

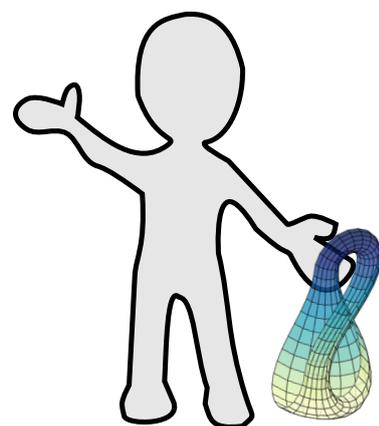
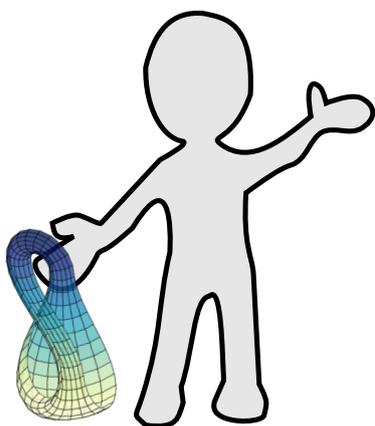
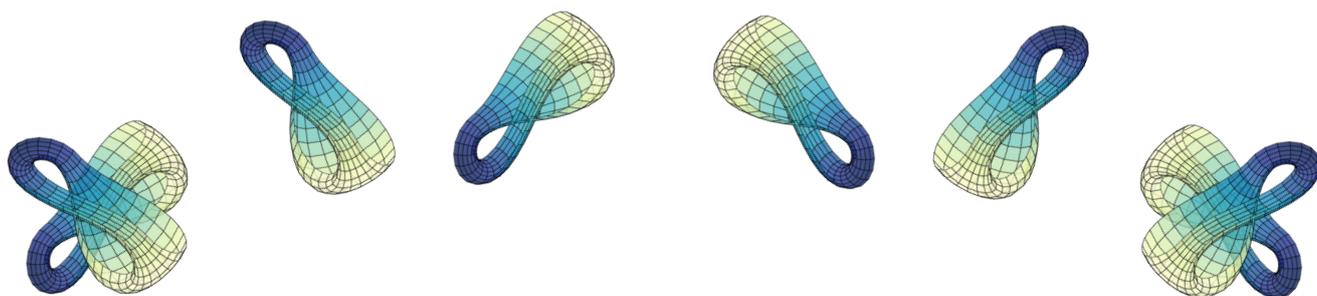
n° 3

Pisa, 22-27 settembre 2016

Matematica

*il giornalino degli **OpenDays***

...notizie, giochi e pillole di matematica



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

**Su indicazione della Commissione Orientamento.
Realizzazione a cura degli studenti Counseling 2016:**

Agnese Barbensi
Dario Villanis Ziani
Vincenzo Galgano

Coordinamento: Prof. Giovanni Gaiffi

Per informazioni :
counseling.dm.unipi@gmail.com

Introduzione

Questo giornalino è il quarto numero della collana “I giornalini degli Open Days” che sono disponibili online in versione pdf all’indirizzo <https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>

Ognuno dei numeri di questa collana è frutto della collaborazione tra alcuni studenti e docenti del Corso di Laurea in Matematica dell’Università di Pisa, e si propone agli studenti degli ultimi anni delle scuole superiori come una ‘piccola introduzione’ al mondo della matematica universitaria.

Nella prima parte di questo libretto troverete una breve introduzione al Corso di Laurea in Matematica, con qualche esempio pratico di possibili percorsi di studio.

A seguire vi verranno presentati due articoli di carattere divulgativo: *Il paradosso EPR e la disuguaglianza di Bell* di Alberto Abbondandolo e *La matematica dei videogiochi* di Marco Franciosi. Nel primo articolo potrete vedere come un argomento puramente matematico sia servito a dirimere una complicata questione legata alla fisica contemporanea, mentre nel secondo avrete un assaggio di una delle tecniche matematiche che stanno alla base dei moderni software di grafica, la cosiddetta interpolazione polinomiale.

Vi illustreremo poi un gioco a carattere matematico, il Sim, ed alcuni esercizi per stuzzicare la vostra curiosità.

Per finire, con una piccola bibliografia e sitografia vi daremo alcuni consigli per approfondire ed accrescere la vostra curiosità verso la matematica. Nell’ultima sezione troverete notizie sui prossimi eventi di orientamento del nostro Dipartimento (in particolare la Settimana Matematica a Febbraio 2017).

Buona lettura!

Indice

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Il Corso di Laurea in Matematica | 3 |
| 2 | Il paradosso EPR e la disuguaglianza di Bell | 7 |
| 3 | La Matematica dei videogiochi | 21 |
| 4 | Un gioco da matematici: Sim | 33 |
| 5 | Esercizi | 36 |
| 6 | Alcuni libri consigliati e pagine web utili | 38 |
| 7 | Prossimi eventi | 40 |

1 Il Corso di Laurea in Matematica

Il Corso di Laurea in Matematica è un ciclo di studi 3+2: è suddiviso in un Corso di Laurea triennale (3 anni), in cui riceverete un'istruzione a 360° su quelli che sono i fondamenti della Matematica, e un Corso di Laurea magistrale (2 anni), in cui avrete la possibilità di approfondire alcuni argomenti di vostro interesse. Al termine di ciascuno dei due cicli di studi consegurerete un titolo. Sebbene il biennio magistrale sia una naturale prosecuzione dei primi tre anni, potrete anche decidere di terminare i vostri studi dopo la sola triennale, o eventualmente migrare in qualche altro Corso di Laurea affine. Nel caso in cui conseguiate anche il titolo magistrale, avrete l'opportunità di accedere al mondo della ricerca mediante un Dottorato di Ricerca.

All'interno del Corso di Laurea triennale, potrete scegliere il vostro percorso tra due possibili curricula: il curriculum fondamentale e il curriculum computazionale. Nel primo avrete la possibilità di approfondire argomenti matematici più astratti, quali la Logica, l'Algebra, la Geometria e l'Analisi, nonché le vostre conoscenze di Fisica; il secondo invece è caratterizzato da un aspetto più applicativo e modellistico. Tuttavia gli studenti di entrambi i percorsi avranno le stesse conoscenze di base e avranno la possibilità di cambiare il curriculum intrapreso in qualsiasi momento. Inoltre, la scelta del curriculum non preclude alcuna scelta del percorso magistrale.

Vediamo più concretamente alcuni possibili corsi di studi relativi al primo triennio, sottolineando quali esami sono in comune e quali le possibili scelte di indirizzo.

- Al primo anno, in comune ai due curricula, affronterete gli esami annuali di Analisi e di Geometria e i corsi semestrali di Aritmetica, Fisica 1 e Fondamenti di Programmazio-

ne, oltre ad un Laboratorio di Comunicazione mediante Calcolatore.

- Al secondo anno, in comune ai due curricula, seguirete i corsi annuali di Analisi e Geometria e i corsi semestrali di Algebra 1, Analisi Numerica ed Elementi di Probabilità e Statistica, oltre al corso di Inglese scientifico ed un Laboratorio Didattico di Matematica Computazionale. A distinguere i due curricula è un corso al secondo semestre: nel curriculum fondamentale c'è un esame a scelta (di solito la scelta ricade tra Elementi di Teoria degli Insiemi e Algebra 2), mentre nel curriculum computazionale affronterete l'esame di Algoritmi e Strutture Dati.
- Al terzo anno l'unico corso in comune ai due curricula è Sistemi Dinamici. Nel curriculum fondamentale seguirete i corsi di Fisica 2 e Fisica 3, un Laboratorio Sperimentale di Matematica Computazionale e altri quattro corsi a scelta di stampo teorico (come ad esempio Probabilità, Geometria e Topologia Differenziale, Analisi matematica 3, Elementi di Geometria Algebrica ed Elementi di Topologia Algebrica); nel curriculum computazionale invece affronterete gli esami di Calcolo Scientifico, Linguaggi di Programmazione, Ricerca Operativa, un Laboratorio Computazionale e tre esami a scelta (tra cui per esempio Statistica Matematica, Elementi di Meccanica Celeste e Finanza Matematica).

Per quanto riguarda il Corso di Laurea Magistrale, esso sostanzialmente si differenzia in un percorso teorico, uno applicativo, uno modellistico ed uno didattico. I primi tre costituiscono una preparazione ideale verso la ricerca matematica sia astratta sia volta alle applicazioni in svariati campi; il curriculum didattico, di recentissima attivazione, offre agli studenti interessati

un valido percorso volto all'insegnamento scolastico o alla preparazione alla ricerca nel campo della didattica e della storia della matematica. Come si può notare, ogni interesse di specializzazione può trovare un riscontro nell'offerta formativa del Corso di Laurea Magistrale in Matematica a Pisa.

Sbocchi lavorativi Un'opinione diffusa sulle possibilità lavorative di un laureato in Matematica è che esse si limitino all'insegnamento ed alla carriera accademica. Sebbene questi siano senza dubbio possibili sbocchi, molti altri sono i campi in cui un matematico può far valere la sua figura professionale, sia per la preparazione che per la grande adattabilità a molti ambiti lavorativi, derivanti da un tipo di formazione che differisce da quella offerta da altri corsi di laurea. In particolare, le opzioni lavorative spaziano dalla finanza, alla statistica, alla meccanica celeste fino a sismologia, meteorologia, editoria e molto altro ancora. Sebbene altri laureati possano aver dedicato esplicitamente la maggior parte dei loro studi a tali settori, molto spesso le capacità di astrazione e di risoluzione dei problemi di un matematico riescono a porlo in una posizione molto appetibile dal punto di vista lavorativo. In generale comunque le prospettive occupazionali sono buone, come mostrano alcuni dati statistici che sono stati inseriti nel precedente numero di questo giornalino e che potete consultare online all'indirizzo <https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>.

Offerte per gli studenti Una delle qualità dell'accademia matematica pisana sta nell'attenzione da parte dei docenti all'istruzione e alla crescita professionale degli studenti. Il numero di iscritti (inferiore rispetto a molti altri corsi di laurea) permette di ridurre il distacco studente-docente e di favorire una crescita formativa guidata passo per passo. Sin dal primo anno lo

studente viene sostenuto attraverso ricevimenti ed esercitazioni offerti da docenti e dottorandi.

Una novità dell'ultimo anno è l'offerta del *Tutorato alla pari*: alcuni studenti del biennio magistrale (o alla fine del loro percorso triennale) si offrono per aiutare gli studenti (per lo più dei primi due anni) attraverso ricevimenti presso alcune aule studio del Dipartimento di Matematica. La scelta di tali studenti (tutors) avviene attraverso un bando e prevede una formazione didattica, in modo da garantire un servizio ottimale agli studenti dei primi anni. Inoltre, questi tutors non sono a disposizione solo per supporto didattico, ma sono disposti anche ad ascoltare le difficoltà che lo studente incontra inizialmente e, se è il caso, ad indirizzarlo al Centro di Ascolto di Ateneo. Lo scorso anno questo progetto ha avuto un grande successo soprattutto presso gli studenti del primo anno, i quali hanno usufruito a pieno dei ricevimenti dei tutors: a sostenere tale successo sono anche le statistiche di esami superati e di abbandoni al primo anno.

Un altro progetto che partirà da quest'anno prevede l'assegnazione di (circa) due studenti del primo anno ad ogni docente del Corso di Laurea: in questo modo gli studenti del primo anno avranno una figura di riferimento per chiarimenti didattici e consigli pratici su come organizzare il loro percorso di studi.

L'obiettivo di queste offerte è aiutare gli studenti a superare le difficoltà iniziali e affrontare gli anni di studio successivi con maggiore maturità, sia a livello di conoscenze sia di organizzazione.

2 Il paradosso EPR e la disuguaglianza di Bell

Conosciamo tutti l'importanza della matematica nella fisica: le teorie fisiche vengono espresse da modelli matematici - per esempio equazioni differenziali - che possono essere analizzati mediante tecniche matematiche più o meno sofisticate, fornendo risultati qualitativi e quantitativi da confrontarsi con quanto emerge dagli esperimenti. Quindi per un fisico la matematica è soprattutto un linguaggio - per formulare le proprie teorie - ed uno strumento - per dedurre delle conseguenze - ma in generale non una fonte di ispirazione.

Vi è però almeno un caso in cui la matematica si è rivelata fondamentale per ideare un esperimento. Si trattava di dare una risposta ad una questione che vedeva contrapposte le idee di Albert Einstein e Max Born. Il problema per la verità sembrava di natura più metafisica che fisica, e come tale impossibile da dirimere sperimentalmente. Invece, una brillante idea puramente matematica di John Bell ha permesso di riportare la questione su un piano fisico ed ha tenuto impegnate diverse generazioni di fisici sperimentali. In questo articolo vogliamo esporre l'idea di Bell, che come vedremo richiede solamente concetti elementari di probabilità e trigonometria. Prima però dobbiamo spiegare quale fosse la materia del contendere.

La meccanica quantistica. La nostra storia ha inizio nel 1900. La fisica dell'Ottocento, che pure aveva avuto un enorme successo nello spiegare numerosissimi fenomeni, comincia a mostrare i suoi limiti. Proprio nel primo anno del nuovo secolo Max Planck formula l'ipotesi, da lui stesso definita "disperata", che la luce sia composta da particelle indivisibili, i *fotoni*. Cinque anni più tardi Albert Einstein usa l'ipotesi di Planck per spie-

gare l'effetto fotoelettrico. Si è ormai innescata una rivoluzione scientifica che nel giro di un ventennio porterà alla nascita della *meccanica quantistica*, un'opera corale che vede tra i suoi protagonisti i fisici Werner Heisenberg, Paul Dirac, Luis de Broglie, Erwin Schrödinger, Niels Bohr e Max Born.

Seguiamo ora il consiglio di Richard Feynman, secondo il quale niente spiega la meccanica quantistica meglio del cosiddetto *esperimento della doppia fenditura*. Si tratta di un esperimento realizzato per la prima volta nel 1909 da sir Geoffrey Ingram Taylor. Una sorgente luminosa a bassissima intensità emette un fotone alla volta. Di fronte alla sorgente c'è uno schermo con due piccole fenditure. Lo schermo blocca gran parte dei fotoni, ma le due fenditure permettono ad alcuni di passare e di andare ad impressionare una lastra fotografica così sensibile da rivelare l'arrivo di un singolo fotone¹.

Teniamo lo sguardo fisso sulla lastra: uno alla volta, cominciano ad apparire dei puntini luminosi. Ci aspetteremmo di vedere i puntini formare due macchie più o meno estese in corrispondenza delle due fenditure. Invece, quello che vediamo formarsi sotto i nostri occhi è l'immagine raffigurata in Figura 1: si tratta di tipiche *frange di interferenza*².

Un'immagine di questo tipo sarebbe spiegabilissima se l'intensità della luce fosse maggiore. In questo caso, infatti, la luce si comporterebbe come un'onda e le frange sarebbero causate dall'interferenza fra le due onde create dalle due fenditure. Più precisamente, al passaggio dallo schermo l'onda luminosa viene

¹In realtà per rivelare l'arrivo di singoli fotoni sono necessarie apparecchiature più complicate di una semplice lastra fotografica. Qui però vogliamo evitare di addentrarci in questioni tecniche e ci permetteremo un certo grado di imprecisione nel descrivere gli esperimenti. Il lettore interessato a questi aspetti può consultare [2] e [7].

²Un video che mostra questo esperimento è disponibile sulla pagina web che riporta l'articolo [7], cliccando sulla figura a fine testo.

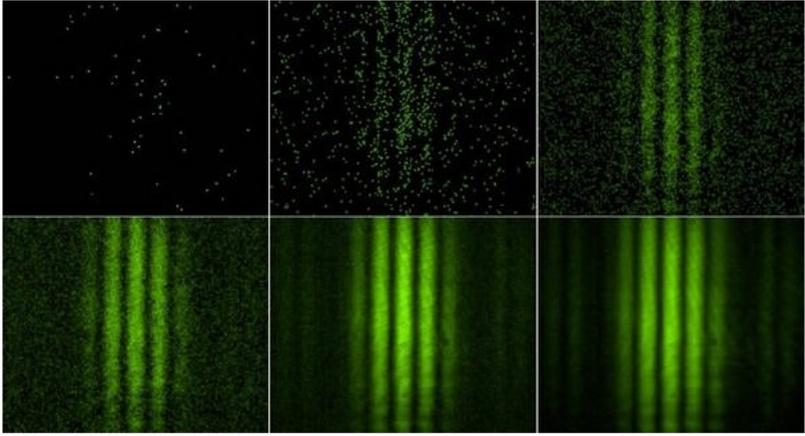


Figura 1: L'esperimento della doppia fenditura. La figura è ricavata dal sito web della Swiss Physical Society, vedi [7].

in parte bloccata e passano solamente due onde concentrate in corrispondenza delle due fenditure. Queste due onde si propagano, formando un alternarsi di picchi e valli, ed interferiscono tra loro: dove si incontrano due picchi oppure due valli l'onda risultante è amplificata (interferenza costruttiva), dove si incontrano un picco ed una valle l'onda si cancella (interferenza distruttiva). Le bande luminose sulla lastra corrispondono alle zone di interferenza costruttiva, le bande scure all'interferenza distruttiva.

Ma nel nostro esperimento l'intensità della luce è talmente bassa che i fotoni arrivano uno alla volta, come testimoniano i puntini luminosi che appaiono via via sulla lastra. Le frange di interferenza si manifestano solamente come fatto statistico, dopo che sulla lastra sono arrivati un gran numero di fotoni. La meccanica classica non è in grado di spiegare questo esperimento. Se il singolo fotone è un'onda, perchè sulla lastra compare un puntino alla volta? E se è una particella, che come tale può passare da una sola delle due fenditure, perchè vediamo

frange di interferenza invece che due macchie in corrispondenza delle due fenditure? Al congresso di Solvay del 1926 viene ufficializzata la spiegazione della meccanica quantistica: *il fotone è contemporaneamente un'onda e una particella*. Prima di raggiungere la lastra fotografica è un'onda che passa da entrambe le fenditure, generando due onde che interferiscono tra loro, esattamente come abbiamo spiegato. Quando raggiunge la lastra l'onda *collassa*, ossia appare una particella in un punto a caso, ma con probabilità maggiore nelle zone in cui l'ampiezza dell'onda è grande, minore dove questa ampiezza è piccola. È questa proporzionalità tra l'ampiezza dell'onda e la probabilità di trovare la particella in una data posizione che spiega il formarsi delle frange di interferenza dopo che sono arrivati numerosi fotoni. In altre parole, dobbiamo pensare al fotone come ad una particella, poiché la lastra ce lo rivela come tale, ma dobbiamo ammettere che prima di impressionare la lastra questa particella non abbia una posizione determinata e passi da entrambe le fenditure. Naturalmente a questa spiegazione qualitativa si aggiungono precise equazioni matematiche, che chiariscono da un lato come si propaghi l'onda, dall'altro come avvenga il suo collasso. Il successo della nuova teoria è immediato e subito si riescono a spiegare, qualitativamente e quantitativamente, fenomeni di fronte ai quali la meccanica classica si era arresa.

Le obiezioni di Einstein. La neonata meccanica quantistica non piaceva ad Albert Einstein, che pure ne era stato un precursore con la sua spiegazione dell'effetto fotoelettrico del 1905. Più precisamente, Einstein ne riconosceva i meriti e gli indubbi successi, ma non apprezzava né l'uso della probabilità in una teoria che voleva essere fondamentale né, soprattutto, l'esigenza, necessaria in meccanica quantistica, di dover dividere la realtà fisica in un mondo microscopico, a cui sono associate delle onde, ed un mondo macroscopico, che segue le leggi della meccanica

classica e che interagendo con le onde del mondo microscopico ne provoca il collasso. Ecco cosa scriveva in una lettera del 1926 a Max Born, uno dei fondatori della meccanica quantistica ed interlocutore principale di Einstein per vari decenni:

“La meccanica quantistica è degna di ogni rispetto, ma una voce interiore mi dice che non è ancora la soluzione giusta. È una teoria che ci dice molte cose, ma non ci fa penetrare più a fondo il segreto del gran Vecchio. In ogni caso, sono convinto che questi non gioca a dadi con il mondo.”

Einstein pensava alla meccanica quantistica, come era stata formulata dai suoi colleghi, come ad una teoria corretta ma deducibile da qualcosa di più fondamentale, un po' come la termodinamica è deducibile, in linea di principio, dalla meccanica di un gran numero di particelle. Per il più grande scienziato del ventesimo secolo la meccanica quantistica è pertanto *incompleta*, nel senso che non fornisce una descrizione completa di uno stato fisico, un po' come la pressione, il volume e la temperatura non descrivono completamente un gas, una descrizione più accurata del quale richiederebbe la conoscenza di posizione e velocità di ciascuna delle sue molecole.

Nel 1935 Einstein scrive con i colleghi Boris Podolsky e Nathan Rosen un articolo nel quale i tre fisici sostengono di aver *dimostrato* che la meccanica quantistica è incompleta. Per seguire il loro argomento, che presentiamo in una versione leggermente modificata, abbiamo bisogno di ricordare alcuni fatti sulla polarizzazione della luce.

Un raggio luminoso può essere *polarizzato* in una qualsiasi direzione perpendicolare al suo cammino. Lo strumento che mette in evidenza questa proprietà della luce è il *polarizzatore*, ben noto a chi si occupa di fotografia. Si tratta di un dischetto colorato su cui è segnata una direzione. Se un raggio di luce polarizzato di un certo angolo θ incontra un polarizzatore la

cui direzione coincide con θ , la luce passa³. Se il polarizzatore viene orientato perpendicolarmente a θ , la luce viene fermata. Se l'angolo è intermedio, passa soltanto una frazione della luce. A quel punto la luce passata è polarizzata lungo la direzione del polarizzatore, come si può verificare intercettando il raggio con un secondo polarizzatore.

Secondo la meccanica quantistica anche un singolo fotone possiede una polarizzazione. Questa può avere una direzione precisa oppure può essere indeterminata, esattamente come la posizione. Se il fotone è polarizzato, esso passa con certezza da un polarizzatore con la stessa orientazione, non passa da uno perpendicolare, passa con probabilità⁴ $\cos^2 \theta$ da un polarizzatore inclinato di un angolo θ rispetto alla propria polarizzazione. Se la polarizzazione del fotone è indeterminata, esso passa da un polarizzatore qualsiasi con probabilità $1/2$. Se passa, assume la polarizzazione del polarizzatore.

Veniamo all'esperimento concettuale immaginato da Einstein, Podolsky e Rosen. Una delle conseguenze della meccanica quantistica è che possiamo produrre una sorgente che emette *coppie* di fotoni: i due fotoni di una stessa coppia - chiamiamoli A e B - hanno polarizzazione *indeterminata* ma *identica* e partono in due direzioni opposte. Possiamo verificare il fatto che la polarizzazione sia identica facendo passare i due fotoni per due polarizzatori orientati allo stesso modo e rivelando il loro eventuale passaggio con lastre fotografiche: vedremo un puntino su ciascuna lastra (con probabilità $1/2$), oppure nessun puntino (ancora con probabilità $1/2$), ma mai un puntino su una lastra e niente

³Di un polarizzatore è rilevante la direzione, non il verso: gli angoli θ e $\theta + \pi$ individuano la stessa direzione. Gli angoli sono espressi in radianti.

⁴Esprimiamo le probabilità come numeri compresi tra 0 e 1: un certo evento ha probabilità p se su N tentativi avviene circa pN volte. Quindi probabilità 0 indica un evento impossibile, probabilità 1 un evento certo, probabilità $1/2$ un evento che avviene nel 50% dei casi.

sull'altra. Supponiamo ora che i due polarizzatori siano molto lontani tra loro e che il primo (quello che intercetta il fotone A) sia leggermente più vicino alla sorgente del secondo. Secondo la meccanica quantistica, dopo l'emissione i due fotoni hanno polarizzazione indeterminata. Il fotone A è il primo ad incontrare il polarizzatore: in quell'istante la sua indeterminazione collassa, il fotone A assume una polarizzazione ben definita, che coincide con quella del polarizzatore nel caso in cui A passi, con la polarizzazione perpendicolare altrimenti. Il fotone B incontrerà il suo polarizzatore solo un attimo dopo e si comporterà come il fotone A. Ne deduciamo che quando la polarizzazione di A assume un valore definito, il fotone B assume istantaneamente la stessa polarizzazione. Però uno dei postulati della teoria della relatività, elaborata dallo stesso Einstein, ci dice che nessun segnale può propagarsi con velocità maggiore della velocità della luce: se la distanza tra i due fotoni è molto grande, un segnale che parte da A non farà in tempo a raggiungere B prima che questi abbia incontrato il suo polarizzatore. La conclusione di Einstein, Podolsky e Rosen è che i fotoni devono possedere una loro polarizzazione già al momento dell'emissione ed il fatto che a questa la meccanica quantistica non dia alcun valore ne dimostra l'incompletezza.

La disuguaglianza di Bell. All'argomento di Einstein, Podolsky e Rosen, presto noto come "paradosso EPR" dalle iniziali dei suoi ideatori, i fondatori della meccanica quantistica risponderanno che la meccanica quantistica è completa, ma che il paradosso EPR mostra che il postulato della velocità massima dei segnali non ha validità generale. La discussione tra Einstein e Born andrà avanti per anni, senza che il primo riuscisse ad elaborare una teoria che "completasse" la meccanica quantistica, o che il secondo trovasse un argomento convincente per dimostrarla.

re che fosse necessario abbandonare il postulato della velocità massima dei segnali.

L'idea per dirimere la questione arrivò solo nel 1964, grazie al fisico irlandese John Bell, quando purtroppo Einstein era già morto da nove anni. L'argomento di Bell, di natura puramente matematica, è sorprendentemente semplice ed elegante e possiamo riassumerlo in queste pagine.

Bell parte dall'esperimento EPR, ma immagina che i due polarizzatori possano essere orientati con angoli diversi tra loro. Fissiamo una volta per tutte un riferimento cartesiano rispetto al quale riferire gli angoli che determinano la direzione dei polarizzatori. Se il primo polarizzatore ha direzione α e il secondo ha direzione β , possiamo determinare sperimentalmente la *correlazione* $\nu(\alpha, \beta)$: si fanno N esperimenti con i polarizzatori orientati come detto, dove N è un numero molto grande; tutte le volte che i fotoni hanno lo stesso comportamento (cioè passano entrambi o non passano entrambi) si somma $+1$; tutte le volte che i fotoni hanno comportamento diverso si somma -1 ; infine, si divide per N . Il numero ottenuto è $\nu(\alpha, \beta)$. Ad esempio, da quel che sappiamo sul comportamento dei fotoni polarizzati possiamo già prevedere che $\nu(\alpha, \alpha) = 1$ mentre $\nu(\alpha, \alpha + \pi/2) = -1$.

Vediamo quale valore assegni la meccanica quantistica alla correlazione $\nu(\alpha, \beta)$. I due fotoni hanno polarizzazione indeterminata, ma distribuita in modo equiprobabile in ogni direzione. Se supponiamo che il fotone A raggiunga il suo polarizzatore un istante prima di B, otteniamo che con probabilità $1/2$ la sua polarizzazione assume la direzione di α ed A passa, mentre con uguale probabilità la sua polarizzazione assume direzione ortogonale ad α ed A non passa. Il fotone B assume istantaneamente la stessa polarizzazione di A. Nella prima metà dei casi assume quindi polarizzazione α e passa con probabilità $\cos^2(\beta - \alpha)$. Perciò delle circa $N/2$ emissioni il cui fotone A pas-

sa, circa $(N/2) \cos^2(\beta - \alpha)$ delle volte passa anche B e dobbiamo sommare 1, mentre nei rimanenti $(N/2)(1 - \cos^2(\beta - \alpha))$ casi B non passa e dobbiamo sottrarre 1. Il contributo a $\nu(\alpha, \beta)$ di queste $N/2$ emissioni è dunque:

$$(N/2) \cos^2(\beta - \alpha) - (N/2)(1 - \cos^2(\beta - \alpha)),$$

valore che, usando note formule di trigonometria, può essere riscritto come

$$(N/2) \cos 2(\beta - \alpha).$$

Un calcolo simile (o un argomento di simmetria), mostra che il contributo dell'altra metà delle emissioni (quelle in cui A non passa) è lo stesso, quindi il valore di $\nu(\alpha, \beta)$ previsto dalla meccanica quantistica si ottiene moltiplicando per due il valore sopra e dividendo poi per N , con risultato finale

$$\nu_{\text{MQ}}(\alpha, \beta) = \cos 2(\beta - \alpha).$$

Veniamo all'esperimento immaginato da Bell. Fissiamo tre angoli, $\alpha = 0$, $\beta = \pi/6$, $\gamma = \pi/3$, e consideriamo tre esperimenti diversi, che chiamiamo (α, β) , (β, γ) , e (α, γ) : il primo angolo determina l'orientazione del primo polarizzatore, quello che intercetta il fotone A , il secondo angolo l'orientazione del secondo polarizzatore, raggiunto dal fotone B . Effettuiamo $3N$ esperimenti, scelti a caso ed in modo equiprobabile tra i tre esperimenti (α, β) , (β, γ) , e (α, γ) . Ci aspettiamo che ciascun tipo di esperimento venga eseguito circa N volte. Mettiamo assieme i risultati dei circa N esperimenti di tipo (α, β) ed usiamoli per calcolare la correlazione $\nu(\alpha, \beta)$. Considerando gli altri due sottoinsiemi di esperimenti, troviamo $\nu(\beta, \gamma)$ e $\nu(\alpha, \gamma)$. Riasumiamo i risultati ottenuti in un'unica quantità B , definita sommando i primi due numeri e sottraendo il terzo, ossia

$$B = \nu(\alpha, \beta) + \nu(\beta, \gamma) - \nu(\alpha, \gamma).$$

Usando la formula per ν_{MQ} che abbiamo ricavato sopra, concludiamo che il valore che la meccanica quantistica attribuisce a questa quantità è

$$\begin{aligned} B_{\text{MQ}} &= \nu(0, \pi/6) + \nu(\pi/6, \pi/3) - \nu(0, \pi/3) \\ &= \cos \pi/3 + \cos \pi/3 - \cos 2\pi/3 = 3/2. \end{aligned}$$

Vogliamo confrontare questo valore con quello previsto da una qualunque *teoria locale*, ossia una ipotetica teoria come quella che Einstein cercava di elaborare, dove valga il postulato della velocità massima dei segnali. La parola “locale” si riferisce al fatto che quel che avviene in un punto P dell’universo non deve avere alcun effetto istantaneo in un altro punto Q, ma l’effetto su Q può avvenire solamente dopo un intervallo di tempo sufficiente alla luce per viaggiare da P a Q.

In una teoria locale ciascuna coppia di fotoni deve possedere istruzioni su come comportarsi di fronte ad un polarizzatore, comunque orientato. Infatti i due fotoni di una stessa coppia hanno lo stesso comportamento di fronte a due polarizzatori orientati dello stesso angolo, comunque lontani tra loro: non potendo conoscere l’orientazione dei polarizzatori al momento dell’emissione e non potendo comunicare tra loro abbastanza rapidamente quando li incontrano, i due fotoni sono costretti ad aver concordato fra loro il comportamento da tenere di fronte ad una qualunque orientazione del polarizzatore. Etichettiamo ciascuna coppia di fotoni a seconda di come si comporterà di fronte ai tre angoli α , β , γ : questa etichetta è una stringa di tre simboli, ciascuno dei quali è un + oppure un -. Il primo simbolo indica il comportamento della coppia di fotoni di fronte ad un polarizzatore orientato di un angolo α : è un + se la coppia passa, un - se non passa. Il secondo simbolo descrive il comportamento di fronte ad un polarizzatore orientato di un angolo β , mentre il terzo riguarda l’angolo γ , con le stesse regole. Ad esempio, i due fotoni di una coppia di tipo + - + passeranno

da due polarizzatori orientati di un angolo α oppure γ , mentre non passeranno se l'angolo è β . Questa classificazione suddivide le coppie di fotoni in $2^3 = 8$ tipi.

Nel nostro esperimento avvengono $3N$ emissioni di coppie di fotoni. Indichiamo con N_{+++} il numero di quelle emissioni in cui viene prodotta una coppia di tipo $+++$, ed usiamo una notazione analoga per i numeri delle emissioni degli altri sette tipi di coppie. Otteniamo così otto numeri N_{+++}, \dots, N_{---} , che hanno somma $3N$. Ovviamente, ignorando i dettagli della teoria locale che stiamo considerando, non sappiamo nient'altro di questi otto numeri, alcuni dei quali potrebbero anche essere zero, nel caso in cui la natura vieti l'emissione di coppie di determinati tipi.

Fissiamo l'attenzione sull'esperimento (α, β) . Dato che questo esperimento viene compiuto una volta su tre in maniera casuale, è ragionevole aspettarsi che delle N_{+++} coppie di fotoni di tipo $+++$ circa $N_{+++}/3$ siano sottoposte a questo esperimento. Analogamente, circa $N_{+-+}/3$ coppie di fotoni di tipo $+-+$ si trovano di fronte all'esperimento (α, β) e così via per gli altri sei tipi di coppie. Di tutte le circa N volte in cui viene effettuato l'esperimento (α, β) , otterremo un risultato concorde (entrambi i fotoni passano o entrambi non passano) circa

$$\frac{1}{3}(N_{+++} + N_{+-+} + N_{-++} + N_{---})$$

volte, mentre otterremo un risultato discorde (un fotone passa, l'altro no) circa

$$\frac{1}{3}(N_{+--} + N_{-+-} + N_{-+-} + N_{--+})$$

volte. Ricordando come è stato definito $\nu(\alpha, \beta)$, troviamo

$$\begin{aligned} \nu(\alpha, \beta) = \frac{1}{3N} & (N_{+++} + N_{+-+} + N_{-++} + N_{---} \\ & - N_{+--} - N_{-+-} - N_{-+-} - N_{--+}). \end{aligned}$$

Analogamente, il lettore verificherà facilmente che

$$\nu(\beta, \gamma) = \frac{1}{3N}(N_{+++} + N_{-++} + N_{+--} + N_{---} \\ - N_{++-} - N_{-+-} - N_{+-+} - N_{--+}),$$

e

$$\nu(\alpha, \gamma) = \frac{1}{3N}(N_{+++} + N_{+-+} + N_{-+-} + N_{---} \\ - N_{++-} - N_{+--} - N_{-+-} - N_{--+}).$$

Sommando i primi due numeri e sottraendo il terzo, deduciamo che la nostra ipotetica teoria locale predice il seguente valore di B :

$$B_{\text{Loc}} = \frac{1}{3N}(N_{+++} + N_{++-} + N_{-+-} + N_{---} \\ + N_{+--} + N_{--+} - 3N_{+-+} - 3N_{-+-}).$$

Questa formula ci permette di limitare in qualche modo il valore di B_{Loc} ? Sì: infatti, ricordando che gli otto numeri N_{+++}, \dots, N_{---} hanno somma $3N$, possiamo pensare a B_{Loc} come alla media aritmetica di $3N$ numeri, dei quali $N_{+-+} + N_{-+-}$ valgono -3 e gli altri valgono 1 . Tale media non potrà quindi superare 1 : vale cioè la *disuguaglianza di Bell*

$$B_{\text{Loc}} \leq 1.$$

Abbiamo quindi trovato una quantità che può essere calcolata sperimentalmente, la quantità B , a cui una qualsiasi teoria locale attribuisce un valore non superiore ad 1 , mentre la meccanica quantistica le attribuisce il valore $3/2$, che è maggiore di 1 . La conclusione è che nell'esperimento immaginato da Bell la previsione della meccanica quantistica non può essere ottenuta da nessuna teoria locale.

Escogitato un modo di dirimere la situazione sul piano teorico, la parola passa ai fisici sperimentali. Tranne che in un caso, l'esperimento di Holt e Pipkin del 1974, tutti gli esperimenti, a partire da quello di Freedman e Clauser del 1972 fino agli esperimenti effettuati nel 2015 da tre gruppi indipendenti a Delft, Vienna e Boulder, evidenziano una violazione della disuguaglianza di Bell e sono in accordo con la meccanica quantistica. Nei primi esperimenti per la verità questo accordo è opinabile, data la scarsa affidabilità dei rivelatori, ma negli ultimi diventa più evidente. Nell'esperimento di Aspect, Dalibard e Roger del 1982, in particolare, l'orientazione dei polarizzatori viene scelta a caso da un computer dopo che la coppia di fotoni è stata emessa, in modo da escludere la possibilità che la posizione dei polarizzatori possa influenzare quale "tipo" di coppie venga emesso, possibilità che invaliderebbe l'argomento che ci ha portato alla disuguaglianza di Bell: non potremmo più dire che circa $1/3$ degli N_{+++} fotoni di tipo $+++$ viene sottoposto all'esperimento (α, β) .

La conclusione che dobbiamo trarre, almeno per il momento, è che su questo punto Einstein aveva torto: il mondo è in qualche misura non locale e vi sono segnali che si propagano istantaneamente.

Per saperne di più

- [1] A. D. Aczel, *Entanglement*, Raffaello Cortina Editore 2004.
- [2] T. L. Dimitrova e A. Weis, The waveparticle duality of light: a demonstration experiment, *Am. J. Phys.* 76 (2008), 137–142.
- [3] J. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press 2004.

- [4] G. C. Ghirardi, *Un'occhiata alle carte di Dio*, Il Saggiatore 1997.
- [5] F. Selleri, *La fisica tra paradossi e realtà*, Progedit 2003.
- [6] A. Zeilinger, *Il velo di Einstein*, Einaudi 2006.
- [7] A. Weis e T. L. Dimitrova, Wave-particle duality of light for the classroom, *Swiss Physical Society*, disponibile online su http://www.sps.ch/fr/articles/progresses/wave-particle-duality_of_light_for_the_classroom.13/.

*Alberto Abbondandolo, Professore di Analisi
Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum*

3 La Matematica dei videogiochi

Introduzione

Nel mondo contemporaneo, una grande opportunità di lavoro per le nuove generazioni viene dal mondo dei videogiochi. Poter lavorare nell'industria dei videogame non è un'eventualità così remota. Partecipare allo sviluppo di un nuovo software interattivo richiede competenze specifiche, ma anche fantasia e capacità comunicativa e può essere ricco di grandi soddisfazioni.

Nella creazione di un videogioco sono importanti le realizzazioni grafiche di ambienti e personaggi e la capacità di modificarle rapidamente. Per affrontare problemi di questo tipo non è sufficiente fare affidamento su computer sempre più potenti. Le nuove capacità di calcolo devono essere sfruttate al massimo. Occorre introdurre concetti matematici avanzati e sviluppare nuovi modi di fare i calcoli per ottenere risultati davvero gratificanti.

Lo schermo è fatto di pixel, ovvero è suddiviso in piccolissimi quadratini. Per una rappresentazione efficace non si può imporre al computer di tener conto di ciascun singolo pixel, separatamente dagli altri. Diventa utile introdurre equazioni capaci di legare i vari pixel e di adattarsi ai cambiamenti. Ad esempio, se si cambia il punto di vista, il paesaggio deve cambiare immediatamente. Analogamente il protagonista del gioco deve essere in grado di rispondere rapidamente agli stimoli del giocatore.

Alla base dei moderni software di grafica ci sono i concetti di interpolazione polinomiale, di parametrizzazione ed il loro utilizzo nell'ambito della geometria proiettiva.

Interpolazione polinomiale

L'interpolazione polinomiale è un metodo per disegnare delle curve o superfici (che corrispondono a equazioni polinomiali) capaci di approssimare una determinata forma, passando per certo numero di punti predeterminati. Il loro utilizzo permette al computer di memorizzare solamente le equazioni date e con velocissimi calcoli realizzare le curve o le superfici necessarie per costruire l'immagine con una precisione che può essere cambiata di volta in volta. Le idee matematiche che stanno alla base di questa teoria sono semplici e possono essere facilmente comprese dagli studenti delle scuole superiori. Il vantaggio nell'utilizzo dei polinomi risiede nella relativa facilità con cui il computer esegue i calcoli necessari nel loro utilizzo. Il punto di partenza per poter sviluppare tali idee si basa sulla nozione fondamentale di parametrizzazione. Parametrizzare una curva significa descriverla mediante l'utilizzo di un parametro esterno. Ad esempio se si considera il percorso di una nave che si muove da un porto all'altro, la traiettoria percorsa può essere descritta mediante l'utilizzo del parametro tempo t : ad ogni istante possiamo individuare la latitudine e la longitudine della nave stessa e poi possiamo disegnare il tragitto percorso segnando volta per volta le coordinate. Ovvero parametrizzare una curva corrisponde a disegnarne l'evoluzione al variare di un parametro t .

Per capire come si arriva a sviluppare i primi esempi di interpolazione cominciamo spiegando come si può descrivere un segmento mediante l'uso di un parametro t . Consideriamo nel piano Cartesiano il punto P di coordinate $(1, 2)$ e il punto Q di coordinate $(3, 6)$ e il segmento che li congiunge.

Usando la notazione vettoriale il segmento \overline{PQ} può essere descritto come il cammino di un punto materiale che parte da P e si muove con velocità costante data dal vettore differenza $Q - P$.

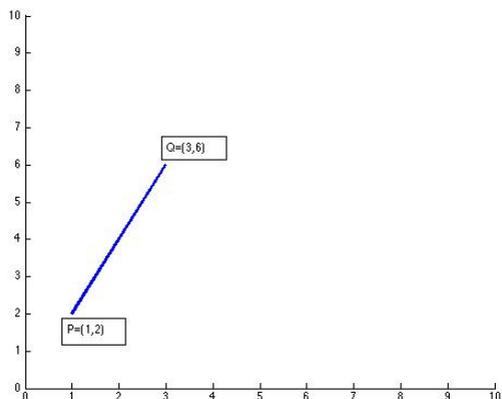


Figura 1: segmento \overline{PQ}

Si ha pertanto la seguente descrizione parametrica del segmento

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1$$

ovvero

$$\overline{PQ} = (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1$$

Consideriamo adesso un terzo punto R di coordinate $(4, 8)$ e la spezzata generata P, Q ed R , ovvero l'unione dei due segmenti \overline{PQ} e \overline{QR} .

Per costruire una curva liscia capace di approssimare la spezzata PQR iteriamo la costruzione precedente utilizzando un punto $P(t)$ sul primo segmento e un punto $Q(t)$ sul secondo.

Dal punto di vista algebrico otteniamo

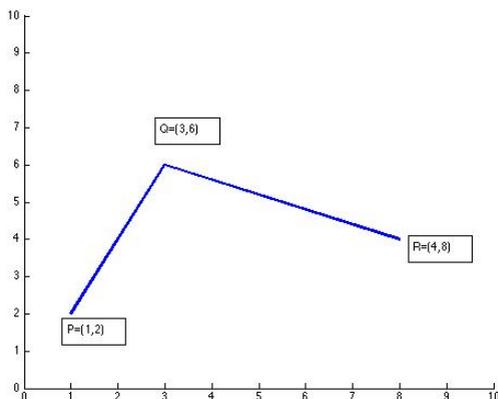


Figura 2: spezzata \overline{PQR}

$$\begin{cases} x = (1-t)^2 \cdot 1 + 2t(1-t) \cdot 3 + t^2 \cdot 4 \\ y = (1-t)^2 \cdot 2 + 2t(1-t) \cdot 6 + t^2 \cdot 8 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La curva ottenuta segue il profilo della spezzata e negli estremi è tangente ai due segmenti. Se abbiamo invece un quarto punto S , possiamo iterare nuovamente il precedente argomento.

Riepilogando la curva che approssima la spezzata PQR è data dall'equazione (vettoriale)

$$(1-t)^2 \cdot P + 2t(1-t) \cdot Q + t^2 \cdot R \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1$$

mentre la curva che approssima la spezzata $PQRS$ è data dall'equazione (vettoriale)

$$(1-t)^3 \cdot P + 3t(1-t)^2 \cdot Q + 3t^2(1-t) \cdot R + t^3 \cdot S$$

con $0 \leq t \leq 1$.

Le equazioni così ottenute sono determinate da polinomi fissati

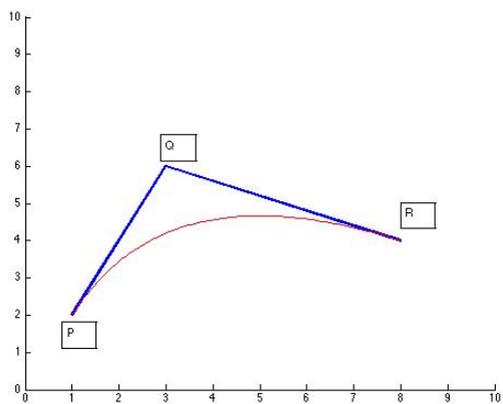


Figura 3: curva che approssima la spezzata PQR

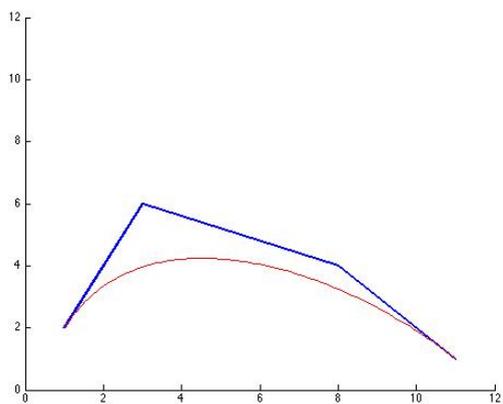


Figura 4: curva che approssima la spezzata $PQRS$

moltiplicati per i coefficienti dati dalle coordinate dei punti. Se si sposta un punto basta cambiare i corrispondenti coefficienti e si ottiene la nuova curva. Pertanto queste curve si prestano molto bene ad essere manipolate mediante trasformazioni (affini) del piano. Il computer per trasformarle ha bisogno solamente di avere le informazioni relative alle coordinate dei punti: attraverso un piccolo database che raccoglie le equazioni dei polinomi di base può ridisegnare la nuova curva in una frazione di secondo. Per chi è appassionato di algebra vale la pena sottolineare come nascono i polinomi usati nelle equazioni. Si tratta semplicemente di considerare lo sviluppo delle potenze del binomio $((1 - t) + t)$:

$$\begin{aligned} ((1 - t) + t)^2 &= (1 - t)^2 + 2t(1 - t) + t^2 \\ ((1 - t) + t)^3 &= (1 - t)^3 + 3t(1 - t)^2 + 3t^2(1 - t) + t^3 \end{aligned}$$

(si noti che per qualsiasi valore di t il risultato è sempre 1). In generale, i monomi ottenuti dallo sviluppo della potenza ennesima del binomio sono i polinomi utilizzati per creare una curva interpolante $n+1$ punti. Questa semplice osservazione permette di considerare tali monomi come i mattoni fondamentali per sviluppare una teoria completa e di facile applicazione.

Geometria Proiettiva

La prospettiva nasce dalla necessità di rappresentare in modo coerente lo spazio usuale (tridimensionale) su un dipinto o in generale su una superficie piana (bidimensionale). I moderni software dedicati all'analisi e allo sviluppo di immagini e soprattutto i videogiochi, sono basati in parte sulle idee esposte dai maestri italiani del rinascimento e trattate dai grandi geometri italiani nei primi anni del '900.

L'idea di fondo di questa teoria nasce dalla necessità di esplicitare gli aspetti matematici che stanno alla base della prospet-

tiva lineare. Per prospettiva lineare si intende la rappresentazione su un piano ottenuta come intersezione dello stesso piano con il cono che ha il vertice nell'occhio e la base nell'oggetto da raffigurare. Per codificare tale rappresentazione occorre tenere conto che l'osservatore non vede i punti nello spazio dove realmente essi sono, ma vede solamente la luce che essi proiettano. Pertanto vengono identificati tutti i punti che stanno su una retta passante per l'occhio dell'osservatore (che consideriamo puntiforme). Questa semplice idea racchiude in se tutti i concetti sufficienti per costruire un modello algebrico del piano proiettivo.

Poniamo coordinate (x, y, z) nello spazio (z è la coordinata che indica la profondità) e l'occhio dell'osservatore nell'origine $O = (0, 0, 0)$. Una retta passante per O e per un punto P di coordinate (a, b, c) può essere descritta parametricamente dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = ta \\ y = tb \\ z = tc \end{cases}$$

Nel nostro modello tutti i punti che giacciono sulla retta vengono rappresentati dallo stesso punto sulla superficie di coordinate (x, y) della rappresentazione. Pertanto l'idea naturale è quella di identificare tutti i punti che stanno su una retta passante per l'origine, ovvero di identificare un punto di coordinate (a, b, c) con un punto di coordinate (ta, tb, tc) . Ad esempio le terne $(1, 2, 3)$ e $(3, 6, 9)$ rappresentano lo stesso punto del piano proiettivo.

Così come nel piano Cartesiano l'insieme delle coppie di numeri reali (x, y) permette di descrivere tutti i punti del piano euclideo, in questo modo possiamo descrivere tutti i punti del piano proiettivo mediante terne di numeri reali (x, y, z) con la condizione che non siano tutti e tre nulli e con l'identificazione

$(x, y, z) \sim (tx, ty, tz)$. Queste coordinate si chiamano coordinate omogenee.

Il modello che abbiamo costruito rappresenta una sorta di espansione del piano euclideo nel senso che tutti i punti di coordinate $(x, y, 1)$ possono venire identificati con i punti del piano Cartesiano di coordinate (x, y) . Cosa succede ai punti che sono a 90 gradi rispetto all'occhio dell'osservatore? Questi punti non possono essere identificati con alcun punto del piano Cartesiano, poiché la retta passante per l'occhio dell'osservatore non interseca il piano dell'immagine. L'insieme di tutti questi punti costituisce quella che si chiama retta all'infinito. I punti sulla retta all'infinito hanno coordinate omogenee $(x, y, 0)$. In questo modo possiamo pensare al piano proiettivo come l'unione dei punti al finito, descritti dalle coordinate $(x, y, 1)$, con i punti all'infinito, descritti dalle coordinate $(x, y, 0)$. Un punto all'infinito corrisponde al punto di intersezione di due rette parallele.

Il vantaggio nell'utilizzo delle coordinate omogenee risiede da un lato nella semplificazione delle procedure di calcolo necessarie per realizzare le trasformazioni del piano, e dall'altro nell'interpretazione dei punti del piano come immagine dei punti dello spazio. Infatti un punto nello spazio di coordinate (x, y, z) lo possiamo proiettare nel piano nel punto di coordinate $(x/z, y/z, 1)$. Ovvero nella tela del pittore, o ancor di più nello schermo del computer, il punto di coordinate $(x/z, y/z)$ rappresenta l'immagine del punto dello spazio 3D di coordinate (x, y, z) .

Le trasformazioni dei punti nello spazio, quali ad esempio traslazioni o rotazioni (movimenti tipici di un corpo rigido che si muove) vengono lette come semplici trasformazioni dei punti del piano, facilmente calcolabili con qualsiasi tipo di computer. Analogamente, il cambiamento di punto di vista non è nient'altro che una trasformazione lineare dello spazio tridimensionale che può essere facilmente scritta mediante le coordinate

(omogenee) del piano attraverso l'utilizzo di matrici.

Parametrizzazioni nel piano proiettivo

È possibile creare curve di interpolazione nel piano proiettivo attraverso l'uso delle coordinate omogenee. Si può pensare a una curva di questo tipo come immagine sul piano di una curva nello spazio tridimensionale. Infatti, considerando nello spazio 3D una curva espressa mediante le equazioni

$$\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \\ z = r(t) \end{cases}$$

(dove $p(t), q(t), r(t)$ sono polinomi nella variabile t), è facile vedere che la sua immagine nel piano è descritta dai punti di coordinate

$$(x/z, y/z, 1) = (p(t)/r(t), q(t)/r(t), 1).$$

Ovvero, identificando tali punti con i punti del piano otteniamo una parametrizzazione espressa mediante funzioni razionali (cioè frazioni di polinomi) del parametro t .

Considerando il piano come una porzione del piano proiettivo possiamo utilizzare le coordinate omogenee. Il vantaggio delle coordinate omogenee risiede nel fatto che è possibile moltiplicare per il denominatore comune tutti e tre i valori delle coordinate e quindi esprimere tale punto nella forma più facilmente computabile $(p(t), q(t), r(t))$. Dal punto di vista computazionale è la stessa parametrizzazione della curva nello spazio, però rappresenta una curva nel piano proiettivo. Questa forma è più maneggevole dal punto di vista dei calcoli. In effetti è possibili compiere operazioni mediante l'utilizzo di matrici ottenendo con rapidità una nuova curva dello stesso tipo. In questo

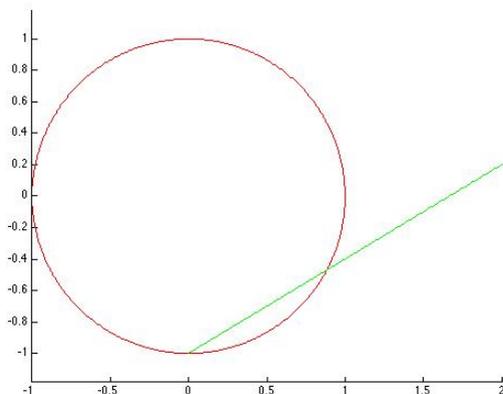


Figura 5: parametrizzazione circonferenza mediante fascio di rette

modo i calcoli si fanno utilizzando tutte e tre le coordinate. Solamente alla fine si effettua la divisione per la terza coordinata ottenendo una curva che possiamo rappresentare sullo schermo del computer.

Per capire meglio questi concetti vediamo come si parametrizza la circonferenza del piano di centro l'origine e raggio 1. Tale circonferenza ha equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$

Per parametrizzarla consideriamo un fascio di rette passanti per il punto $Q = (0, -1)$. Usiamo t come parametro per descrivere il coefficiente angolare delle rette del fascio. Ogni retta del fascio interseca la circonferenza nel punto Q e in un altro punto $P(t)$ che dipende dal coefficiente angolare t .

Con facili calcoli si ottiene che le coordinate x e y del punto $P(t)$ sono espresse dalle seguenti espressioni.

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2-1}{1+t^2} \end{cases}$$

In questo modo otteniamo una parametrizzazione razionale della circonferenza (senza il punto U di coordinate $(0, 1)$ che corrisponde all'intersezione con una retta parallela all'asse delle y). In coordinate omogenee si legge

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 1 \\ z = 1 + t^2 \end{cases}$$

In conclusione mediante l'utilizzo di funzioni razionali (cioè di frazioni di polinomi) è possibile migliorare il livello di approssimazione di una curva interpolante e disegnare curve fondamentali come circonferenze e ellissi.

In coordinate omogenee tali curve si rappresentano mediante polinomi e quindi si prestano con molta facilità ad essere manipolate da programmi di grafica.

Conclusioni

Nei moderni programmi di grafica si utilizzano le curve NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines). Le curve NURBS si ottengono mediante raffinamenti delle tecniche illustrate precedentemente. Per realizzare queste curve si aggiungono due ulteriori passi alla realizzazione vista precedentemente. Partendo dalla curva spezzata originale, in primo luogo vengono dati dei pesi, eventualmente diversi, ai vertici della spezzata. Un peso grande significa una maggiore capacità di attrazione della curva verso siffatto vertice. In secondo luogo, per ottimizzare il calcolo del computer si percorre la curva con velocità alta nei tratti che non danno preoccupazioni (ad esempio percorsi quasi rettilinei), mentre si rallenta nei tratti in cui si ha un cambio di direzione o una curvatura alta. Questo risultato si ottiene suddividendo l'intervallo di tempo $[0, 1]$ in piccoli intervalli ciascuno di lunghezza diversa, a seconda del grado di accuratezza necessario

per realizzare la porzione di curva voluta, e percorrendo tale intervallo con velocità inversamente proporzionale alla sua lunghezza. Le idee che stanno alla base di tali procedimenti sono però le stesse utilizzate da Piero della Francesca nel rinascimento per realizzare i suoi quadri e da Castelnuovo e Enriques per studiare le curve e le superfici algebriche. Questo a mio giudizio è un buon esempio per evidenziare l'importanza di una solida base scientifica e culturale capace di fornire gli strumenti per affrontare le moderne tecnologie.

*Marco Franciosi, Ricercatore di Geometria
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa*

4 Un gioco da matematici: Sim

In questa sezione vi proponiamo un gioco che vi invitiamo a provare in prima persona: si tratta di un gioco a due giocatori, ideato dal crittografo Gustavus Simmons nel 1969, chiamato Sim.

Consideriamo sei punti nel piano che costituiscano i vertici di un esagono e colleghiamo ogni coppia di punti mediante un lato (quanti lati avremo?), come in figura 1.

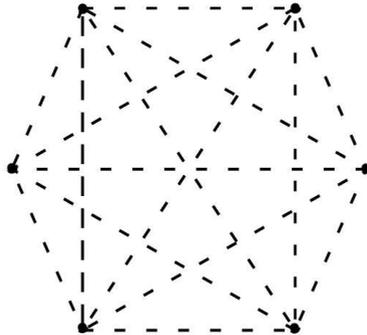


Figura 1: Situazione di partenza del gioco Sim

Definiamo un triangolo *ammissibile* se i suoi vertici coincidono con tre dei sei vertici dell'esagono di partenza. Quindi i triangoli che si vengono a formare dall'intreccio delle varie linee nel nostro diagramma non saranno ammissibili, e non vengono considerati ai fini del gioco. La figura 2 esemplifica tale situazione.

Due giocatori scelgono un colore ciascuno, diciamo rosso per il primo e blu per il secondo. Ogni giocatore, a turno, colora

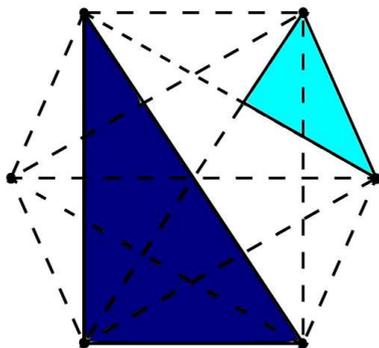


Figura 2: Il triangolo blu scuro è ammissibile, il triangolo azzurro chiaro non è ammissibile

uno dei lati non ancora colorati con il proprio colore. Perde il giocatore che colora tutti i lati di un triangolo ammissibile con il proprio colore.

Come in ogni gioco di natura matematica, alcune domande sorgono spontanee.

- Il gioco può finire in parità?
- Esiste, per uno dei due giocatori, una strategia vincente? Ossia se uno dei due giocatori esegue ad ogni passo la miglior mossa possibile, ha la vittoria garantita?
- È possibile trovare esplicitamente una strategia vincente, nel caso che questa esista?

Provando a giocare, potete cercare di analizzare il comportamento di questo gioco, tentando di intuire le risposte a tali domande.

Sappiamo, grazie al settore noto come teoria di Ramsey, che Sim non può finire in pareggio: infatti ogni grafo completo (un

grafo è *completo* se ogni vertice è collegato ad ogni altro mediante un arco, come nel nostro caso) con 6 vertici colorato con due colori deve necessariamente contenere un triangolo monocromatico, ossia i cui lati sono tutti dello stesso colore.

Con metodi computazionali si è inoltre giunti a provare che il secondo giocatore è favorito in questo gioco: ossia, se gioca bene, ha la vittoria garantita! Ma cosa significa “giocare bene”? Possiamo dare esplicitamente una strategia vincente? Questo è ancora un problema aperto, quindi attualmente non è nota tale strategia.

Generalizzazioni

Come potete immaginare, si può giocare anche a partire da un poligono che abbia un numero di vertici a piacere, anche se, ovviamente, al crescere del numero dei vertici si incrementerà anche il numero dei lati tra di loro, e di conseguenza la complessità della figura iniziale.

Possiamo anche giocare nello spazio, anziché nel piano, usando un poliedro al posto di un poligono; in tal caso lo scopo di ogni giocatore sarà quello di evitare di colorare interamente un tetraedro, anziché un triangolo.

Infine è possibile anche estendere il gioco a più giocatori, ammettendo più di due soli colori.

In ciascuno di questi casi si ripropongono le domande fatte nel caso di sei vertici sul piano che abbiamo presentato, ed ancora il tentativo di rispondere a tali questioni si può avvalere della teoria di Ramsey.

Bibliografia

- [1] G. Simmons, *The game of SIM*, Journal of Recreational Mathematics, 2(2), 1969

5 Esercizi

Esercizio 1. Sia AC la diagonale più lunga di un parallelogramma $ABCD$. Sia E il piede della perpendicolare da C alla retta contenente AB e sia F il piede della perpendicolare da C alla retta contenente AD . Dimostrare che

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = (AC)^2$$

(ovviamente nella formula precedente ci si riferisce alle lunghezze dei segmenti indicati).

Esercizio 2. Sia n un intero maggiore di 2. Determinare il più piccolo numero reale c_n con la seguente proprietà: comunque si prendano n numeri reali distinti, fra essi se ne possono trovare due, diciamo x e y , tali che

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} \leq c_n$$

Esercizio 3. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dimostrare che, se per $-1 \leq x \leq 1$ vale $|f(x)| \leq 1$, allora per $-1 \leq x \leq 1$ vale $|2ax + b| \leq 4$.

Esercizio 4. Supponiamo di aver colorato ogni punto del piano di blu o di rosso.

1. Dimostrare che esiste un rettangolo i cui vertici sono tutti dello stesso colore.
2. Dividiamo il rettangolo del punto precedente in una “scacchiera” costituita da n^2 rettangoli piccoli uguali fra loro, dove n è un numero dispari ≥ 3 . Dimostrare che almeno uno di questi rettangoli piccoli ha almeno tre vertici dello stesso colore.

Esercizio 5. *Si considerino cinque ellissi disposte nel piano in modo che a due a due abbiano intersezione vuota oppure costituita da due punti distinti. Queste ellissi suddividono il piano in regioni. Sia n il numero minimo di colori che occorrono per colorare tali regioni in modo che se due regioni sono confinanti (due regioni i cui bordi hanno in comune solo un punto non si considerano confinanti) allora sono colorate con colori distinti. È vero o falso che $n = 2$ qualunque siano le dimensioni e la posizione delle ellissi?*

Le soluzioni di questi esercizi compariranno sulla pagina web dell'orientamento dedicata al giornalino

<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>

ai primi di Ottobre. Per avere suggerimenti subito scriveteci all'indirizzo e-mail counseling.dm.unipi@gmail.com

6 Alcuni libri consigliati e pagine web utili

Ecco una breve lista di libri che vi suggeriamo per un ulteriore approfondimento.

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica, lo consigliamo, per approfondire e appassionarsi;
- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico;
- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: autobiografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan;
- O. A. Ivanov, *Facile come π greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore;
- A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo;
- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni;
- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la autobiografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Per non confondere le idee ci siamo limitati a proporre una bibliografia essenziale. Di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati. Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! MAtematica, Divulgazione, Didattica:
<http://maddmaths.simai.eu/>
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
<http://www.dm.unipi.it/webnew/>
- Sito delle olimpiadi di matematica:
<http://olimpiadi.dm.unibo.it/>
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
<http://www.sns.it/>
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:
<http://poisson.dm.unipi.it/>

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito (<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento>).

7 Prossimi eventi

- Vi aspettiamo alla **Settimana Matematica**, il nostro principale evento di orientamento, che si svolgerà dall'8 al 10 Febbraio 2017: insieme a circa 150 studenti da tutta Italia, avrete la possibilità di confrontarvi con la vita del Dipartimento di Matematica di Pisa, partecipare a laboratori tematici, assistere a conferenze, interagire con docenti e studenti, e molto altro ancora...

Troverete informazioni più dettagliate e la modalità di iscrizione sulla pagina web <http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/> a partire da fine Novembre.

- Il 22 ed il 23 Febbraio 2017 si terranno gli **Open Days**, evento durante il quale alcuni studenti vi illustreranno il Corso di Laurea in Matematica, vi proporranno giochi e quesiti e potranno rispondere alle vostre domande e curiosità. In questa occasione troverete anche un nuovo numero del giornalino!