:

$$(f, \hat{\varphi}) = (\hat{f}, \varphi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^* \delta_{\omega_0 k}, \varphi \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^* (\delta_{\omega_0 k}, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \varphi(\omega_0 k). \quad (7.5)$$

Consideriamo, per h in \mathbb{Z} fissato:

$$\varphi(\omega) := \frac{2}{T} \frac{\sin\left(\frac{T(\omega - h\omega_0)}{2}\right)}{\omega - h\omega_0} = \frac{2 \sin\left(\frac{(T\omega - 2h\pi)}{2}\right)}{T\omega - 2h\pi}, \quad \varphi(0) = 1,$$

che ha come trasformata (vedi gli esempi precedenti, o il metodo dei residui)

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{2\pi}{T} e^{-ih\omega_0 t} 1_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$$

Se si calcola $\varphi(k\omega_0)$ per k in \mathbb{Z} si trova

$$\varphi(h\omega_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h, \\ 1 & \text{se } k = h. \end{cases}$$

A rigore non potremmo usare questa φ come test, dato che $\varphi \notin \mathcal{S}$; però, con un opportuno procedimento di approssimazione, alla fine si può mettere φ in (7.5) e si trova allora:

$$\frac{2\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ih\omega_0 t} dt = (f, \hat{\varphi}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^*(\delta_{\omega_0 k}, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^* \varphi(\omega_0 k) = c_h^* \varphi(h\omega_0) = c_h^*.$$

□

7.3.17 Esempio. Se $T > 0$ e $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ si ha

$$\mathcal{F} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nL} \right) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{n\omega_0}.$$

Infatti usando la relazione (7.5) si trova in questo caso

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(kL) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^* \varphi(k\omega_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

e usando la stessa φ della dimostrazione scritta sopra, si ottiene (per ogni h in \mathbb{Z})

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \hat{\varphi}(0) = c_h^* \varphi(h\omega_0) = c_h^*.$$

Questi discorsi suggeriscono che, data una distribuzione temperata T -periodica, se ne può considerare la serie di Fourier, o più precisamente i *coefficienti di Fourier* definiti da $c_k := \frac{c_k^*}{2\pi}$, dove c_k^* sono i numeri trovati sopra.

7.4 Distribuzioni a supporto limitato, a supporto destro e trasformata di Laplace

7.4.1 Definizione. Sia u in \mathcal{D}' . Diremo che u è a *supporto limitato* (o a supporto compatto) se esiste un intervallo $[a, b]$ fuori dal quale $u = 0$.

Vediamo una caratterizzazione importante delle distribuzioni a supporto limitato.

7.4.2 Teorema. *Se u ha supporto limitato allora (u, φ) si può estendere a tutte le φ in \mathcal{E} in modo che*

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi \Rightarrow (u, \varphi_n) \rightarrow (u, \varphi).$$

In altri termini u si può estendere ad una funzione lineare e continua su \mathcal{E} .

Viceversa se $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ è lineare e continua, allora u è una distribuzione a supporto limitato.

Cenno di dimostrazione. Mettiamo innanzitutto in evidenza che se $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ è lineare e continua allora u è una distribuzione in quanto u si può calcolare in particolare su ogni φ in \mathcal{D} ($\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$) e u è continua su \mathcal{D} perché se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ si ha $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$, da cui (per ipotesi) $u(\varphi_n) \rightarrow u(\varphi)$. Peraltro, chiedendo di poter calcolare (u, φ) su un insieme più grande di

test, si rimpicciolisce lo spazio delle distribuzioni ammissibili (vedremo più avanti altri esempi in questo senso) – l'affermazione che si vuole provare è che distribuzioni “più regolari”, che si possono calcolare anche su \mathcal{E} , sono tutte e sole quelle a supporto limitato.

Cominciamo prendendo u in \mathcal{D}' che sia nulla fuori da un certo $[a, b]$. Si può vedere che è possibile definire una funzione η in \mathcal{D} che faccia 1 su $[a, b]$ (e diventi ovviamente zero fuori da un altro intervallo $[a', b']$ contenente $[a, b]$). Allora per ogni φ in \mathcal{E} si può definire $(v, \varphi) := (u, \eta\varphi)$ (dato che $\eta\varphi \in \mathcal{D}$). Con un po' di pazienza si verifica che v è lineare e continua su \mathcal{E} . Verifichiamo che essa coincide con u sulle φ di \mathcal{D} . Infatti se $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha $(v, \varphi) = (u, \eta\varphi) = (u, \varphi - (1 - \eta)\varphi) = (u, \varphi) - (u, (1 - \eta)\varphi) = (u, \varphi)$ perché $u = 0$ fuori $[a, b]$ e $(1 - \eta)\varphi = 0$ in $[a, b]$.

Per dimostrare il viceversa si può far vedere che se una distribuzione u non ha supporto limitato allora c'è una successione (φ_n) di test tutti tra loro a supporto disgiunto, tali che $(u, \varphi_n) = 1$. Ma allora si può definire $\psi(t) = \sum_n \varphi_n(t)$ (tanto t per t c'è al più una φ_n con $\varphi_n(t) \neq 0$). Allora tale ψ è in \mathcal{E} ma si vede facilmente che si avrebbe $(u, \psi) = +\infty$ e quindi u non si può calcolare su tale ψ . \square

7.4.3 Definizione. In virtù del teorema precedente le distribuzioni a supporto limitato si possono indicare, coerentemente con le notazioni che abbiamo usato finora, con il simbolo \mathcal{E}' . Per tali distribuzioni il simbolo (u, φ) si può considerare per qualunque test in \mathcal{E} e si ha $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi \Rightarrow (u, \varphi_n) \rightarrow (u, \varphi)$.

Le distribuzioni a supporto limitato hanno trasformata di Fourier regolare. Vale infatti il seguente risultato.

7.4.4 Proposizione. Sia $u \in \mathcal{E}'$. Allora la trasformata \hat{u} è una funzione in \mathcal{E} e vale

$$\hat{u}(\omega) = (u(t), e^{-i\omega t}) = (u, \psi_\omega) \quad \text{dove } \varphi_\omega(t) := e^{-i\omega t}$$

(che ha senso dato che, per ogni ω , ψ_ω è in \mathcal{E} e u è in \mathcal{E}').

Passiamo ora considerare oggetti con supporto in una semiretta.

7.4.5 Definizione. Poniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+ &:= \{\varphi \in \mathcal{E} : \exists T \text{ per cui } \varphi(t) = 0 \text{ se } t < T\}, \\ \mathcal{E}^- &:= \{\varphi \in \mathcal{E} : \exists T \text{ per cui } \varphi(t) = 0 \text{ se } t > T\}. \end{aligned}$$

Possiamo anche introdurre delle convergenze dicendo che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}^+} \varphi$ ($\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}^-} \varphi$) se esiste un T tale che $\varphi_n(t) = 0$ per $t > T$ ($T < T$) e per ogni n e se per ogni k $\varphi_n^{(k)} \rightarrow \varphi^{(k)}$ uniformemente.

7.4.6 Definizione. Sia u in \mathcal{D}' . Diremo che u è a supporto destro (risp. sinistro) se esiste un T tale che $u = 0$ su $] - \infty, T[$ (risp. su $]T, +\infty[$). Indicheremo con \mathcal{D}'_+ l'insieme delle distribuzioni a supporto destro e con \mathcal{D}'_- l'insieme delle distribuzioni a supporto sinistro.

È intuitivo ritenere che le distribuzioni a supporto destro (risp. sinistro) si possano testare su tutte le funzioni di \mathcal{E}^- (risp. \mathcal{E}^+). In effetti vale il risultato che segue.

7.4.7 Teorema. $u \in \mathcal{D}'_+$ se e solo se (u, φ) si può estendere a una funzione lineare e continua su tutto \mathcal{E}^- . Analogamente $u \in \mathcal{D}'_-$ se e solo se (u, φ) si può estendere a una funzione lineare e continua su tutto \mathcal{E}^+ .

7.4.8 Definizione. Sia u in \mathcal{D}'_+ . Definiamo *ascissa di convergenza* di f il numero (eventualmente $\pm\infty$)

$$\alpha(u) := \inf \{x \in \mathbb{R} : e^{-xt}u \in \mathcal{S}'\}.$$

Si può dimostrare la seguente proposizione.

7.4.9 Proposizione. *Sia u in \mathcal{D}'_+ . Allora per ogni numero complesso z con $\Re(z) > \alpha(u)$ si ha che $e^{-zt}u$ è in \mathcal{S}' . Inoltre la trasformata di Fourier di $e^{-zt}u$ è una funzione infinitamente derivabile.*

7.4.10 Definizione. Sia u in \mathcal{D}'_+ e supponiamo che $\alpha(u) < +\infty$. Per ogni $z = x + iy$ in $H_{\alpha(z)}$ possiamo definire la funzione $\mathcal{L}(u) = \check{u}(z)$ mediante

$$\check{u}(z) = \check{u}(x + iy) := \mathcal{F}(e^{-xt}u)(y).$$

Diremo che \check{u} è la *trasformata di Laplace* di u .

7.4.11 Esempio. Si ha $\alpha(\delta) = -\infty$ e $\check{\delta} = 1$. Infatti $e^{-xt}\delta = \delta \in \mathcal{S}'$ per qualunque t e $\mathcal{F}(e^{-xt}\delta) = \mathcal{F}(\delta) = 1$

Le proprietà della trasformata di Laplace per le distribuzioni sono analoghe a quelle viste per le funzioni. L'unica differenza è che non è più vero che la trasformata tende a zero quando $|z| \rightarrow \infty$.

7.4.12 Proposizione. *Sia u in \mathcal{D}'_+ .*

1. *La funzione \check{u} è olomorfa su $H_{\alpha(u)}$. Inoltre per ogni n intero si ha $\alpha(t^n u) = \alpha(u)$ e:*

$$\frac{d}{z^n} \mathcal{L}(u)(z) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n u)(z) \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha(u).$$

2. *Per ogni n intero, $\alpha(u^{(n)}) \leq \alpha(u)$ e si ha:*

$$\mathcal{L}(u^{(n)}) = z^n \mathcal{L}(u) \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha(u).$$

3. *Dato $t_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha(u_{t_0}) = \alpha(u)$ e*

$$\mathcal{L}(u_{t_0})(z) = e^{-t_0 z} \mathcal{L}(u)(z) \quad \forall z \text{ con } \Re z > \alpha(u).$$

4. *Dato $z_0 \in \mathbb{C}$, $\alpha(e^{z_0 t} u) = \alpha(u) + \Re z_0$ e*

$$\mathcal{L}(e^{z_0 t} u)(z) = \mathcal{L}(u)(z - z_0) = \check{u}_{z_0}(z) \quad \forall z \text{ con } \Re(z - z_0) > \alpha(u).$$

7.4.13 Teorema. *Supponiamo che $\alpha < +\infty$ e che $g : H_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa. Se esistono M ed n tali che*

$$|g(z)| \leq M|z|^n \quad \forall z \in H_\alpha,$$

allora esiste una unica distribuzione a supporto destro u tale che $\alpha(u) \leq \alpha$ e $\check{u} = g$.

Dimostrazione. Consideriamo $g_1(z) := \frac{g(z + \alpha)}{z^{n+2}}$, è chiaro che $g_1 : H_0 \rightarrow \mathbb{C}$ verifica $|g_1(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$. Per il teorema 6.3.11 possiamo trovare una funzione continua f_1 tale che $\alpha(f_1) \leq 0$ e $\check{f}_1 = g_1$. Se poniamo $u := (e^{\alpha t} f_1)^{(n+2)}$ troviamo $\alpha(u) \leq \alpha$ e $\check{u}(z) = z^{n+2} \mathcal{L}(e^{\alpha t} f_1)(z) = z^{n+2} g_1(z - \alpha) = g(z)$. \square

7.4.14 Proposizione. Sia $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con P e Q polinomi qualunque. Siano $n = \text{grado}(P)$, $m = \text{grado}(Q)$ e siano z_1, \dots, z_k le radici di Q .

Posto $\alpha := \max \{\Re z_1, \dots, \Re z_k\}$ si ha ovviamente $g : H_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ e g verifica l'ipotesi del teorema precedente con $n := \text{grado}(P) - \text{grado}(Q)$. Allora la distribuzione u tale che $\check{u} = g$ è data da:

$$u = \sum_{j=0}^{n-m} d_j \delta^{(j)} + f$$

dove d_0, \dots, d_{n-m} (che ci sono solo se $n \geq m$) sono i coefficienti del polinomio P_1 risultato della divisione tra P e Q :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = P_1(z) + \frac{R(z)}{Q(z)} \quad \text{dove } \text{grado}(R) \leq \text{grado}(Q) - 1.$$

(quindi R è il resto della divisione) e dove f è la funzione definita da:

$$f(t) := \begin{cases} \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{R(z)}{Q(z)} e^{zt}, z_j \right) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Siano P_1 ed R i polinomi indicati sopra. Dal teorema 6.3.15 otteniamo che la funzione

$$f(t) := \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{R(z)}{Q(z)} e^{zt}, z_j \right) \quad \text{se } t > 0, \quad f(t) = 0 \quad \text{se } t < 0,$$

ha ascissa di convergenza α e verifica $\check{f}(z) = \frac{R(z)}{Q(z)}$. Allora se $u = \sum_{j=0}^{n-m} d_j \delta^{(j)} + f$ si ottiene

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L} \left(\sum_{j=0}^{n-m} d_j \delta^{(j)} + f \right) = \sum_{j=0}^{n-m} d_j \mathcal{L}(\delta^{(j)}) + \mathcal{L}(f) = P_1(z) + \frac{R(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

□

7.4.15 Osservazione. Notiamo che, per ogni radice z_j

$$\text{Res} \left(\frac{R(z)}{Q(z)} e^{zt}, z_j \right) = \text{Res} \left(P_1(z) e^{zt} + \frac{R(z)}{Q(z)} e^{zt}, z_j \right) = \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt}, z_j \right) =$$

in quanto il termine $P_1(z) e^{zt}$ è olomorfo su tutto \mathbb{C} . Dunque nella definizione di f si può prendere P invece di R .