

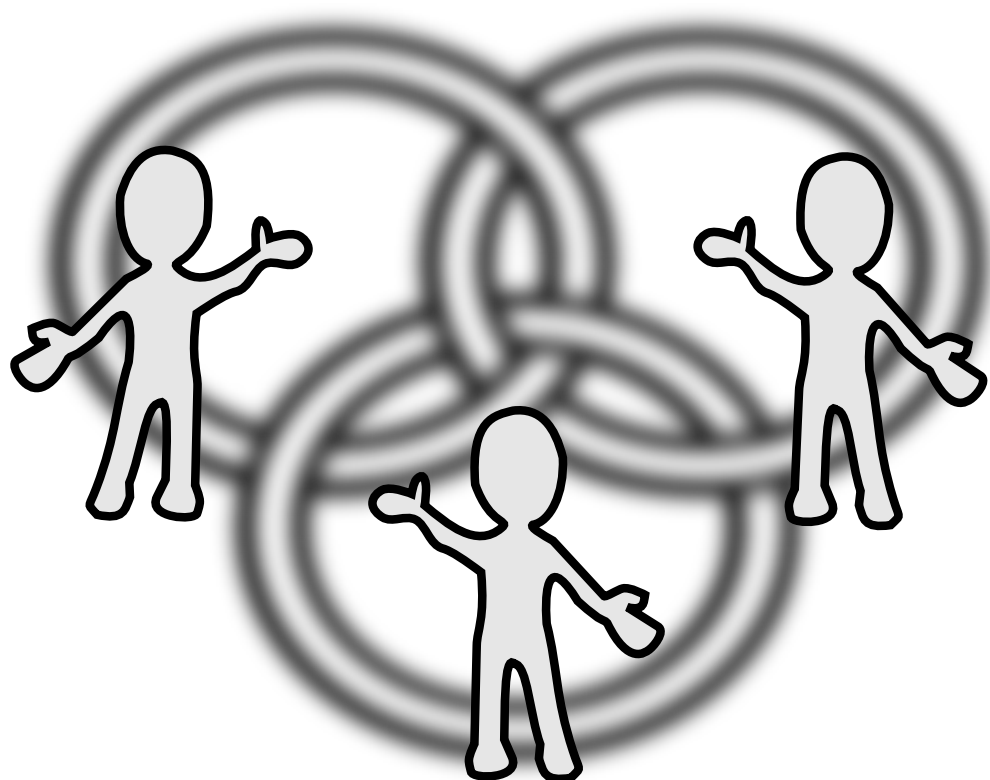
n° 4

Pisa, 22-23 Febbraio 2017

Matematica

il giornalino degli ***OpenDays***

...notizie, giochi e pillole di matematica



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

**Su indicazione della Commissione Orientamento.
Realizzazione a cura degli studenti Counseling 2017:**

Gian Maria Negri Porzio
Adriana Vernice
Agnese Barbensi (grafica della copertina)

Coordinamento: Prof. Giovanni Gaiffi

***Per informazioni:
counseling.dm.unipi@gmail.com***

Introduzione

Questo giornalino, realizzato da studenti del corso di Laurea in Matematica, nasce in occasione degli Open Days, un evento di orientamento organizzato ogni anno dall'Università di Pisa. Come nelle edizioni precedenti, l'obiettivo di questo quarto numero è incuriosire dando qualche assaggio su cosa voglia dire fare matematica anche al di là degli argomenti scolastici¹.

Per prima cosa potrete trovare una descrizione del corso di laurea, seguita da qualche statistica sugli impieghi dei laureati al termine dei loro studi. Potrete così farvi un'idea su quali possano essere i vari sbocchi lavorativi se sceglierete di seguire questo percorso di studi.

Dopodiché potrete trovare due articoli divulgativi:

- Proprietà di riscaldamento e dimensione: a partire da alcuni semplici problemi, Emanuele Paolini illustrerà i concetti di misura e di dimensione, proponendo anche un'interessante dimostrazione del Teorema di Pitagora.
- Leonhard Euler e il problema dei ponti: in una città con dei ponti, dopo aver scelto un punto di partenza e uno di arrivo, è possibile fare una passeggiata percorrendo ogni ponte esattamente una volta? Elia Saini risponderà a questa domanda, strettamente legata alla nascita della topologia.

Dopo questi due articoli potrete sperimentare il gioco Notakto, di cui verranno spiegate le regole e qualche iniziale strategia, e cimentarvi in qualche esercizio.

Infine, per i più curiosi, abbiamo raccolto una lista di pagine web, libri e film per darvi ulteriori spunti interessanti e qualche approfondimento.

Buona lettura e buon divertimento!

¹<https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days-0>

Indice

Il Corso di Laurea in Matematica	3
Proprietà di riscaldamento e dimensione	6
Leonhard Euler e il problema dei ponti	20
Notakto	26
Esercizi	32
Libri, pagine web ed altri media	34

Il corso di Laurea

Il corso di Laurea in Matematica si divide formalmente in Laurea triennale e Laurea magistrale. La prima, corrispondente al titolo internazionale *Bachelor's degree*, prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale. Esistono due possibili curricula:

- Il curriculum fondamentale,
- Il curriculum computazionale.

Mentre il primo si distingue per i due corsi aggiuntivi di fisica, Fisica II e Fisica III, nel secondo sostituirte queste ore con esami più legati all'informatica e all'analisi numerica.

Al momento dell'immatricolazione vi verrà chiesto di scegliere il curriculum a cui iscrivervi. Non preoccupatevi se siete indecisi: come potete notare dalla tabella 1, i corsi sono identici fino al primo semestre del secondo anno, quindi avrete tempo per modificare la vostra scelta nel modo migliore, senza che questo influisca minimamente sulla vostra carriera.

Naturale prosecuzione è il biennio magistrale, alla fine del quale acquisirete il titolo omonimo (*Master degree* nei paesi anglofoni). È divisa in quattro diversi curricula, che vi permetteranno di approfondire le branche della matematica che più vi hanno interessato durante il vostro percorso di studi.

Prospettive lavorative

“Ah, quindi vuoi insegnare al liceo” è probabilmente la risposta più comune (se non l'unica) quando rivelerete che studiate matematica. È sì vero che il Dipartimento di Matematica di Pisa offre un curriculum improntato alla didattica durante la

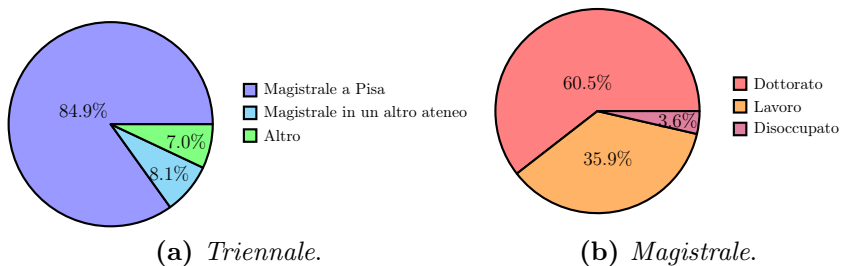


Figura 1: Dati occupazionali 2014-2015 ad un anno dalla laurea.

magistrale e che attiva i corsi del TFA (Tirocinio Formativo Attivo) per i futuri insegnanti, tuttavia numerosi laureati trovano impieghi in altri settori.

Nella figura 1 riportiamo la media della situazione occupazionale degli ultimi due anni a dodici mesi dalla laurea. Dopo la triennale (figura 1a), i dati sono chiari: più del 90% prosegue con i due anni magistrali, superati i quali la situazione è più eterogenea. La maggior parte degli ex-studenti magistrali prosegue la propria formazione con un dottorato di ricerca (PhD), muovendo perciò i primi passi verso la carriera accademica. Molti invece entrano nel mondo del lavoro, dove la figura del matematico è molto apprezzata. La *forma mentis* acquisita negli anni permette infatti ai nostri laureati di eccellere nel problem solving. Questo compensa largamente una preparazione forse meno specifica rispetto ad altri coetanei, come ingegneri, informatici ed economisti. Non c'è dunque da stupirsi se questi dati sono molto positivi.

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale.

Fondamentale	Computazionale
I anno	
Aritmetica (9 CFU)	
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)	
Laboratorio di comunicazione mediante calcolatore (3 CFU)	
Analisi matematica 1 (15 CFU)	
Geometria 1 (15 CFU)	
Fisica 1 (9 CFU)	
II anno	
Algebra 1 (6 CFU)	
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)	
Inglese scientifico (6 CFU)	
Analisi matematica 2 (12 CFU)	
Geometria 2 (12 CFU)	
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)	
Laboratorio didattico di matematica computazionale (6 CFU)	
<i>Esame a scelta</i> (6 CFU)	Algoritmi e strutture dati (6 CFU)
III anno	
Sistemi dinamici (6 CFU)	
Fisica 2 con laboratorio (9 CFU)	Calcolo scientifico (6 CFU)
Fisica 3 (6 CFU)	Laboratorio computazionale (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)	Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
	Ricerca operativa (6 CFU)
<i>4 Esami a scelta</i> (24 CFU)	<i>3 Esami a scelta</i> (18 CFU)
Prova finale (9 CFU)	

Proprietà di riscaldamento e dimensione

Le proprietà di riscaldamento delle misure sono un concetto molto semplice che però spesso viene ignorato nei percorsi scolastici. In queste note tenteremo di mettere in evidenza questo strumento, proponendo alcuni problemi a cui può essere applicato. In particolare vedremo un'interessante dimostrazione del teorema di Pitagora e faremo una digressione nelle dimensioni frazionarie.

Problema 1. *Una normale bottiglia di vino ha una capacità di $3/4$ di litro. Una bottiglia di tipo Jéroboam contiene invece 3 litri. Quanto è il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?*

Questo problema è molto semplice se affrontato con considerazioni dimensionali. La risoluzione non dipende dalla forma della bottiglia. L'unica informazione (che viene sottointesa) è il fatto che i diversi formati di bottiglia differiscono per una *similitudine*.

Similitudine

Una *similitudine* di fattore q è una particolare trasformazione geometrica che ha la proprietà di modificare ogni lunghezza moltiplicandola per lo stesso fattore q . Se σ è una similitudine, e P, Q sono due punti qualunque, si avrà quindi:

$$d(\sigma(P), \sigma(Q)) = q \cdot d(P, Q)$$

dove $d(P, Q)$ denota la distanza tra i punti P e Q e $d(\sigma(P), \sigma(Q))$ è la distanza dei punti immagine di P e Q dopo aver applicato la similitudine σ .

Le similitudini mantengono gli angoli e i rapporti tra le lunghezze dei segmenti. Di conseguenza si dice che le similitudini mantengono la forma.

I diversi formati di bottiglie differiscono per la dimensione, ma hanno tutti la stessa forma. Il Problema 1 ci chiede quindi di determinare il rapporto di similitudine tra due oggetti, conoscendone il volume.

Proviamo ora a considerare un problema apparentemente più semplice del Problema 1.

Problema 2. *Le patatine tuberine vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18 cm e diametro 9 cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?*

È sensato supporre che il peso delle patatine sia proporzionale al volume occupato. Sarà quindi sufficiente determinare il rapporto tra i volumi dei due cilindri per ottenere il rapporto tra i pesi.

Sappiamo che il volume v di un cilindro di diametro d e altezza h è dato dalla formula:

$$v = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

Come varia il volume se moltiplichiamo le misure del cilindro per uno stesso coefficiente q ? Poniamo $H = qh$, $D = qd$. Si otterrà allora

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3. \quad (1)$$

Abbiamo quindi osservato che una similitudine di rapporto q modifica il volume dei cilindri di un rapporto q^3 . Nel Problema 2 il rapporto di riscaldamento è $q = 2$ e dunque possiamo affermare che il cilindro di dimensioni doppie avrà un volume pari a $2^3 = 8$ volte il volume del cilindro piccolo. Possiamo quindi aspettarci che anche il peso del suo contenuto venga moltiplicato per 8 e quindi sia pari a $8 \cdot 50 g = 400 g$.

Nell'equazione (1) abbiamo osservato come il coefficiente $\pi/4$ nella formula del calcolo del volume si elide quando facciamo il rapporto tra volumi di solidi simili. Questo ci fa intuire che il coefficiente q^3 di riscaldamento del volume non dipende dalla forma del solido. In effetti se facciamo lo stesso calcolo per un cubo $v = \ell^3$, un parallelepipedo $v = abc$ o per una sfera $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, otterremo sempre lo stesso risultato:

$$\frac{(q\ell)^3}{\ell^3} = \frac{q^3\ell^3}{\ell^3} = q^3, \quad \frac{(qa)(qb)(qc)}{abc} = q^3, \quad \frac{\frac{4}{3}(qr)^3}{\frac{4}{3}r^3} = q^3.$$

Possiamo convincerci che qualunque sia la forma di un solido, un riscaldamento di fattore q determina un riscaldamento del volume di un fattore q^3 . Se lo volessimo dimostrare dovremmo però ricordarci come si definisce il volume di un solido qualunque. Quello che si fa è approssimare il solido tramite piccoli cubetti di lato ℓ . Se il solido si ricopre approssimativamente con N cubetti di lato ℓ , il suo volume sarà circa $v = N\ell^3$. Se il solido viene riscaldato di un fattore q , lo si potrà approssimare con N cubetti di lato $q\ell$. Dunque il suo volume sarà circa $V = N(q\ell)^3 = q^3N\ell^3 = q^3v$, come avevamo intuito.

Queste considerazioni ci permettono di risolvere il Problema 1 che ci chiedeva qual è il rapporto tra le altezze della bottiglia Jéroboam da 3 litri e la normale bottiglia da 0,75 litri. Il rapporto tra le altezze è pari al fattore q di riscaldamento. Visto che il rapporto tra i volumi è $3/(3/4) = 4 = q^3$ si trova $q = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$.

Dimensione di una misura

L'esponente 3 nel fattore q^3 di riscaldamento del volume identifica la dimensione della misura di volume. Diremo che il volume V è una misura di dimensione 3 in quanto se un qualunque solido X viene riscaldato di un fattore q si ha $V(qX) = q^3V(X)$ (dove abbiamo indicato con $V(X)$ il volume del solido X e abbiamo

denotato con qX il riscalamento di X di un fattore q). Similmente l'area è una misura di dimensione 2 in quanto riscalando una superficie di un fattore q la sua area viene moltiplicata per un fattore q^2 . La lunghezza è invece una misura di dimensione 1 in quanto se una curva viene riscalata di un fattore q la sua lunghezza viene moltiplicata per $q = q^1$.

Una *misura* è una funzione m che associa ad ogni figura geometrica F un numero $m(F)$. Senza entrare in dettagli tecnici, l'unica proprietà veramente rilevante di una misura è la *additività* ovvero la proprietà $m(F \cup G) = m(F) + m(G)$ quando F e G sono figure che non si sovrappongono. Tutte le misure che stiamo considerando sono inoltre invarianti per isometria, cioè $m(F) = m(F')$ se F' è congruente a F .

In generale una *misura* m si dice avere dimensione d se per ogni figura F si ha

$$m(qF) = q^d m(F).$$

Abbiamo finora osservato che la lunghezza è una misura 1-dimensionale, l'area è 2-dimensionale e il volume è 3-dimensionale. Possiamo sfruttare queste semplici informazioni nei seguenti problemi.

Problema 3. *Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Sapendo che il circuito reale è lungo 5793 m, quanto sarà lungo il circuito disegnato da Daniele?*

Contando le piastrelle Daniele ha determinato che l'area racchiusa dal circuito in scala è circa $6,5 \text{ m}^2$. Quanti metri quadri racchiude il vero circuito?

Le macchinine che Daniele usa per giocare sono invece in scala 1 : 50. Se per dipingere la macchinina Daniele utilizza 1 tubetto di vernice rossa, quanti tubetti gli sarebbero necessari per dipingere la macchina vera?

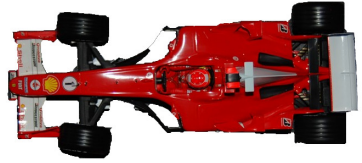
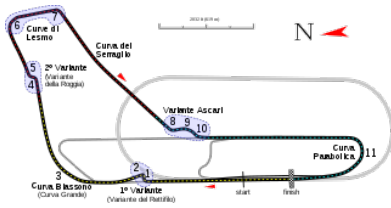


Figura 2: La mappa di un circuito e una macchinina sono esempi di oggetti riscalati. (figura di Will Pitenger e foto di Premnath Kudva, licenze Creative Commons)

Risolviamo i quesiti del Problema 3. Il circuito disegnato da Daniele è ottenuto, da quello reale, per mezzo di una similitudine di fattore $q = 1/1000$. La lunghezza della pista è una misura 1-dimensionale, e quindi riscalda dello stesso fattore q della similitudine. Dunque una curva di lunghezza 5793 m , riscalata, risulterà di lunghezza $q \cdot 5793\text{ m} = 5,793\text{ m}$. L'area è invece una misura 2-dimensionale e dunque l'area racchiusa dal circuito in scala è pari a q^2 volte l'area reale. Dunque l'area reale si ottiene moltiplicando per $1/q^2 = 1.000.000$ e risulta quindi pari a 6,5 milioni di metri quadri (ovvero 6,5 chilometri quadri). Per quanto riguarda la vernice utilizzata per dipingere la macchinina, possiamo assumere (non avendo maggiori informazioni a disposizione) che questa sia proporzionale all'area della carrozzeria della macchinina. E dunque, come l'area, sarà una misura 2-dimensionale. In questo caso il fattore di scala è $q = 1/50$ e dunque dividere per q^2 significa moltiplicare per $50^2 = 2500$. Stimiamo quindi che sarebbero necessari 2500 tubetti di vernice per dipingere la vettura reale.

Problema 4. Osserviamo che i fogli di formato A4 (quelli usualmente utilizzati nelle macchine fotocopiatrici o nei quadernoni) hanno come forma un rettangolo che se diviso a metà lungo il lato più lungo dà origine a due fogli di formato A5 (quelli usualmente

utilizzati nei quaderni piccoli) che hanno le stesse proporzioni del foglio iniziale. Qual è il rapporto dei due lati di un foglio A4?

Sapendo che il formato A4 è a sua volta la metà dell'A3, l'A3 metà dell'A2, l'A2 metà dell'A1, l'A1 la metà dell'A0 e sapendo che il foglio di formato A0 ha un'area di 1 metro quadro, calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.

Il foglio A4 ha area doppia del foglio A5. Se q è il rapporto di similitudine tra i due formati, essendo l'area una misura 2-dimensionale, si ha dunque $q^2 = 2$ da cui $q = \sqrt{2}$. Significa quindi che il rapporto tra i lati lunghi dei due formati è $\sqrt{2}$, ma il lato lungo del foglio A5 è uguale al lato corto del foglio A4 dunque il rapporto tra i due lati del foglio (sia A4 che, di conseguenza, A5) è $\sqrt{2}$.

Ad ogni suddivisione del foglio A0 l'area si dimezza, quindi il formato A4 ha una area pari a $1/2^4 = 1/16$ dell'area del formato A0 cioè $1/16$ di metro quadro. Chiamata x la lunghezza del lato corto, il lato lungo è $\sqrt{2}x$ (per quanto visto prima) e dunque l'area è $1/16 m^2 = \sqrt{2}x^2$ da cui si ricava la lunghezza del lato corto

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} m = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} m \approx 21,02 \text{ cm}$$

e di conseguenza il lato lungo

$$\sqrt{2} \cdot x \approx 29,73 \text{ cm}.$$

Misure 0-dimensionali

Finora ci siamo occupati solamente delle misure di dimensione 1, 2 e 3. Vivendo in uno spazio 3-dimensionale queste sono le dimensioni su cui possiamo avere una diretta esperienza.

Dal punto di vista matematico non c'è però una limitazione fisica. Ha perfettamente senso definire e utilizzare misure di dimensione maggiore alla terza. Non vogliamo qui entrare in

questo ambito che sarebbe affascinante, ma ci porterebbe molto lontano dagli altri concetti su cui intendiamo concentrarci. Possiamo però dedicarci per un attimo all'altro estremo dello spettro: quali sono le misure di dimensione 0? La dimensione 0 è quasi banale, ma può essere utile osservare come abbia perfettamente senso e rientri nel contesto generale che stiamo descrivendo.

Problema 5. *La macchinina di formula uno di Daniele è in scala 1 : 50. Sapendo che la macchinina vera ha quattro ruote, quante ruote ha la macchinina in scala?*

Il concetto, ovvio, che vogliamo mettere in evidenza è il fatto che ci siano delle misure che sono invarianti per riscaldamento. Una di queste è il *numero* ovvero la misura che *conta* gli elementi di una figura. Questa risulta essere una misura 0-dimensionale, in quanto il numero di elementi di una figura riscalata di un fattore q viene moltiplicato per $q^0 = 1$ cioè resta invariato.

La dimostrazione del teorema di Pitagora

Al matematico ungherese Paul Erdős piaceva immaginare ci fosse un libro “divino” in cui tutti i teoremi matematici venissero dimostrati con procedimenti eleganti e sintetici. La proprietà di riscaldamento dell'area ci permette di proporre una dimostrazione, essenziale e sintetica, del teorema di Pitagora.

Dobbiamo prima capire l'essenza dell'enunciato del teorema. Quando si afferma che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti, non è veramente importante che la figura geometrica scelta sia un quadrato. Se ad esempio invece di un quadrato usassimo un pentagono regolare, avremmo comunque che l'area del pentagono costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei pentagoni costruiti sui cateti in quanto l'area del pentagono è

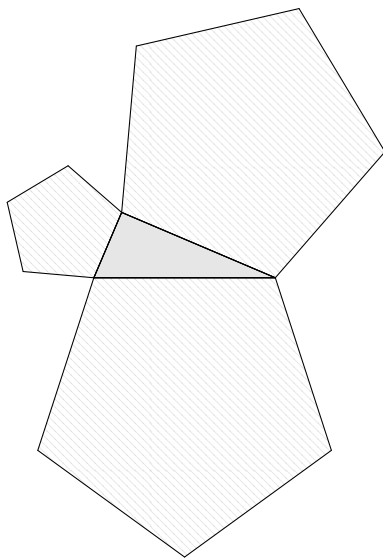


Figura 3: L'area del pentagono costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei pentagoni costruiti sui cateti.

proporzionale al quadrato del lato, essendo l'area una misura 2-dimensionale (Figura 3).

Dunque il teorema di Pitagora è equivalente ad affermare che una volta scelta una figura qualunque, se questa viene riscalata in proporzione alla lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, la sua area risulterà uguale alla somma delle aree delle figure riscalate in proporzione della lunghezza dei cateti. Se il teorema vale per una certa forma fissata, allora varrà per qualunque forma e in particolare per il quadrato.

Per dimostrare il teorema è quindi sufficiente scegliere una forma opportuna... quella che scegliamo è il triangolo stesso!

Se ABC è il triangolo con un angolo retto in C , suddividiamo il triangolo in due parti tracciando l'altezza CH rispetto all'ipotenusa. I triangoli ACH e BCH sono simili al triangolo

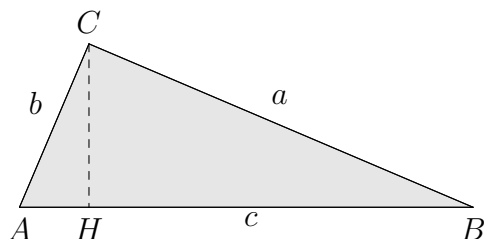


Figura 4: La dimostrazione del teorema di Pitagora può essere fatta semplicemente tracciando l'altezza rispetto all'ipotenusa.

ABC perché sono rettangoli in H e condividono un angolo in A o in B . Tali triangoli sono quindi simili tra loro e ognuno di essi ha come ipotenusa uno dei tre lati del triangolo iniziale ABC . È d'altronde ovvio che l'area del triangolo ABC è uguale alla somma delle aree di ACH e BCH e dunque il teorema è dimostrato.

Possiamo ripetere il ragionamento in maniera più formale. Se chiamiamo a, b le lunghezze dei cateti e c la lunghezza dell'ipotenusa possiamo osservare che il triangolo BCH si ottiene riscalandolo il triangolo ABC di un fattore a/c mentre il triangolo ACH si ottiene sempre da ABC ma con un fattore di riscaldamento pari a b/c . Chiamata $\mathcal{A}$ l'area del triangolo ABC si ha che (visto che l'area è una misura 2-dimensionale) l'area di ACH è pari a $(a/c)^2 \mathcal{A}$ e l'area di BCH è pari a $(b/c)^2 \mathcal{A}$, dunque si ottiene

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 \mathcal{A} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

da cui, semplificando $\mathcal{A}$, e moltiplicando ambo i membri per c^2 si ottiene

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

R	
R_1	R_2
R_3	R_4

Figura 5: Un rettangolo può essere suddiviso in quattro rettangoli ognuno dei quali è una copia dell'originale riscalato di un fattore $1/2$.

Dimensioni frazionarie: i *frattali*

Cerchiamo di determinare ora un metodo per definire la dimensione di una figura geometrica.

Se consideriamo un rettangolo R osserviamo che R può essere suddiviso in quattro rettangoli R_1, R_2, R_3, R_4 simili a R con un fattore di scala $q = 1/2$. Se m è una generica misura d -dimensionale, cioè una misura che soddisfa la relazione $m(qA) = q^d m(A)$, si avrà allora

$$m(R) = m(R_1) + m(R_2) + m(R_3) + m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d} m(R)$$

(con $R/2$ si intende il rettangolo che si ottiene riscalando R di un fattore $1/2$). Questa relazione risulta banalmente vera se $m(R) = 0$ oppure se $m(R) = \infty$. Ad esempio se $d = 3$ la misura m sarebbe il volume e si avrebbe chiaramente $m(R) = 0$ (un rettangolo è assimilabile ad un parallelepipedo di altezza zero, quindi di volume zero). Viceversa se scegliessimo $d = 1$ la misura m sarebbe la lunghezza e si avrebbe $m(R) = \infty$ (un rettangolo è assimilabile ad una unione infinita di segmenti, quindi deve avere lunghezza infinita). Se però andiamo a cercare un d per il quale si abbia $m(R) \neq 0$ e $m(R) \neq \infty$, allora possiamo dividere

ambo i membri di questa uguaglianza per $m(R)$ ottenendo:

$$1 = \frac{4}{2^d}$$

da cui $2^d = 4$ ovvero $d = \log_2 4 = 2$. Dunque $d = 2$ è l'unica dimensione per la quale il rettangolo può avere una misura finita e non nulla.

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto suddividendo il rettangolo in 9 rettangoli ognuno dei quali riscalato di un fattore $1/3$.

Proviamo a ripetere l'esperimento con un cubo C . In questo caso il cubo può essere suddiviso in 8 cubetti riscalati di un fattore $1/2$. Si otterrà dunque

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d}m(C)$$

da cui, dividendo per $m(C)$ si ottiene $2^d = 8$ e quindi $d = 3$ come ci saremmo aspettati.

Questo ragionamento non può essere fatto con qualunque figura (almeno non così facilmente). L'importante proprietà che stiamo sfruttando è che queste figure hanno la caratteristica di poter essere suddivise in un certo numero di copie riscalate di sé stesse. Questa proprietà si chiama *autosimilarità* ed è soddisfatta da altre figure molto interessanti: i frattali autosimiliari.

Consideriamo ad esempio la *curva di Koch*. Tale curva si ottiene partendo da un segmento (diciamo di lunghezza unitaria). Il segmento viene suddiviso in tre parti, si rimuove la parte centrale e la si sostituisce con i due lati del triangolo equilatero la cui base è il segmento rimosso. Quello che si ottiene è una curva spezzata formata da quattro segmenti di lunghezza $1/3$. Su ognuno di questi quattro segmenti si può ripetere la stessa operazione: si suddivide in 3 parti, si rimuove la parte centrale e la si sostituisce con due nuovi segmenti di lunghezza $1/9$. Questo

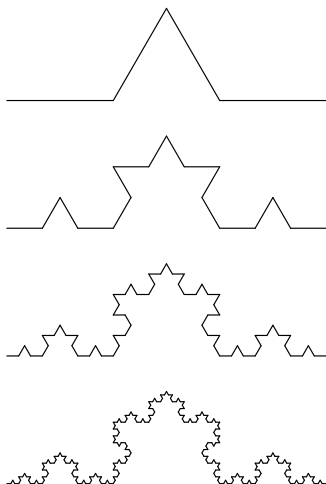


Figura 6: Le prime quattro iterazioni nella costruzione della curva di Koch.

procedimento può essere ripetuto *all'infinito* fino ad ottenere una figura *frattale* chiamata appunto curva di Koch².

Questa figura è *autosimilare* in quanto l'intera figura K è unione di 4 pezzi, ognuno dei quali è una perfetta copia dell'originale, riscalata di un fattore $1/3$. Possiamo quindi valutare la dimensione di questo oggetto, come abbiamo fatto con il rettangolo e il cubo. Si ha infatti:

$$m(K) = 4 \cdot m(K/3) = \frac{4}{3^d} \cdot m(K)$$

da cui, supponendo $0 < m(K) < \infty$, si ottiene

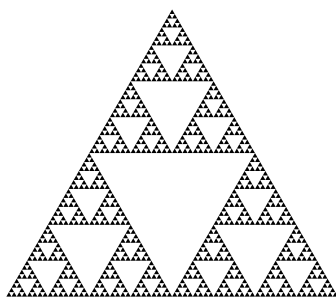
$$1 = \frac{4}{3^d}$$

²Cosa voglia dire esattamente “ripetere all'infinito” e come mai in questo processo “al limite” si ottenga veramente qualcosa, è un fatto assolutamente non banale che può essere affrontato solamente in un corso avanzato di matematica.

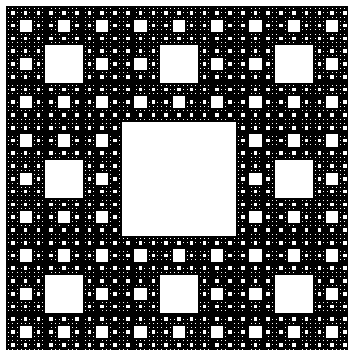
e quindi $d = \log_3 4 \approx 1.26$. Quello che abbiamo trovato è dunque una figura di dimensione frazionaria, intermedia tra 1 e 2. Si può in effetti verificare che la curva ottenuta ha lunghezza infinita (si provi, per esercizio, ad esprimere la lunghezza della n -esima iterata nella costruzione e si faccia il limite di tale lunghezza per $n \rightarrow \infty$). D'altra parte ha area nulla. È però possibile definire una misura intermedia tra la lunghezza e l'area che valuta la misura di questa curva dando un risultato finito. In effetti per qualunque $d \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$ è possibile definire una misura $\mathcal{H}^d$ (misura di Hausdorff) che abbia dimensione d . Nei casi particolari $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$ questa misura coincide effettivamente con la lunghezza, l'area e il volume. Nel caso $d = 0$ questa misura non è altro che la misura che *conta* il numero di punti. Per valori non interi di d le misure di Hausdorff ci permettono di misurare i frattali.

Lasciamo per esercizio il divertimento di determinare la dimensione delle seguenti figure autosimiliari (nel caso dell'antenna, il calcolo richiede qualche accortezza in più, il risultato corretto è $d = 2$).

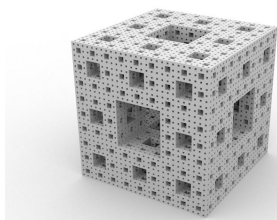
*Emanuele Paolini,
Professore Associato, Dipartimento di Matematica di Pisa*



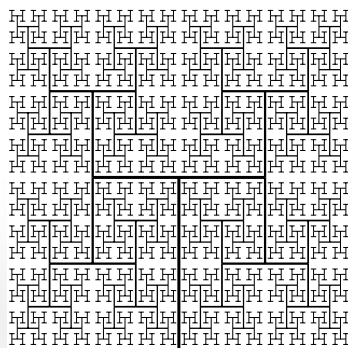
(a) triangolo di Sierpinski



(b) tappeto di Sierpinski



(c) spugna di Menger



(d) antenna frattale

Figura 7: Frattali autosimili.

Leonhard Euler e il problema dei ponti

Da qualche giorno una comitiva di turisti tedeschi è in visita a Roma. Durante una delle loro interminabili passeggiate pomeridiane uno di essi domanda ai compagni se sia possibile intraprendere un'escursione che attraversi una sola volta ciascuno dei ponti sul Tevere.

I più sportivi del gruppo accolgono immediatamente la sfida e propongono di procedere per tentativi: in fin dei conti Roma è veramente una splendida città da visitare! Altri, in verità piuttosto pigri, giudicano questa proposta poco pratica. Essi affermano che per verificare tutti i percorsi possibili si debbano effettuare troppe passeggiate.

A questo punto interviene un turista appassionato di storia della matematica che afferma di aver già sentito parlare di un simile rompicapo. Questo enigma, ambientato per la prima volta a Königsberg, venne infatti risolto 300 anni fa dal grande matematico svizzero Leonhard Euler (1707 - 1783), conosciuto in Italia con il nome di Eulero. In Figura 8 è presentata una mappa dell'antica città di Königsberg (oggi parte dell'exclave russa di Kaliningrad al confine tra Polonia e Lituania) con evidenziato il percorso del fiume Pregel (oggi Pregolja) e i suoi ponti.

Eulero non solo rispose all'enigma nel caso particolare della città di Königsberg, ma enunciò una regola generale valida per ogni città. Per risolvere questo dilemma Eulero impiegò sei mesi di lavoro e introdusse alcuni strumenti matematici che sono alla base della teoria dei grafi e della topologia moderna. Il quesito enunciato (e risolto) da Eulero può essere formulato nel modo seguente.

Problema. (Dei ponti) *Per qualsiasi città e per qualsiasi disposizione di ponti e rami di fiume, dire se è possibile scegliere un punto di partenza e un punto di arrivo e quindi svolgere una*

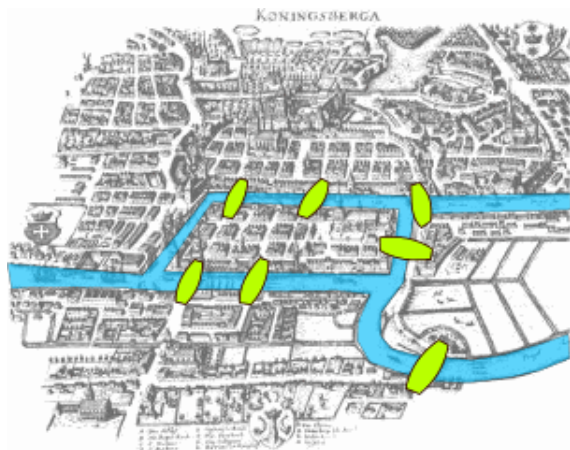


Figura 8: Il percorso del fiume Pregel con i ponti di Königsberg

passeggiata che attraversi ciascuno dei ponti esattamente una volta.

Passiamo ora ad una trattazione più “matematica” del nostro problema. Armiamoci pertanto di carta, matita, pazienza e buona volontà e iniziamo a ripercorrere alcuni passaggi del ragionamento di Eulero.

Con riferimento alla Figura 9 (il disegno sulla sinistra di questa immagine è una riproduzione dell’originale di Eulero), consideriamo la città di Königsberg e disegniamo su un foglio uno schema (parte destra) - che chiameremo *grafo* - con dei pallini che corrispondono ai lembi di terra della città e dei segmenti che rappresentano i ponti. Nel linguaggio matematico chiamiamo *vertici* i pallini e *archi* i segmenti.

Un grafo si dice *connesso* se comunque scegliamo due suoi vertici, esiste sempre un cammino lungo gli archi del grafo che congiunga tali vertici. Nel linguaggio comune ciò equivale ad affermare che è possibile disegnare il grafo senza mai staccare la penna dal foglio. Per comprendere questa nozione consideriamo

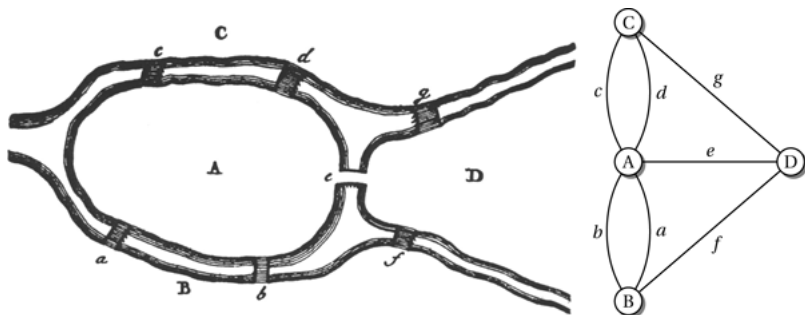


Figura 9: Disegno originale di Eulero e grafo associato

ad esempio Budapest. Fino alla fine del XIX secolo non c'erano ponti che collegassero le due sponde della città. Il grafo era dunque costituito da due vertici e nessun arco. Anche il nome della città è emblematico: Budapest infatti è nata in seguito alla fusione delle due *componenti connesse* Buda e Pest. Se abitassimo in una città con grafo non connesso sarebbe impossibile risolvere il problema dei ponti: potremmo collegare le sponde viaggiando in battello o mongolfiera, ma mai passeggiando.

Possiamo quindi *restringere* il nostro campo d'indagine alle sole città con grafo connesso. Riferendoci alla mappa della città di Königsberg otteniamo il grafo rappresentato nella parte destra della Figura 9. Invitiamo il lettore a disegnare il grafo della propria città. Attenzione: se abitate in una città senza fiumi il vostro grafo sarà costituito da un solo vertice!

Se ci pensiamo un attimo (in matematica questo procedimento si chiama *astrazione*) il problema dei ponti equivale al seguente quesito dal sapore decisamente più matematico.

Problema. (Del grafo) *Dire se è possibile scegliere un vertice di partenza e un vertice di arrivo e quindi disegnare un grafo connesso senza passare due volte per lo stesso arco.*

Abbiamo dunque *modellizzato* il problema concreto dei ponti e

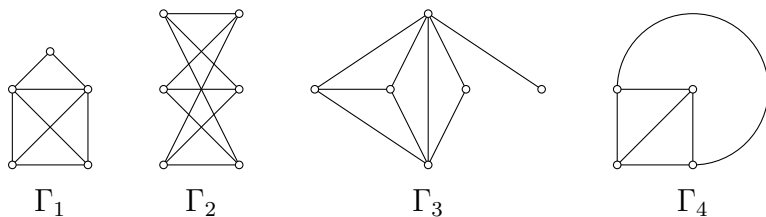


Figura 10: Alcuni esempi di grafi connessi

lo abbiamo riformulato in un problema che riguarda grafi, vertici e archi. In Figura 10 sono presentati alcuni esempi di grafi connessi. Per familiarizzare con questo nuovo problema possiamo provare a cercare una soluzione per questi casi particolari. Potrebbe però capitare che per alcuni di essi sia impossibile trovare una soluzione!

Astraendo il problema della passeggiata, Eulero fu in grado di eliminare gli aspetti incidentali della configurazione di ponti della città di Königsberg e di proporre una regola generale che fosse valida per qualsiasi città. Proprio questo è uno dei punti di forza della sua brillante soluzione.

Per risolvere il problema del grafo seguiamo il seguente *algoritmo*. Questo termine matematico indica una sequenza di operazioni che devono essere seguite passo passo... Esattamente quello che in cucina chiamiamo ricetta!

1. Numeriamo con $v_1, \dots, v_k$ i vertici del grafo;
2. Per ogni vertice v_j del grafo Γ calcoliamo il grado $\deg_\Gamma(v_j)$ dove il grado è uguale al numero di archi che passano per il vertice v_j ;
3. Calcoliamo il numero E_Γ di vertici con grado dispari.

Intuitivamente ogni vertice del grafo corrisponde ad una zona di terraferma, mentre il grado di un vertice è uguale al numero

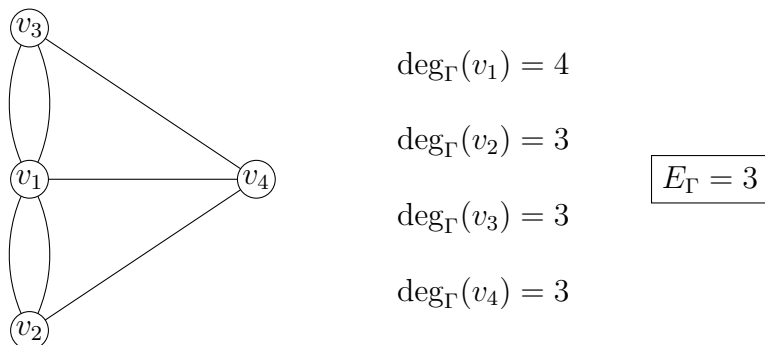


Figura 11: Calcolo del numero E_{Γ} per il grafo della città di Königsberg

di ponti che partono da tale zona. Per capire questo metodo suggeriamo di ricopiare il disegno presentato in Figura 11 e successivamente di provare a calcolare il numero E_{Γ} per ciascuno dei grafi riprodotti in Figura 10.

Siamo ora pronti per presentare la soluzione del problema del grafo. Il seguente teorema, enunciato e dimostrato (con alcune piccole imprecisioni) da Eulero in una serie di articoli pionieristici pubblicati negli anni quaranta del XVIII secolo, rappresenta uno dei più straordinari risultati della matematica del periodo illuminista.

Teorema. (Eulero) *È possibile risolvere il problema del grafo se e solo se $E_{\Gamma} \leq 2$.*

Questo risultato è all'origine di un ramo della matematica contemporanea chiamato *topologia*. La soluzione del problema dei ponti infatti *non* dipende dalle proprietà *metriche* della città, quali ad esempio la distanza tra i ponti, la superficie dei lembi di terraferma, la larghezza delle sponde del fiume. Al contrario, essa dipende unicamente da proprietà *intrinseche* della città, quali ad esempio il numero di ponti che partono da ciascuna zona di terraferma. La topologia è quella branca della matematica che

studia le proprietà intrinseche degli oggetti geometrici. Il lavoro di Eulero pose quindi le basi per lo sviluppo di un intero campo di indagine della moderna ricerca matematica.

Riferendoci alla Figura 11 deduciamo che per la città di Königsberg non è possibile svolgere una passeggiata che attraversi ciascuno dei ponti esattamente una volta. Se abitassimo a Königsberg non sarebbe possibile risolvere il problema dei ponti per tentativi: qualunque nostra passeggiata ci riporterebbe almeno una volta sullo stesso ponte. Il metodo di Eulero, sebbene poco sportivo, è estremamente efficace.

Invitiamo il lettore a risolvere il problema dei ponti per la città di Roma e anche per la propria città natale. Buon divertimento!

Elia Saini,

*Laureato triennale a Pisa, dottorando in Matematica presso
l'Università di Friburgo (CH)*

Notakto

Descrizione e regole

Il gioco che vi presentiamo si chiama Notakto ed è una variante del celebre gioco Tic-Tac-Toe, meglio noto in Italia come “Tris”. L’invenzione di Notakto è attribuita a Bob Koca, professore di matematica e giocatore di backgammon, che dice di aver inventato il gioco nel 2015 grazie al suggerimento della sua nipotina di 5 anni. Quello che serve è solo carta e penna!

Proprio come in Tic-Tac-Toe bisogna disegnare una tavola con 3×3 quadratini, ma invece di usare cerchi e croci (X) come si fa nel Tris, entrambi i giocatori dovranno utilizzare solo croci. L’obiettivo del gioco, a differenza di quello che forse state pensando, non è posizionare tre croci in fila, ma proprio l’opposto: il primo giocatore che mette in fila tre croci... *perde*! Le regole sono poche e semplici: a turno ogni giocatore deve mettere una X in una delle caselle vuote; il giocatore che riempie una riga, una colonna o una diagonale con tre croci, regalerà la vittoria all’avversario. In Notakto è impossibile pareggiare, ci sarà sempre un vincitore.

Esistono inoltre varie versioni di Notakto, perché è possibile giocare su più scacchiere contemporaneamente, come spiegheremo più avanti.

Notakto è un gioco combinatorio finito, cioè a “carte scoperte”, per due giocatori: per i partecipanti non ci sono informazioni nascoste nè elementi casuali.

Strategia vincente

Una domanda naturale riguardo ai giochi combinatori è quella della *strategia vincente*: ci si pone cioè, il problema di capire

se un giocatore ha a disposizione una strategia che gli consente di vincere comunque giochi l'avversario. Inoltre, se esiste la strategia vincente, se sia il primo o il secondo giocatore a poterla attuare e quali siano in concreto le mosse vincenti.

A volte per poter scoprire la strategia vincente è necessario analizzare tutte le configurazioni possibili del gioco. Nel caso di Notakto giocato su una sola scacchiera però, la questione non risulta essere troppo complicata.

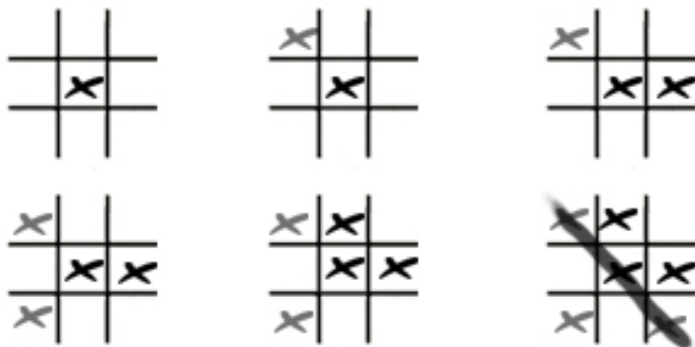
Come ha fatto notare Timothy Y. Chow, ricercatore del Dipartimento di Matematica del Massachusetts Institute of Technology, il giocatore che ha a disposizione una strategia vincente è il primo che inizia a giocare. Cerchiamo di intuirne la motivazione.

- Il primo giocatore (che chiameremo A) inizia mettendo la croce nel quadrato centrale,
- il secondo (che chiameremo B) fa una qualsiasi altra mossa,
- Il giocatore A risponde mettendo una croce facendo una mossa a L (come il cavallo negli scacchi), cioè due quadrati orizzontali e uno verticale oppure due quadrati verticali e uno orizzontale, rispetto alla posizione della croce della mossa precedente (vedi Figura 12),
- B fa nuovamente una qualsiasi altra mossa
- A, come prima, fa una mossa a L.

Così facendo, qualsiasi altra mossa successiva fatta da B sarà sicuramente perdente per lui stesso.

Se invece il primo giocatore non conosce la strategia vincente, e quindi non inizia mettendo una croce nel tassello centrale, allora è il secondo giocatore a poter adottare una strategia vincente. La

Figura 12: Notakto su una scacchiera: una partita vinta dal primo giocatore.



strategia è indicata dal matematico inglese Kevin Buzzard ed è la seguente: il primo giocatore (A) mette una croce in un qualsiasi tassello, tranne il centrale. Il secondo giocatore (B) posiziona la X nel tassello opposto (rispetto al centro) a quello occupato dalla precedente X di A. Ciò rende il quadrato centrale inaccessibile. Successivamente B continua a rispondere alle mosse di A come prima, cioè, ogni volta che è il suo turno, posiziona la X nel tassello opposto a quello della mossa di A. In questo modo è facile osservare che sarà A a perdere.

Notakto su più scacchiere

È possibile giocare a Notakto anche con un numero arbitrario finito di scacchiere. Le regole del gioco in questo caso si modificano leggermente.

Quello che fa il primo giocatore è selezionare una delle scacchiere e mettere una X in uno dei suoi tasselli. Stessa cosa dovrà fare il secondo giocatore. Quando una scacchiera ha tre X in fila, non si potrà più scegliere, sarà ingiocabile. I due giocatori

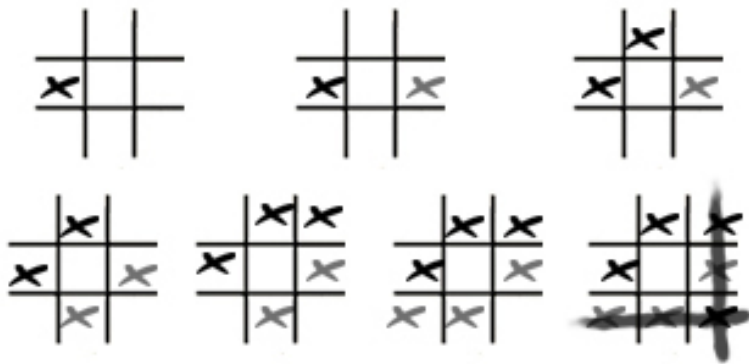


Figura 13: Notakto ad una scacchiera: se il primo giocatore inizia male, vince il secondo.

quindi si alternano come nel Notakto classico mettendo una X ad ogni mossa. Il gioco termina quando tutte le scacchiere sono nella configurazione perdente (cioè quella in cui ci sono tre croci disposte in fila) e il giocatore che, ponendo una X, giunge alla configurazione perdente nell'ultima scacchiera sarà quello perdente.

Qui vogliamo lasciare spazio a voi lettori perché possiate giocare e divertirvi con Notakto. Ci limitiamo a suggerire cosa succede se le scacchiere sono due.

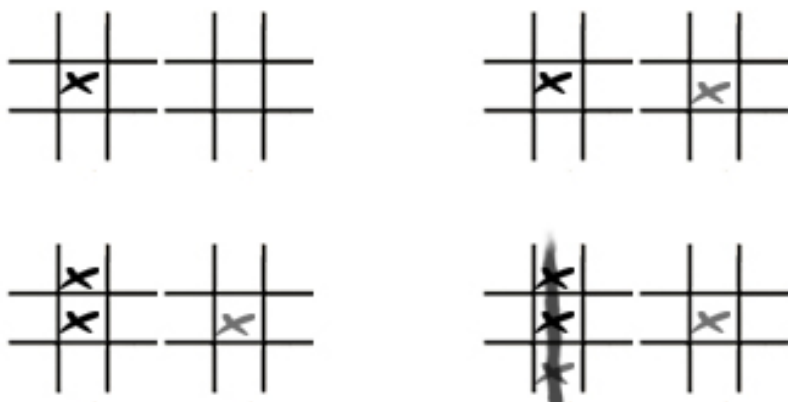
In questo caso accade che la situazione si capovolge e stavolta è il secondo giocatore ad avere una strategia vincente. Qualunque sia la prima mossa del primo giocatore A, al secondo giocatore B conviene mettere una X nel centro della scacchiera dove non ha giocato A.

Mostreremo due esempi importanti che si possono presentare giocando a Notakto su due scacchiere.

In Figura 14 il primo giocatore (A) gioca nella scacchiera di

sinistra mettendo una croce al centro. La strategia vincente per il secondo giocatore (B) prevede che metta una croce nel centro della scacchiera di destra. In questo modo, qualunque sia la mossa di A, B dovrà perdere su una delle due scacchiere rendendola ingiocabile, in modo da poter giocare da vincente nella scacchiera rimanente.

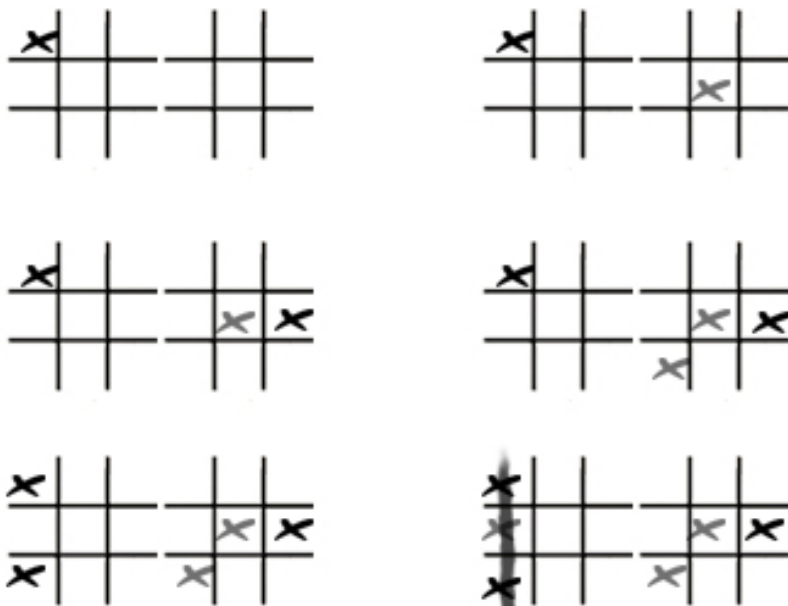
Figura 14: Notakto a due scacchiere: un primo esempio



Supponiamo ora che il giocatore A inizi giocando una X in un angolo di una delle due scacchiere. La strategia vincente per B prevede anche questa volta che risponda con una croce al centro dell'altra scacchiera. Ma cosa succede se A risponde mettendo la croce nella stessa scacchiera dove ha giocato B? La Figura 15 mostra un esempio. Anche in questo caso, a B converrà rendere una delle due scacchiere ingiocabile in modo da poter giocare da vincente nella scacchiera rimanente.

Per un'analisi più dettagliata potete consultare il link <http://gmmentalgy.m.blogspot.it/2012/05/how-to-play-and-win-notakto.html>

Figura 15: Notakto a due scacchiere: un altro esempio



Notakto App

Se ai vostri amici non piace giocare a Notakto, niente paura: anche per questo gioco esistono applicazioni per smartphone, disponibili per qualsiasi sistema operativo. Potrete giocare a Notakto con un livello di difficoltà che sarete voi a scegliere, dal più semplice al più difficile.

Adriana Vernice,

Studentessa Magistrale presso l'Università di Pisa

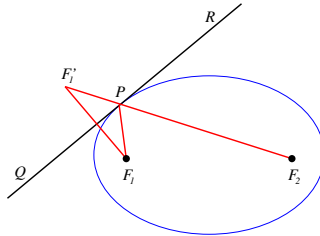
Esercizi

Esercizio 1. Sia (a, b, c) un punto della sfera di raggio 1 centrata nell'origine di un sistema cartesiano con i consueti assi x, y, z . Dire se è vero o falso che le coordinate a, b, c del punto soddisfano la seguente catena di disuguaglianze:

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$$

Esercizio 2. Da un fagiolo magico germoglia una piantina alta un centimetro, che ogni giorno cresce di $1/30$ della sua altezza. Dimostrare che dopo un anno la piantina avrà superato i 40 metri di altezza.

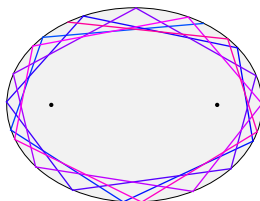
Esercizio 3. Premessa:



dati nel piano due punti F_1, F_2 e una retta che non interseca il segmento F_1F_2 , si ottiene F_1' come riflessione di F_1 rispetto alla retta, e poi si costruisce il punto P come intersezione fra la retta e $F_1'F_2$. Gli angoli $\widehat{F_1PQ}$ e $\widehat{F_2PR}$ sono uguali: questo, come è noto, implica che l'ellisse che ha per fuochi F_1, F_2 e passa per P è tangente alla retta data.

Consideriamo ora una ellisse con fuochi F_1, F_2 , e un segmento che collega due punti A_0 e A_1 dell'ellisse senza intersecare il segmento F_1F_2 . Supponiamo di far partire un raggio di luce da A_0 verso A_1 e che la luce si rifletta lungo l'ellisse secondo la legge consueta. Dimostrare che, dopo ciascuna delle riflessioni

successive, il raggio di luce continuerà a non intersecare il segmento F_1F_2 e si manterrà sempre tangente ad una stessa ellisse con i medesimi fuochi contenuta nell'ellisse di partenza.



Esercizio 4. Dato un poligono convesso con n lati numerati in senso orario con i numeri da 1 a n , determinare in quanti diversi modi si possono tracciare due diagonali che non si intersecano fra loro (si possono eventualmente intersecare in un vertice).

Le soluzioni di questi esercizi compariranno sulla pagina web dell'orientamento dedicata al giornalino

<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>

ai primi di Marzo. Per avere suggerimenti subito scriveteci all'indirizzo e-mail counseling.dm.unipi@gmail.com

Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una breve lista di libri, pagine web e film che possono essere uno spunto per ulteriori approfondimenti. Alcuni contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti “più leggeri”.

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi;
- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.
- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann;
- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico;
- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan;
- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore;
- A. Parlange, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi

matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo;

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.
- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni;
- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.
- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.

Per non confondere le idee ci siamo limitati a proporre una bibliografia essenziale. Di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- G. Van Sant, *Will Hunting - Genio ribelle*, 1997.
- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001
- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.
- D. Aronofsky, *Il - Il teorema del delirio*, 1998.
- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:
<http://maddmaths.simai.eu/>
- Versione on-line del giornalino:
[https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/
il-giornalino-degli-open-days](https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days)
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
<http://www.dm.unipi.it/webnew/>
- Sito delle olimpiadi di matematica:
<http://olimpiadi.dm.unibo.it/>
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
<http://www.sns.it/>
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:
<http://poisson.phc.unipi.it/>

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito (<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento>).

STAMPATO IN PROPRIO