

Relazione semestrale sull'attività di ricerca

Rosario Mennuni

14 aprile 2022

Questo documento contiene un sunto dell'attività di ricerca da me svolta nei primi mesi dell'assegno di ricerca bandito con D.R. n. 630/2021 del 06/05/2021, finanziato nell'ambito del progetto PRIN 2017 "Mathematical Logic: models, sets, computability" per il programma di ricerca "Logica matematica: teoria dei modelli e applicazioni, combinatoria e ultrafiltri, teoria degli insiemi, calcolabilità".

Ognuna delle prime sezioni è dedicata a uno dei principali problemi di cui mi sono occupato, e contiene una breve descrizione degli argomenti trattati e una selezione dei risultati ottenuti. Nell'ultima sezione sono descritte la mia attività organizzativa, didattica, e di disseminazione.

1 Espansione asintotica di funzioni di Skolem

Un recente lavoro di A. Berarducci e M. Mamino studia le funzioni di Skolem tramite espansioni asintotiche nel campo dei numeri surreali. Portando avanti questa linea di ricerca, abbiamo dimostrato i risultati seguenti.

Teorema (Berarducci, Mamino, M.). Ogni monomio superpolinomiale nell'espansione asintotica di una funzione di Skolem è almeno esponenziale.

Teorema (Berarducci, Mamino, M.). Sia D il frammento delle funzioni di Skolem minori di 2^{2^x} . Il tipo d'ordine di D/\sim_{2^ω} è almeno $\omega^{\omega^2+\omega}$.

2 Dominazione in teorie o-minimali

Lo studio del monoide di dominazione, cominciato in [Men20, Men22], è uno dei principali focus della mia ricerca. Il corrente oggetto di studio in questo ambito è la seguente domanda, posta in [Men21]: è vero che, in ogni teoria o-minimale, ogni tipo globale invariante è *domination-equivalent* ad un prodotto di 1-tipi? Il caso generale è tuttora oggetto di lavoro in corso, in collaborazione con A. Berarducci e M. Mamino. Nei primi mesi del progetto ho ultimato la dimostrazione del seguente caso particolare, in collaborazione con P. Eleftheriou.

Teorema (Eleftheriou, M.). In ogni teoria o-minimale semi-bounded, ogni tipo invariante è domination-equivalent a un prodotto di 1-tipi.

3 Automorfismi di gruppi abeliani ordinati

Una costruzione comune in teoria dei modelli consiste nel partire da una teoria T , aggiungere al linguaggio un simbolo σ per un automorfismo, ottenendo una teoria T' , e considerare la classe K dei modelli esistenzialmente chiusi di T' . Se T è una teoria SOP, per un risultato di Kikyo

AB RM

e Shelah la classe K non è elementare. Ciononostante, è possibile usare la logica positiva per applicare tecniche model-teoretiche allo studio di K . Per esempio, la logica positiva può essere usata per generalizzare la nozione di NIP. J. Dobrowolski ed io stiamo studiando il caso in cui T è la teoria dei gruppi abeliani ordinati. Recentemente, abbiamo ottenuto i risultati seguenti.

Teorema (Dobrowolski, M.). Sia $f \in \mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$. Le seguenti sono equivalenti.

1. f è assolutamente monotono, i.e. induce una funzione monotona su ogni gruppo abeliano ordinato munito di automorfismo σ .
2. f è identicamente nullo, assolutamente crescente, o assolutamente decrescente.
3. f induce una funzione monotona su un qualche gruppo abeliano ordinato munito di automorfismo σ esistenzialmente chiuso.
4. f non ha radici reali positive.

Teorema (Dobrowolski, M.). Sia G esistenzialmente chiuso nella classe dei gruppi abeliani ordinati muniti di un automorfismo σ . Allora, per ogni $f \in \mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$, la funzione indotta da f su G soddisfa la proprietà dei valori intermedi e, se $f \neq 0$, è surgettiva. L'ipotesi di chiusura esistenziale è necessaria.

4 Parametrizzazione di dividing lines

Un'idea centrale nella teoria dei modelli contemporanea è quella di classificare le teorie complete del primo ordine in base alla loro trattabilità, tramite l'uso delle cosiddette *dividing lines*. A questo scopo, sono state prese in esame proprietà di vario tipo, si veda ad esempio <http://forkinganddividing.com> per una panoramica (non esaustiva).

In un lavoro in corso con D. García, sviluppiamo un trattamento uniforme (i.e. parametrico) di queste proprietà. Recentemente, abbiamo mostrato che 8 delle principali dividing lines possono essere definite in maniera uniforme al variare di un parametro. Un corollario di questo trattamento è la scoperta di una nuova proprietà, ottenuta scegliendo il parametro "massimale".

Definizione. Sia Σ un poset. Diciamo che una teoria completa del prim'ordine ha Σ -SOP se interpreta un poset in cui Σ può essere immerso.

Teorema (García, M.). Per ogni $P \in \{OP, IP, TP, TP_1, TP_2, ATP, SOP_1, SOP\}$ esiste un poset Σ_P tale che, per ogni T teoria completa del prim'ordine, T ha P se e solo se T ha Σ_P -SOP. Inoltre, se Σ è il limite di Fraïssé dei poset finiti, allora Σ -SOP non coincide con nessuna delle dividing lines note (in particolare, con nessuna delle proprietà elencate sopra).

5 Tipi definibili e amalgamazione

La *proprietà dell'amalgamazione* asserisce che per ogni $f_0: A \rightarrow B_0$ e $f_1: A \rightarrow B_1$ esistono $g_0: B_0 \rightarrow C$ e $g_1: B_1 \rightarrow C$ tali che $g_1 \circ f_1 = g_0 \circ f_0$. Durante la sua visita a Pisa lo scorso marzo, M. Hils ha chiesto se i tipi globali definibili, con mappe le inclusioni, hanno la proprietà dell'amalgamazione. La risposta si è rivelata negativa.

Teorema (Hils, M.). I tipi definibili non hanno la proprietà dell'amalgamazione. Più precisamente, esiste una teoria munita di tipi globali definibili $p(x, y), q(x, z)$ tali che $(p \upharpoonright x) = (q \upharpoonright x)$, ma nessun completamento di $p(x, y) \cup q(x, z)$ è definibile.

RM

AB

6 Lavori in fase di ultimazione

In [ADHM19], in collaborazione con B. Adam-Day e J. Howe, abbiamo studiato la classe dei grafi ottenuti partendo da un modello della teoria degli insiemi con l'assioma di Anti-Fondazione e collegando due punti x, y nel caso che si abbia $x \in y \in x$. Il lavoro è attualmente in fase di revisione su suggerimento del referee; visto il parere positivo di quest'ultimo, contiamo che venga a breve accettato per la pubblicazione.

In [HM21], in collaborazione con Martin Hils, abbiamo studiato il monoide di dominazione nei casi dei gruppi ordinati abeliani regolari e dei campi valutati henseliani, eventualmente espansi con una derivazione o un automorfismo. Il lavoro è attualmente in fase di peer-review; contiamo di ricevere una risposta a breve, e revisionare il lavoro di conseguenza.

7 Altre attività

7.1 Attività organizzativa

Mi sono occupato dell'organizzazione di un ciclo di seminari di logica, e della gestione dei relativi siti e mailing list. Gli incontri finora tenutisi sono i seguenti.

15 febbraio F. Parente (Torino). *L'ordine di Rudin-Keisler e ultrafiltri Tukey-massimali su algebre di Boole.*

11 marzo M. Hils (Münster). *Classification of imaginaries in existentially closed valued difference fields.*

25 marzo R. Mennuni (Pisa). *Automorfismi di gruppi abeliani ordinati e logica positiva.*

La lista degli eventi futuri è disponibile presso <https://events.dm.unipi.it/category/7/>.

7.2 Attività didattica

Sto tenendo un corso di dottorato di Teoria dei Modelli, e curando le relative dispense. Il programma degli argomenti trattati è il seguente.

- Richiami su strutture e teorie del prim'ordine, compattezza, Löwenheim-Skolem, estensioni elementari.
- Eliminazione dei quantificatori, tecnica del va-e-vieni, applicazioni, Teorema di Ax.
- Tipi, spazi di tipi, modelli saturi, modelli fortemente omogenei.
- Teorema di Omissione di Tipi, modelli primi, Teorema di Ryll-Nardzewski, Teorema "Never Two" di Vaught.
- Successioni indiscernibili, modelli di Ehrenfeucht-Mostowski.
- Stabilità, order property, 2-rango locale di Shelah, tipi definibili.
- Teorie totalmente trascendenti, rango di Morley, Teorema di Morley.
- Argomento finale da concordare con gli studenti, e.g. caratterizzazione dei campi ω -stabili.

AD RM

7.3 Disseminazione

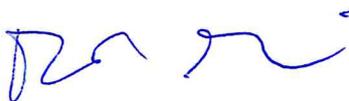
Oltre al seminario di cui nella Sezione 7.1, sono stato invitato a tenere i seguenti seminari.

15 novembre *The domination monoid in henselian valued fields*. University of East Anglia (online).

25 febbraio *Automorphisms of ordered abelian groups and positive logic*. Università degli Studi della Campania “Luigi Vanvitelli”.

Riferimenti bibliografici

- [ADHM19] Bea Adam-Day, John Howe, and Rosario Mennuni. On double-membership graphs of models of Anti-Foundation. <https://arxiv.org/abs/1908.02708>, preprint, 2019.
- [HM21] Martin Hils and Rosario Mennuni. The domination monoid in henselian valued fields. <http://arxiv.org/abs/2108.13999>, 2021.
- [Men20] Rosario Mennuni. Product of invariant types modulo domination-equivalence. *Archive for Mathematical Logic*, 59:1–29, 2020.
- [Men21] Rosario Mennuni. The domination monoid in o-minimal theories. *Journal of Mathematical Logic*, 0(0):2150030, 2021. <https://doi.org/10.1142/S0219061321500306>.
- [Men22] Rosario Mennuni. Weakly binary expansions of dense meet-trees. *Mathematical Logic Quarterly*, 68(1):32–47, 2022.



Il titolare dell'assegno
Dr. Rosario Mennuni



Il responsabile scientifico
Prof. Alessandro Berarducci