

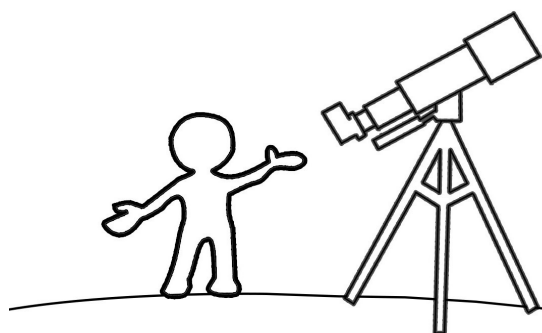
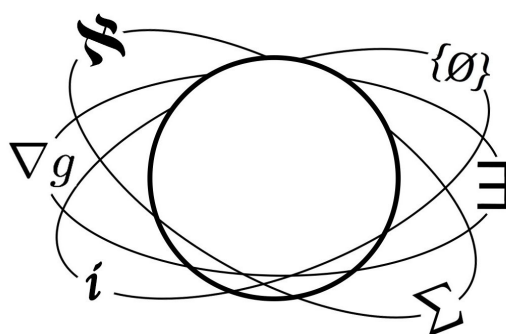
n° 5

Pisa, 21, 22 e 25 settembre 2017

Matematica

il giornalino degli OpenDays

...notizie, giochi e pillole di matematica



2,71828182845904523536028747135266249775724709 36999595749669676277240... 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Su indicazione della Commissione Orientamento.

Realizzazione a cura degli studenti Counseling 2017:

Agnese Gini
Denise Massa
Elena Rossi

Coordinamento:

Prof. Giovanni Gaiffi

Grafica copertina:

Elena Rossi

Si ringraziano gli autori degli articoli e il Prof. Pietro Di Martino per il contributo
dato a questo numero.

Introduzione

Questo giornalino, realizzato da studenti del corso di Laurea in Matematica, nasce in occasione degli Open Days, un evento di orientamento organizzato ogni anno dall'Università di Pisa. Seguendo la scia delle edizioni precedenti, il quinto numero del giornalino ha lo scopo di incuriosire e raccontare un po' che cosa sia la matematica anche al di là degli argomenti scolastici¹.

Per prima cosa potrete trovare una descrizione del corso di laurea, seguita da qualche statistica sugli impieghi dei laureati al termine dei loro studi. Potrete così farvi un'idea su quali possano essere i vari sbocchi lavorativi se sceglierete di seguire questo percorso di studi.

In seguito troverete tre articoli divulgativi:

- è possibile suddividere un panettone in tanti pezzi e poi rimetterli insieme in modo da formare due panettoni identici a quello iniziale? No, vero? O forse sì ... Alessandro Berarducci, professore di Logica Matematica nel nostro Dipartimento, ci presenta *Il paradosso di Banach-Tarski*;
- vi siete mai chiesti come si fa a inviare una sonda spaziale da una stazione di lancio sulla Terra fino a un altro corpo celeste? Daniele Serra, assegnista di ricerca in Fisica Matematica presso l'Università di Pisa, ci racconta *La Matematica dei Viaggi Spaziali*.
- regole e spunti matematici del TwixT, un gioco divertente e da fare in compagnia.

¹<https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days-0>

Infine, per i più curiosi, abbiamo raccolto una lista di pagine web, libri e film per darvi ulteriori spunti interessanti e qualche approfondimento.

Buona lettura e buon divertimento!

Indice

1	Il corso di Laurea	4
2	Il paradosso di Banach-Tarski	8
2.1	Teorema di Banach-Tarski	18
3	La Matematica dei Viaggi Spaziali	31
3.1	Orbite ellittiche	31
3.2	Sonde spaziali e missili balistici	34
3.3	Andiamo su Giove!	37
3.4	Esplorazione planetaria	41
4	Paper and pencil: TwixT!	43
	Libri, pagine web ed altri media	49
	Prossime iniziative	52

1 Il corso di Laurea

Il corso di Laurea in Matematica si divide formalmente in Laurea triennale e Laurea magistrale. La prima, corrispondente al titolo internazionale *Bachelor's degree*, prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale. Esistono due possibili curricula:

- Il curriculum fondamentale,
- Il curriculum computazionale.

Sfruttando la collaborazione con altri Dipartimenti, il primo approfondisce concetti di Fisica, mentre il secondo di Analisi Numerica e Informatica.

Al momento dell'immatricolazione vi verrà chiesto di scegliere il curriculum a cui iscrivervi. Non preoccupatevi se siete indecisi: come potete notare dalla tabella 1, i corsi sono identici fino al primo semestre del secondo anno, quindi avrete tempo per modificare la vostra scelta nel modo migliore, senza che questo influisca minimamente sulla vostra carriera.

Naturale prosecuzione è il biennio magistrale, alla fine del quale acquisirete il titolo omonimo (*Master degree* nei paesi anglofoni). È divisa in quattro diversi curricula, che vi permetteranno di approfondire le branche della matematica che più vi hanno interessato durante il vostro percorso di studi.

Prospettive lavorative

Molti sono i possibili sbocchi lavorativi di un laureato in Matematica!

Nella figura 1 riportiamo la media della situazione occupazionale degli ultimi due anni a dodici mesi dalla laurea. Dopo la

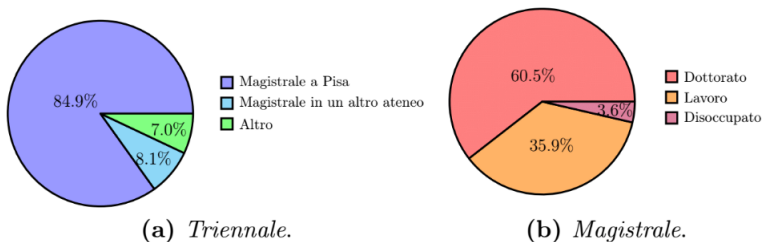


Figura 1: Dati occupazionali 2014-2015 ad un anno dalla laurea.

triennale (figura 1), i dati sono chiari: più del 90% prosegue con i due anni magistrali, superati i quali la situazione è più eterogenea. La maggior parte degli ex-studenti magistrali prosegue la propria formazione con un dottorato di ricerca (PhD), muovendo perciò i primi passi verso la carriera accademica. Molti invece entrano nel mondo del lavoro, dove la figura del matematico è molto apprezzata. La *forma mentis* acquisita negli anni permette infatti ai nostri laureati di eccellere nel problem solving. Questo compensa largamente una preparazione forse meno specifica rispetto ad altri coetanei, come ingegneri, informatici ed economisti. Non c'è dunque da stupirsi se questi dati sono molto positivi.

Fai parte di quel 90% che decide di proseguire gli studi? Ti interessa insegnare? Ti interessa lo studio dei processi di apprendimento/insegnamento della matematica e ti piacerebbe intraprendere un possibile percorso di ricerca su questo? Il Dipartimento di Matematica di Pisa ha una lunghissima tradizione di ricerca in didattica della Matematica (i primi nuclei di ricerca furono sviluppati proprio qui) e offre, alla magistrale, un curriculum didattico-storico - cosa importante e assolutamente non scontata - tenuto da ricercatori attivi a livello di ricerca internazionale, con la possibilità di fare tirocinio nella scuola (e

vedere cosa cambia a “passare dall’altra parte”) e di confrontarsi con il gruppo di insegnanti collaboratori del gruppo di ricerca (che abbraccia lo spettro educativo dalla scuola dell’infanzia alla secondaria di secondo grado).

Se siete curiosi di sapere cosa altro può fare un matematico nel mondo del lavoro, potete visitare la pagina web *Matematici al lavoro*:

<https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0>

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale.

Fondamentale	Computazionale
I anno	
Aritmetica (9 CFU)	
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)	
Laboratorio di comunicazione mediante calcolatore (3 CFU)	
Analisi matematica 1 (15 CFU)	
Geometria 1 (15 CFU)	
Fisica 1 (9 CFU)	
II anno	
Algebra 1 (6 CFU)	
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)	
Inglese scientifico (6 CFU)	
Analisi matematica 2 (12 CFU)	
Geometria 2 (12 CFU)	
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)	
Laboratorio didattico di matematica computazionale (6 CFU)	
<i>Esame a scelta</i> (6 CFU)	Algoritmi e strutture dati (6 CFU)
III anno	
Sistemi dinamici (6 CFU)	
Fisica 2 con laboratorio (9 CFU)	Calcolo scientifico (6 CFU)
Fisica 3 (6 CFU)	Laboratorio computazionale (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)	Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
	Ricerca operativa (6 CFU)
<i>4 Esami a scelta</i> (24 CFU)	<i>3 Esami a scelta</i> (18 CFU)
Prova finale (9 CFU)	

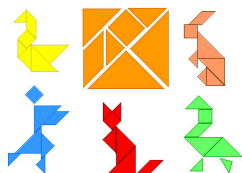
Il paradosso di Banach-Tarski

Queste note sono la rielaborazione di una presentazione tenuta a Pisa presso la Domus Galileana il 12 Dicembre 2008. L'occasione per rimetterci le mani mi è stata fornita da Giovanni Gaiffi, per il giornalino legato alle attività di orientamento del Dipartimento di Matematica di Pisa, e da Alessandro Andretta, per l'iniziativa "Alpha Class" dei Dipartimenti di Matematica del Politecnico di Torino e dell'Università di Torino. Gli argomenti possono essere approfonditi nello splendido libro di Tomkowicz e Wagon [1] e coinvolgono molte aree della matematica (gruppi, misure, ecc.).

2 Il paradosso di Banach-Tarski

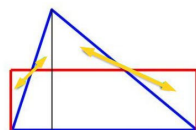
Congruenze per dissezioni

Due figure nel piano sono **congruenti per dissezioni** se una delle due può essere decomposta in un numero finito di pezzi poligonali che possono essere ricomposti (senza alterarne forma e dimensioni) in modo da formare l'altra figura.



Si intende che i vari pezzi non possano avere sovrapposizioni al di fuori dei bordi. La caratteristica principale delle congruenze per dissezioni è che conservano le aree.

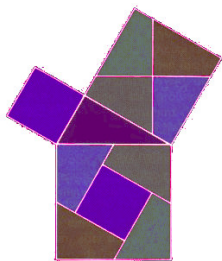
Possiamo ricavare la formula per l'area del triangolo (base per altezza diviso due) usando il fatto che un qualsiasi triangolo è congruente per dissezioni ad un rettangolo con la stessa base e un'altezza pari alla metà dell'altezza del triangolo.



Analogamente si dimostra che ogni parallelogramma è congruente per dissezioni ad un rettangolo (basta tagliare un triangolo rettangolo da uno dei due lati e spostarlo sul lato opposto). Un po' più difficile è dimostrare che ogni rettangolo è congruente per dissezioni ad un quadrato, e componendo queste costruzioni si può in effetti dimostrare che ogni poligono è congruente per dissezioni ad un quadrato. Tutto ciò era in gran parte noto agli antichi greci, mentre una dimostrazione moderna del fatto che due poligoni sono congruenti per dissezioni se e solo se hanno la stessa area si basa sui lavori di Wallace, Bolyai e Gerwien all'inizio del XIX secolo.

Il teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora afferma che, dato un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti. Del teorema esistono molte dimostrazioni, di cui alcune basate sulle congruenze per dissezioni, come nella figura qui sotto.

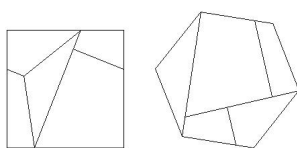
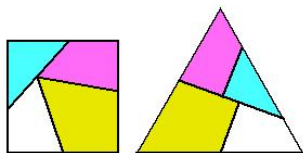


La dimostrazione per dissezioni di Henry Perigal (1801-1898), agente di cambio e matematico dilettante.

Il quadrato grande costruito sull'ipotenusa può essere dissezionato in cinque pezzi, che poi possono essere ricomposti per formare i due quadrati costruiti sui cateti. Sapreste dire cosa occorre verificare per assicurarsi che la dimostrazione sia valida?

Il triangolo e l'esagono regolari

La prova del fatto che poligoni con la stessa area siano congruenti per dissezioni (Teorema di Bolyai-Gerwien) non fornisce stime sul numero minimo di pezzi necessari, tuttavia nei casi concreti ci si può divertire a cercare di minimizzare il numero dei pezzi. Ad esempio per trasformare un triangolo equilatero in un quadrato con la stessa area bastano 4 pezzi, e per un esagono regolare ne bastano 5, ma la suddivisione non è affatto facile da trovare (o anche solo da verificare dopo averla vista)!



Proprietà delle congruenze per dissezioni

Come semplice esercizio vi propongo di verificare che le congruenze per dissezioni verificano la proprietà transitiva, ovvero

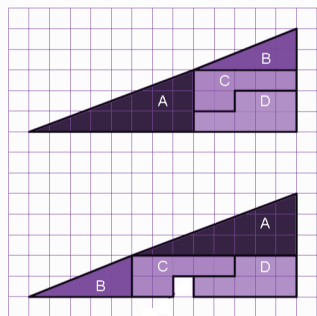
se X è congruente per dissezioni a Y e Y è congruente per dissezioni a Z , allora X è congruente per dissezioni a Z . Ad esempio avendo visto che un triangolo equilatero ed un esagono regolari sono entrambi congruenti per dissezioni ad un quadrato, ne segue che un triangolo equilatero è congruente per dissezioni ad un esagono regolare. Sapreste trovare i pezzi necessari?

Molto più difficile è invece dimostrare che se da due figure congruenti dissezioni sottraiamo due figure anch'esse congruenti per dissezioni, le figure risultanti sono ancora congruenti per dissezioni. Ad esempio se all'interno di due triangoli uguali facciamo due buchi di forma quadrata e delle stesse dimensioni, ma non necessariamente posizionati nello stesso modo, le figure risultanti sono ancora congruenti per dissezioni. Questa proprietà sottrattiva può in molti casi semplificare le dimostrazioni che due figure hanno la stessa area.

Trucco o magia?

Abbiamo detto che le congruenze per dissezioni conservano l'area, ma non abbiamo in effetti dato una definizione precisa di area. Sapendo, però, che un poligono è sempre congruente per dissezioni ad un rettangolo (o addirittura ad un quadrato), potremmo essere tentati di definire l'**area di un poligono** come il prodotto delle lunghezze dei lati di un rettangolo congruente per dissezioni al poligono dato. Per assicurarsi che ciò dia una buona definizione, occorrerebbe mostrare che il risultato non dipende da come si scelgono i pezzi della dissezione, e a tal fine sarebbe necessario far vedere che un poligono non può essere congruente per dissezioni ad un poligono più grande che lo contiene. In altre parole ci chiediamo se possa accadere che, attraverso un semplice spostamento di pezzi, si possa far “scompare” una porzione di una figura come in un gioco di prestigio. Ciò sembra

intuitivamente impossibile, ma un famoso puzzle di Dudeney sembra a prima vista mettere in discussione questa certezza:

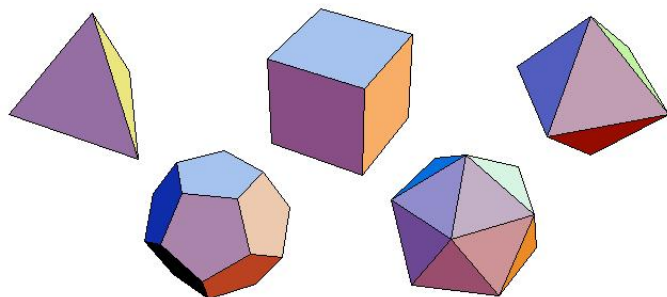


Un puzzle di Henry Ernest Dudeney,
1857-1930

Se non conoscete il trucco, la figura può lasciare sconcertati in quanto sembra mettere in crisi il concetto stesso di area. C'è però un inganno e in effetti si dimostra che simili “sparizioni” non possono capitare. Sapreste trovare l'inganno?

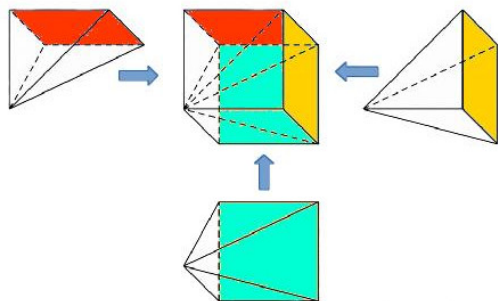
Passiamo alla terza dimensione: volume dei solidi

Abbiamo visto che nel caso dei poligoni l'avere la stessa area equivale all'essere congruenti per dissezioni e sparizioni di pezzi come nel puzzle di Dudeney possono solo essere frutto di inganno. Vediamo ora cosa succede per il volume dei solidi nello spazio tridimensionale.



Volume della piramide

Esattamente come un quadrato può essere diviso in due triangoli rettangoli, un minimo di riflessione mostra come un cubo può essere diviso in tre piramidi rettangole uguali, come nella figura.



$$\text{Volume della piramide rettangola} = \frac{\text{base} \times \text{altezza}}{3}$$

Ne deduciamo che, ammesso che esista una nozione sensata di volume, il volume della piramide rettangola deve essere dato dalla formula “ $\text{Base} \times \text{Altezza} / 3$ ”, dove per “Base” intendiamo l’area del quadrato di base. In altre parole, se il lato è lungo 1 metro, il volume della piramide rettangola è $1/3$ di metro cubo.

Principio di Cavalieri

Se la piramide ha una forma diversa il ragionamento precedente non si applica. Tuttavia, utilizzando il cosiddetto “principio di Cavalieri” possiamo determinare il volume di una piramide qualsiasi, non necessariamente rettangola o con base quadrata. Per illustrarne il funzionamento, consideriamo due piramidi solide, come nella figura, e poniamole su una stessa base orizzontale. Supponiamo che “affettando” le due piramidi con un piano parallelo alla base orizzontale si ottengano sempre due figure piane della stessa area. Il principio di Cavalieri afferma che in questo caso le due piramidi solide hanno lo stesso volume. Se le riempiamo di acqua, ne conterrebbero la stessa quantità.



Bonaventura Cavalieri, 1598-1647

Applicando il principio, si dimostra che il volume di una qualsiasi piramide è pari al volume di una piramide rettangola con la stessa area di base e la stessa altezza. Quindi il volume della piramide generica si calcola di nuovo con la formula $\text{Base} \times \text{Altezza} / 3$.

Per giustificare il principio di Cavalieri immaginiamo che le fettine, invece di essere infinitamente sottili, abbiano un certo spessore, molto piccolo rispetto alle dimensioni della piramide.

Il volume di una fettina può allora essere approssimato abbastanza bene dall'area della sua base per la sua altezza. Dico "approssimato" anziché calcolato esattamente perché la formula "area di base per altezza" presuppone che i lati delle fettine siano verticali anziché obliqui, dimodoché l'unione delle fettine viene a formare una struttura a gradini tipo ziggurat. Tuttavia facendo fettine sempre più piccole e sommando i loro contributi, l'errore totale che si commette può essere reso arbitrariamente piccolo, come si può vedere approssimando la piramide dall'interno e dall'esterno con due ziggurat, ottenendo al limite il volume della piramide. Su analoghe considerazioni si basa il principio di esaustione di Archimede, così come la moderna teoria dei volumi e degli integrali.

Il terzo problema di Hilbert

Possiamo estendere dal piano allo spazio il concetto di congruenza per dissezioni, semplicemente richiedendo che i pezzi della scomposizione siano poliedrali anziché poligonali (e che non vi siano sovrapposizioni al di fuori dei bordi). Possiamo allora chiederci se due poliedri con lo stesso volume siano sempre congruenti per dissezioni. In contrasto con quanto avveniva per l'area dei poligoni, la risposta è però negativa: risolvendo uno dei famosi problemi posti da Hilbert nel 1900, Max Dehn ha infatti dimostrato la cosa seguente:

“ Un cubo e un tetraedro non sono mai congruenti per dissezioni, ovvero non è possibile suddividere un cubo in un numero finito di poliedri che possono essere ridisposti in modo da formare il tetraedro. ”



Max Dehn, 1878-1952

Per chi voglia approfondire, diciamo solo che la dimostrazione

si basa sul fatto che se due poliedri X ed Y sono congruenti per dissezioni, allora detti $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ e $\beta_1, \dots, \beta_r$ i rispettivi angoli diedrali (gli angoli tra due facce adiacenti), esistono numeri interi positivi $m_1, \dots, m_s$ ed $n_1, \dots, n_r$ rispettivamente, tali che la differenza tra $m_1\alpha_1 + \dots + m_s\alpha_s$ e $n_1\beta_1 + \dots + n_r\beta_r$ è un multiplo intero di π (vedi [2]). Nel caso del tetraedro e del cubo, gli angoli diedrali sono rispettivamente $\alpha = \arccos(1/3)$ e $\beta = \pi/2$, e siccome α/β si dimostra essere irrazionale, una tale relazione non può sussistere, onde la non congruenza per dissezioni.

Il principio di continuità

Alla luce del risultato di Dehn, potrebbe sorgere il dubbio se esista un cubo dello stesso volume di un tetraedro. Una risposta positiva è però fornita dal principio di continuità: se teniamo fisso il tetraedro e ingrandiamo progressivamente un cubo inizialmente molto piccolo, dobbiamo necessariamente passare da cubi di volume decisamente inferiore a cubi di volume decisamente superiore a quello del tetraedro, e per continuità il volume dovrà passare per tutte le misure intermedie, assumendo anche esattamente quella del tetraedro.

Equiscomposizioni

Possiamo chiederci se il teorema di Dehn continui a valere rilassando la richiesta che i pezzi della dissezione siano poliedri e ammettendo quindi pezzi più complicati, come ad esempio quelli dei disegni di Escher (o meglio, l'equivalente in 3D).



Una suddivisione complicata del quadrato.

Per precisare le regole del gioco diamo alcune definizioni. Due figure geometriche sono **congruenti** se i punti dell'una corrispondono a quelli dell'altra tramite un'isometria, ovvero una corrispondenza che preserva le distanze. Nel caso di figure spaziali (ovvero in $\mathbb{R}^3$), questo significa che le due figure sono uguali, salvo il fatto che sono situate in modo diverso nello spazio, possibilmente ruotate, traslate o capovolte l'una rispetto all'altra (incluso il caso in cui una delle figure sia come l'immagine allo specchio dell'altra).

Diciamo che due figure X ed Y sono **equiscomponibili**, se è possibile partizionare X ed Y nello stesso numero finito di pezzi in modo che ciascun pezzo di X sia congruente al corrispondente pezzo di Y .

La differenza tra le equiscomposizioni e le congruenze per dissezioni è duplice: da un lato nelle equiscomposizioni si ammettono pezzi di forma arbitraria (non necessariamente poliedrali); dall'altro però si insiste sul fatto che i pezzi formino una partizione, ovvero siano del tutto disgiunti tra loro, non consentendo sovrapposizioni anche solo limitate ai bordi (che invece nelle congruenze per dissezioni erano trascurati).

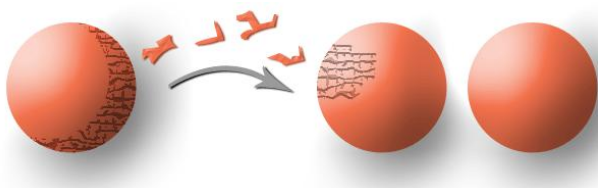
Si può dimostrare che se X ed Y sono congruenti per dissezioni sono anche equiscomponibili (ovvero si possono eliminare le sovrapposizioni dei bordi, ma al prezzo di usare pezzi più complicati). La domanda è se le equiscomposizioni possano risultare uno strumento più flessibile per dimostrare l'uguaglianza di due volumi. Come vedremo nella prossima sezione, se non mettiamo

limiti a quanto possano essere complicati i pezzi, le equiscomposizioni sono però talmente flessibili da risultare applicabili anche a figure con volume diverso!

2.1 Teorema di Banach-Tarski

Il teorema di Banach-Tarski stabilisce che dati due solidi qualsiasi con parte interna non vuota, essi sono sempre equiscomponibili, ovvero è possibile partizionare il primo in un numero finito di pezzi che possono essere ricomposti in modo da formare il secondo.

In particolare, è possibile partizionare un solido sferico in 5 parti che possono essere ricomposte in modo da formare due sfere dello stesso volume della sfera data.



E' inoltre possibile, contro ogni ragionevole aspettativa, dividere un solido sferico della dimensione di una biglia, in un numero finito di pezzi che possono essere ricomposti per formare una sfera solida del diametro del sole!

In altre parole, mentre con le congruenze per dissezioni non ce la si fa anche quando ce la si dovrebbe fare (teorema di Dehn), con le equiscomposizioni, ce la si fa anche quando non ce la si dovrebbe fare (teorema di Banach-Tarski)!

I due risultati mostrano che il fatto di avere lo stesso volume non equivale né all'esistenza di una congruenza per dissezioni,

né all'esistenza di una equiscomposizione. A differenza di altri paradossi, come quello di Zenone o quello del mentitore, destinati a rimanere interrogativi problematici, quello di Banach-Tarski è un vero e proprio teorema matematico, nonostante sia così incredibile da essere chiamato paradosso.

Cosa è il volume?

A questo punto occorrerebbe chiedersi quale sia la corretta definizione matematica di volume. Questo è un argomento importante che però non posso approfondire in queste note, limitandomi ad accennare al fatto che la definizione si basa sul concetto di approssimazione (limiti, integrali), come nella discussione relativa al principio di Cavalieri.

Il teorema di Banach-Tarski mostra in ogni caso che non è possibile assegnare in modo ragionevole un volume a tutte le figure spaziali: ai pezzi della equiscomposizione paradossale della sfera non è possibile assegnare un volume (essi non sono “Lebesgue-misurabili”), altrimenti otterremmo il risultato, questo sì paradossale, che una sfera solida ha lo stesso volume dell'unione di due sfere uguali alla prima.

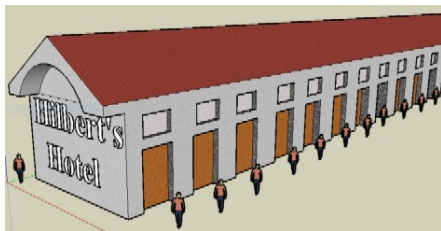
Passiamo alla dimostrazione

La seconda parte di questo intervento è più impegnativa e richiede una certa concentrazione, ma non vi scoraggiate, anche una lettura superficiale può dare i suoi frutti. La dimostrazione (a grandi linee) del teorema di Banach-Tarski sarà infatti l'occasione, o il pretesto, per introdurre informalmente qualche concetto importante della matematica, in particolare il concetto di gruppo. Per facilitare la lettura le sezioni sono monotematiche e solo alla fine sarà chiaro (almeno spero) come amalgamare i vari ingredienti.

Vedremo che i pezzi dell'equiscomposizione paradossale della sfera sono così complicati che non è possibile farsene una semplice immagine visiva, a differenza di quanto avveniva nel caso delle congruenze per dissezioni. Tuttavia, l'esistenza concettuale dei vari pezzi riposa su principi che oggi sono comunemente accettati dai matematici, tra cui il cosiddetto "assioma della scelta" (servirà per scegliere un insieme di rappresentanti delle orbite di certe azioni gruppali). Se si trascurano i bordi, vi sono anche versioni del paradosso che non usano l'assioma della scelta (teorema di Dougherty e Foreman).

L'albergo di Hilbert

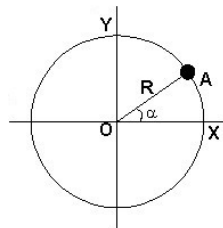
Uno dei più noti paradossi dell'infinito può essere illustrato dal cosiddetto "Albergo di Hilbert". Esso ha infinite stanze, tante quante i numeri interi non negativi $0, 1, 2, 3, \dots$, e sono tutte occupate.



All'arrivo di un nuovo cliente l'albergatore riesce ad alloggiarlo con dei semplici spostamenti di stanza. Come fa? La risposta non è difficile: basta chiedere a ciascun cliente di spostarsi nella stanza successiva (1 nel 2, 2 nel 3, 3 nel 4, eccetera), in modo che la stanza 0 si liberi e possa accogliere il nuovo cliente.

Un primo paradosso geometrico

Con la stessa idea dell'albergo di Hilbert possiamo dimostrare che un disco è equiscomponibile con il disco stesso privato di uno dei raggi. Più precisamente un disco è scomponibile in due pezzi R, S che possono essere ruotati in modo da formare lo stesso disco privato di un raggio (tenendo però il centro).



Si usa la tecnica dell'“albergo di Hilbert”. Scegliamo l'angolo α in modo che $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \dots$ siano tutti distinti (basta scegliere α in modo che α/π sia irrazionale). Sia R l'insieme dei raggi che hanno coordinata angolare pari ad uno degli $n\alpha$ (n intero positivo), e sia S la parte restante del disco. Ora risistemiamo i pezzi R, S come segue: S lo lasciamo fermo, mentre R lo ruotiamo di un angolo α . In tal modo il raggio $n\alpha$ si sposta in posizione $(n+1)\alpha$ e il raggio di angolo α sparisce.

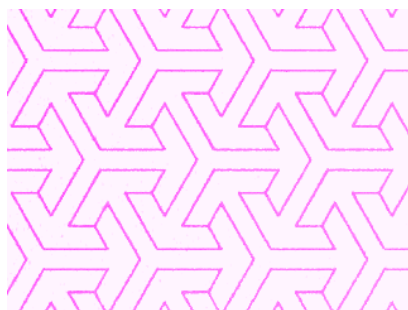
Questo paradosso è meno sorprendente di quello di Banach-Tarski perché il disco meno un raggio ha la stessa area di tutto il disco, mentre nel paradosso di Banach-Tarski si riescono ad alterare i volumi. Tuttavia abbiamo fatto un primo passo.

Il concetto di gruppo

Uno dei concetti più importanti dell'algebra moderna è quello di gruppo. Tra gli esempi più importanti vi sono i gruppi di “movimenti”, ad esempio le mosse possibili su un cubo di Rubik. In un gruppo è sempre definita una composizione, che nel caso del cubo di Rubik significa effettuare due mosse una dopo l'altra, e un inverso, che nel nostro esempio corrisponde fare la mossa opposta che fa tornare dove eravamo.

Altri esempi di gruppi sono dati dalle isometrie del piano e dello spazio. Ricordiamo che le isometrie sono le trasformazioni che non alterano le distanze, e nel caso del piano includono le rotazioni intorno ad un punto, le traslazioni, e i ribaltamenti intorno ad un asse.

Se ci restringiamo ai movimenti che preservano certe figure o simmetrie otteniamo un sottogruppo, ovvero un insieme di movimenti incluso in quello di partenza, stabile per composizione e inversi. Per familiarizzarci con la nozione analizziamo il sottogruppo dei movimenti del piano che conservano la tassellazione del piano raffigurata qui accanto.



L'analisi delle simmetrie mostra che il sottogruppo include la rotazione ρ in senso antiorario di $2\pi/3$ radianti (120 gradi) intorno al punto centrale, la rotazione di $4\pi/3$ radianti (240 gradi) ottenuta applicando due volte ρ (denotata $\rho\rho$, o ρ^2), il movimento nullo, denotato "1", i ribaltamenti intorno agli assi di simmetria, ad esempio il ribaltamento β rispetto alla retta di pendenza $\pi/3$ passante per il centro, la traslazione in orizzontale τ , che sposta ogni asse di simmetria non orizzontale in quello accanto a destra, e tutti i movimenti che si ottengono da questi e dai loro inversi componendoli tra loro.

Seguiamo la convenzione (non del tutto standard) che i movimenti si leggano da sinistra a destra, ad esempio $\beta\rho$ significa fare prima β poi ρ . Come esercizio potete verificare che $\rho^3 = 1$

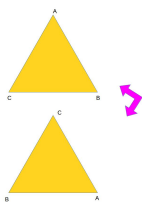
(ruotare di 360 gradi lascia tutti i punti del piano dove sono), $\beta^2 = 1$, e $\beta\rho = \rho^2\beta$ (ribaltare e poi ruotare di 120 gradi equivale a ruotare di 240 gradi e poi ribaltare).

Dato un elemento x del gruppo, il suo inverso x^{-1} è quell'elemento tale che $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$. Ad esempio, visto che $\rho^3 = 1$ e che possiamo scrivere $\rho^3 = \rho^2\rho$, otteniamo $\rho^{-1} = \rho^2$, come si verifica anche direttamente osservando che ruotare di 240 gradi in senso antiorario (ρ^2) equivale a ruotare di 120 gradi nel verso opposto (ρ^{-1}).

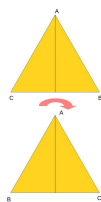
Come esercizio potete verificare che componendo opportunamente ρ, τ, β possiamo ottenere una traslazione lungo una direzione non orizzontale.

Il grafo di Cayley di un gruppo

Dato un gruppo, il suo grafo di Cayley rappresenta in modo visivo quali successioni di composizioni danno lo stesso risultato. Per semplicità consideriamo il gruppo D_3 delle simmetrie del triangolo, che può essere generato da una rotazione a e un ribaltamento b , come in figura.



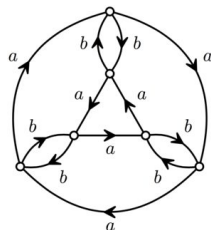
rotazione (a)



ribaltamento (b)

Si tratta di un gruppo simile a quello visto in precedenza salvo che non sono presenti le traslazioni in quanto il centro del triangolo deve rimanere fermo.

Nel gruppo D3 vi sono strade diverse che portano allo stesso risultato. Ad esempio $a^3 = 1$, $b^2 = 1$, $ba = a^2b$. Queste relazioni sono rappresentate nel grafo di Cayley da cammini diversi ma con gli stessi nodi di partenza e arrivo.



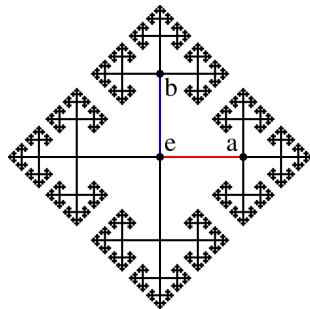
Grafo di Cayley di D3

Possiamo pensare ai sei nodi del grafo come alle sei possibili posizioni ABC, CAB, BCA, CBA, BAC, ACB del triangolo, mentre le frecce rappresentano i movimenti. Come si vede dal diagramma fare tre volte a a partire da qualsiasi posizione riporta alla posizione di partenza.

Gruppi liberi

Un gruppo generato da certi elementi $a, b, \dots$ si dice **libero** se nel corrispondente grafo di Cayley strade diverse con lo stesso punto di partenza portano a risultati diversi (per evitare banalità si escludono i casi in cui nella successione di mosse sia presente un generatore affiancato al suo inverso). Il gruppo D3 non è quindi libero in quanto ad esempio $ba = a^2b$. In un gruppo libero con due generatori a, b il grafo di Cayley dovrebbe avere la seguente forma.

Grafo di Cayley del gruppo libero F2 con due generatori a, b .



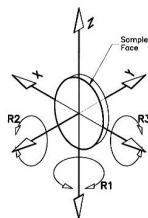
La mossa a fa andare a destra, a^{-1} a sinistra, b in alto, b^{-1} in basso. Strade diverse a partire dal centro e , come ad esempio b e aba^{-1} , portano a nodi diversi.

Si dimostra che due isometrie nel piano non possono mai generare un gruppo libero (questo dipende dal fatto che il gruppo delle isometrie del piano è “risolubile”), ma esistono invece due rotazioni a, b nello spazio tali che il gruppo da loro generato è libero, e questo si rivelerà decisivo per il teorema di Banach-Tarski.

Gruppi di movimenti nello spazio

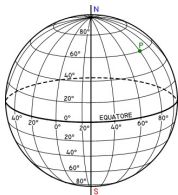
Concentriamoci sulle isometrie dello spazio che fissano l’origine delle coordinate, escludendo quindi le traslazioni. Tali movimenti portano una sfera centrata nell’origine in se stessa. Si dimostra che ogni tale movimento ha lo stesso effetto di una rotazione intorno ad un asse che passa per l’origine. In particolare, comunque muoviamo una sfera, lasciandone fisso il centro, esisteranno due punti sulla superficie sferica che alla fine saranno nella stessa posizione di dove erano all’inizio, ovvero i due punti antipodali dove l’asse di rotazione incontra la superficie.

Il gruppo delle isometrie dello spazio coincide dunque con il gruppo delle rotazioni della sfera in se stessa e si chiama $SO(3, \mathbb{R})$. La sfera viene denotata con il simbolo S^2 e diremo che il gruppo “agisce” sulla sfera.



Orbita di un punto

Dato un punto P in uno spazio e un gruppo G che agisce sullo spazio, l’orbita di P consiste dell’insieme dei punti dove può arrivare P per effetto di uno degli elementi del gruppo.



Consideriamo ad esempio il sottogruppo G di $SO(3, \mathbb{R})$ dato dalle rotazioni di un angolo arbitrario intorno all'asse z . Dato un punto P sulla sfera diverso da uno dei due poli, la sua orbita è allora il parallelo che passa per P , mentre l'orbita di ciascuno dei due poli si riduce ad un solo punto.

Un insieme **trasversale** (rispetto alle orbite) è un insieme che contiene uno ed un solo punto per ogni orbita. Nel nostro esempio un possibile insieme trasversale è dato da un qualsiasi meridiano M . Se scegliamo un sottogruppo più complicato di $SO(3, \mathbb{R})$, trovare un insieme trasversale può richiedere l'assioma della scelta.

Rotazioni indipendenti

Consideriamo due rotazioni a, b di pari ampiezza $\theta = \arccos(1/3)$ intorno agli assi z ed x rispettivamente. Per chi conosca le matrici, si tratta delle rotazioni rappresentate dalle matrici seguenti

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

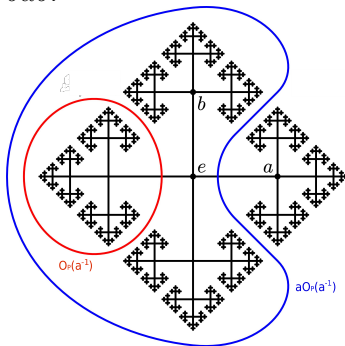
Ai nostri fini, l'unica cosa da sapere è che le rotazioni a, b generano un gruppo libero $F_{a,b}$ isomorfo ad F_2 , ovvero il suo grafo di Cayley è identico a quello di F_2 visto nella Sezione 2.1.

Ogni elemento g di $F_{a,b}$ è una rotazione intorno ad un certo asse, vi saranno sulla sfera due punti "eccezionali" dati dall'intersezione dell'asse di rotazione di g con la superficie sferica. Consideriamo l'insieme D di tutti i punti eccezionali al variare

di g in $F_{a,b}$. Ora scegliamo un punto P sulla sfera che non appartenga a D (visto che D è numerabile, basta scegliere un punto a caso e con probabilità $1 = 100\%$ non apparterrà a D). L'orbita di P rispetto a $F_{a,b}$ sarà un insieme O_P di punti della sfera in corrispondenza biunivoca con i nodi del grafo di Cayley di F_2 , ovvero P verrà mosso in punti diversi da ogni diversa successione delle rotazioni a, b, a^{-1}, b^{-1} (si escludono le successioni contenenti un generatore e un suo inverso affiancati).

Scomposizioni paradossali di un'orbita

Chiamiamo $O_P(a)$ l'insieme dei punti dell'orbita O_P che si ottengono applicando a P una composizione di elementi di $F_{a,b}$ che “inizia” per a , ad esempio la successione di rotazioni abb . Definiamo similmente $O_P(a^{-1}), O_P(b), O_P(b^{-1})$. Questa divisione si fa al netto delle cancellazioni, ad esempio $a^{-1}abab$ appartiene a $O_P(b)$ perché la a iniziale si cancella con a^{-1} e resta bab .



L'orbita O_P si lascia scrivere come unione disgiunta dei cinque sottoinsiemi $\{P\}, O_P(a), O_P(a^{-1}), O_P(b), O_P(b^{-1})$ corrispondenti rispettivamente al centro e ai quattro “petali” del diagramma di Cayley “centrato in P ”.

Nella figura l'orbita più piccola è $O_P(a^{-1})$, mentre la più grande è $aO_P(a^{-1})$.

L'osservazione fondamentale è che O_P si lascia anche scrivere come unione di $O_P(a)$ e $aO_P(a^{-1})$ (ovvero $O_P(a^{-1})$ ruotato tramite a), oppure come unione di $O_P(b)$ ed $bO_P(b^{-1})$. In tal modo

otteniamo una decomposizione “paradossale” dell’orbita O_P . Ciascuno dei due sottoinsiemi disgiunti $A = O_P(a) \cup O_P(a^{-1})$ e $B = O_P(b) \cup O_P(b^{-1})$ è equiscomponibile con l’intera orbita O_P .

Teorema di Hausdorff

Se scegliamo un insieme M trasversale a tutte le orbite (qui serve l’assioma della scelta) e ripetiamo il ragionamento precedente simultaneamente per tutte le orbite dei vari punti di M , otteniamo una equiscomposizione paradossale di $S^2 - D$, dove S^2 è la superficie sferica e D è l’insieme dei punti dove S^2 incontra gli assi delle rotazioni corrispondenti agli elementi di $F_{a,b}$ (vedi Sezione 2.1).



Felix Hausdorff, 1868-1942

Teorema di Banach-Schröder-Bernstein

Per passare dalla equiscomposizione paradossale di $S^2 - D$ a quella di S^2 e poi a quella di una sfera solida, conviene introdurre qualche notazione. Scriviamo $X \sim Y$ se X ed Y sono equiscomponibili, ovvero se è possibile partizionare X ed Y nello stesso numero finito di pezzi in modo che ciascun pezzo di X sia congruente al corrispondente pezzo di Y . Scriviamo infine $X \preceq Y$ se X è equiscomponibile con un sottoinsieme di Y .



Stephan Banach
1892-1945

Il teorema di Banach-Schröder-Bernstein permette di semplificare notevolmente il compito di verificare che due figure sono equiscomponibili. Esso afferma che se $X \preceq Y$ e $Y \preceq X$ allora $X \sim Y$, analogamente al fatto che la congiunzione di due disuguaglianze fornisce una uguaglianza. La dimostrazione non è difficile e si può trovare in [1].

Una figura geometrica X si dice **paradossale** se esistono due sottoinsiemi disgiunti A, B di X tale che $X \sim A \sim B$. Utilizzando queste notazioni, il teorema di Hausdorff dice dunque che $S^2 - D$ è paradossale, ovvero è possibile dividere $S^2 - D$ in due pezzi A e B da ciascuno dei quali possiamo ricostruire $S^2 - D$ tramite delle equiscomposizioni.

Teorema di Banach-Tarski

Per ottenere una decomposizione paradossale di tutto S^2 basta mostrare che $(S^2 - D) \sim S^2$. Si utilizza a tal fine la tecnica dell'albergo di Hilbert per riassorbire D tramite un'opportuna rotazione ρ intorno ad un asse passante per il centro della sfera tale che $D, \rho(D), \rho^2(D), \rho^3(D), \dots$ siano tutti disgiunti.

Dalla paradossalità di S^2 si ottiene facilmente la paradossalità della sfera solida meno il centro (basta aggiungere i raggi). La paradossalità dell'intera sfera solida si ottiene infine riassorbendo il centro con una rotazione non periodica per un asse non passante per il centro medesimo.

Alessandro Berarducci

Professore Ordinario di Logica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa

Riferimenti bibliografici

- [1] Grzegorz Tomkowicz and Stan Wagon. The Banach-Tarski Paradox. Cambridge University Press. Seconda edizione, 2016.

- [2] David Benko. A new approach to Hilbert's third problem. The American Mathematical Monthly. Vol. 114, No. 8 (Oct., 2007), pp. 665-676

La Matematica dei Viaggi Spaziali

Il 1957 ha segnato un punto di svolta nella storia dell'umanità: quando il 4 Ottobre di quell'anno l'Unione Sovietica ha comunicato di aver lanciato in orbita il primo satellite artificiale, lo Sputnik, si è aperta la grande era dell'esplorazione spaziale. Da allora la nostra conoscenza del Sistema Solare e dell'Universo è cresciuta enormemente. Innumerevoli sono state le sonde spaziali interplanetarie che hanno visitato gli altri pianeti e i corpi minori che ruotano attorno al Sole, non ultima la sonda spaziale della missione New Horizons (NASA), che ha mandato a Terra le prime immagini ravvicinate del pianeta nano Plutone.

In queste pagine cerchiamo di studiare dal punto di vista rigoroso della Meccanica Celeste, in un contesto semplificato ma significativo, il problema di inviare una sonda spaziale a partire dalla stazione di lancio sulla Terra fino a un altro corpo celeste (pianeta, pianeta nano, asteroide, cometa).

3 La Matematica dei Viaggi Spaziali

3.1 Orbite ellittiche

Il problema del decifrare la forma delle traiettorie dei corpi celesti ha origini molto antiche e nella Storia sono state date innumerevoli soluzioni; alcune di queste erano molto ingegnose, seppure errate. Quando si è passati dalla concezione geocentrica

del Sistema Solare a quella eliocentrica, tutto è cambiato. Un enorme contributo è stato dato da Johannes Kepler con la formulazione delle sue tre leggi, formulate a partire dallo studio dell'enorme mole di *osservazioni* raccolte dal suo maestro Tycho Brahe.

PRIMA LEGGE DI KEPLER, 1608: I pianeti si muovono su orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

Questa affermazione è molto accurata, ma non è perfettamente rappresentativa della realtà. I pianeti, infatti, durante il loro moto attorno al Sole, sono perturbati, seppure in misura minore, dall'attrazione degli altri pianeti. Questo implica che le traiettorie non sono ellissi perfette. Anzi, è stato dimostrato dal matematico francese Henri Poincaré che non è possibile trovare una formula per descrivere il moto vero di un pianeta del Sistema Solare! Per questo nei problemi e nelle applicazioni spesso si fa ricorso all'approssimazione ellittica prescritta da Kepler.

Un'altra osservazione che possiamo fare è che le leggi di Kepler sono enunciate per i corpi che ruotano attorno al Sole, ma ovviamente valgono in generale per i corpi che ruotano attorno alla Terra o attorno a Giove, e così via.

Ricordiamo qualche nozione sull'ellisse:

Definizione 3.1. L'ellisse è il luogo geometrico dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

È utile studiare l'ellisse in un sistema di riferimento cartesiano in cui l'origine coincide con uno dei due fuochi (Figura 2). Ci accorgiamo facilmente che ogni punto sull'ellisse è identificato dalla sua distanza r dall'origine e dall'angolo v (*anomalía vera*) che tale segmento forma con l'asse orizzontale delle x . Possiamo

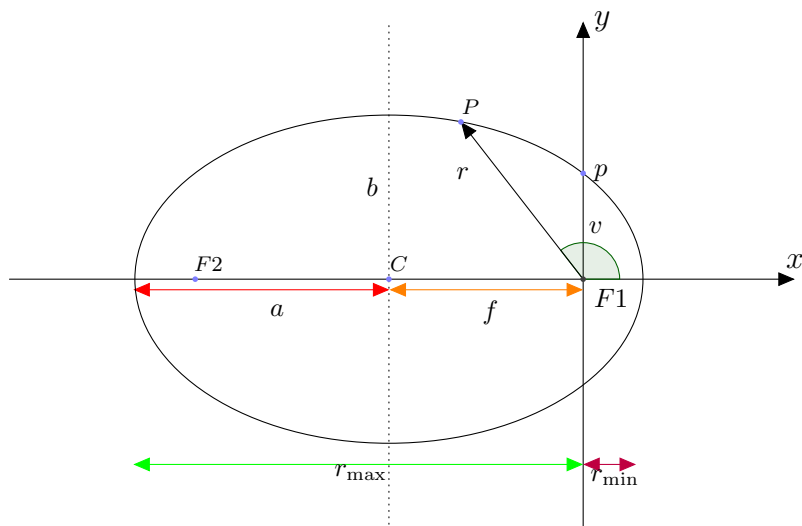


Figura 2: Esempio di ellisse.

scrivere l'equazione in *forma polare* dell'ellisse, che dice il valore di r corrispondente a un dato valore di v :

$$r(v) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v},$$

dove a si chiama *semiasse maggiore* ed e si chiama *eccentricità* e sono dei parametri che caratterizzano l'orbita. Ad esempio, l'orbita della Terra attorno al Sole ha $a \sim 150$ milioni di km e $e \sim 0.017$.

A partire dall'equazione in forma polare dell'ellisse si possono calcolare interessanti quantità:

Pericentro: è la distanza minima dal fuoco F_1 (il Sole), e si ottiene per un valore dell'anomalia vera uguale a 0, cioè $r_{\text{peri}} = r(0) = a(1 - e)$ - per la Terra questo numero vale ~ 147 milioni di chilometri;

Apocentro: è la distanza massima dal fuoco F_1 (il Sole), e si ottiene per un valore dell'anomalia vera uguale a π , cioè $r_{\text{apo}} = r(\pi) = a(1 + e)$ - per la Terra questo numero vale ~ 152 milioni di chilometri.

Osserviamo che una circonferenza è il caso limite di un'ellisse con eccentricità $e = 0$.

3.2 Sonde spaziali e missili balistici

Aggiungiamo adesso un po' di dinamica alla descrizione finora puramente geometrica delle traiettorie. La forza con cui un corpo di massa M attrae un altro corpo di massa m rispetta la legge di Newton ed ha intensità

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

dove G è una costante ed è la *costante di Newton*, mentre r è la distanza tra i due corpi. Tale forza ammette un'*energia potenziale* (si dice che è conservativa), per cui possiamo scrivere l'*energia totale del sistema*:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r},$$

dove v è la velocità del secondo corpo che ruota intorno al primo, e r è la sua distanza dal primo corpo. L'energia totale ha una proprietà fondamentale. Per spiegare quale, notiamo che in linea di principio, poiché sia la velocità v che la distanza r sono delle grandezze che cambiano durante il moto, allora anche l'energia dovrebbe cambiare durante il moto. In realtà questo non accade: anche se r e v cambiano, E rimane sempre la stessa durante il moto! Si dice che E è un *integrale primo* del sistema. In realtà

l'energia non è l'unico integrale primo, ma ne esiste un altro, chiamato *momento angolare*:

$$J = mrv \sin(\phi),$$

dove ϕ è l'angolo compreso tra il vettore raggio e il vettore velocità.

Anche se apparentemente non c'entra nulla, in realtà la conservazione del momento angolare è strettamente legata alla

SECONDA LEGGE DI KEPLER, 1609: Il raggio vettore che unisce il centro del Sole col centro del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali. ²

Una prima applicazione della presenza dei due integrali primi è la seguente: se E e J non cambiano durante il moto del pianeta attorno al Sole, allora sia che le calcoliamo al pericentro, sia che le calcoliamo all'apocentro, sono uguali:

$$\begin{cases} E_{\text{peri}} = E_{\text{apo}} \\ J_{\text{peri}} = J_{\text{apo}}. \end{cases}$$

Calcolando queste quantità e risolvendo il sistema di equazioni che ne viene fuori (provaci!), si ottiene una nuova espressione per l'energia:

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \quad (1)$$

Questa nuova formula dice una cosa molto importante: dati due corpi celesti di massa M e m , l'energia dipende esclusivamente

²Una conseguenza importante di questa legge è illustrata nella Figura 3. Le aree dei settori sottesi dagli archi AB e CD sono uguali, sebbene CD sia più lungo di AB : il pianeta, dovendole spazzare in tempi uguali, è costretto ad aumentare la velocità quando percorre CD . Concludiamo che i pianeti si muovono più velocemente quando sono più vicini al Sole e più lentamente quando sono più lontani.

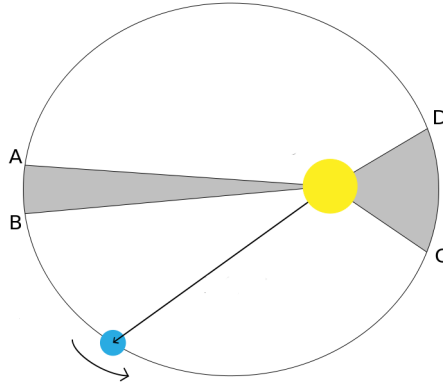


Figura 3: Conseguenze della seconda legge di Kepler. Fonte: Wikipedia.

dal semiasse maggiore dell'orbita e non dalla sua eccentricità. Inoltre, ci dà una formula per il calcolo della velocità di un corpo in orbita attorno a un altro corpo: uguagliando le due formule per l'energia, si ottiene

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \iff v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (2)$$

Quindi per conoscere la velocità v di un corpo in orbita a un certo tempo, basta conoscere il semiasse maggiore dell'orbita a (che è costante) e la sua posizione r in quell'istante di tempo.

Grazie alla formula (1), possiamo ricavare un fatto molto importante: supponiamo di voler mettere in orbita attorno alla Terra un satellite in orbita circolare a 500 km dalla superficie terrestre; poiché il raggio della Terra è $R_{\oplus} \sim 6371$ km, il semiasse maggiore dell'orbita del satellite attorno alla Terra sarà pari ad

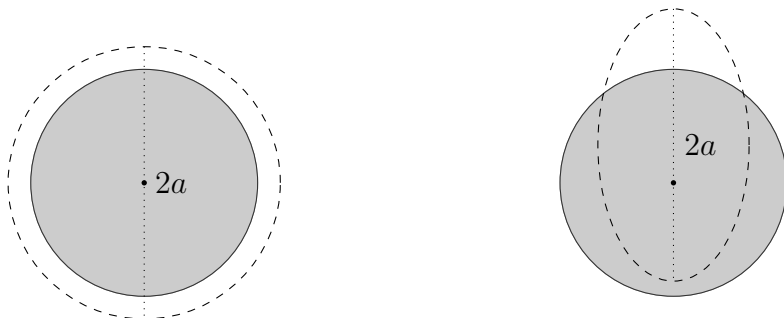


Figura 4: Satellite o missile balistico? Tanto l'energia è la stessa.

$a \sim 6871$ km. Come si vede anche dalla Figura 4, allo stesso valore del semiasse maggiore corrispondono, oltre all'orbita circolare, anche delle orbite ellittiche (basta cambiare l'eccentricità). Per valori abbastanza alti di e , si ottengono orbite che intersecano la superficie terrestre, cioè orbite per cui se si lancia un corpo, sicuramente andrà ad impattare la Terra in un altro punto: un missile balistico intercontinentale! Questo spiega l'allarme creatosi al lancio dello Sputnik: l'Unione Sovietica aveva sì mostrato di saper mandare in orbita un satellite, ma allo stesso tempo aveva implicitamente mostrato di poter lanciare, con la stessa energia e con lo stesso lanciatore, un missile che potesse colpire un altro Paese.

3.3 Andiamo su Giove!

Vogliamo progettare una missione spaziale interplanetaria; dobbiamo lanciare un satellite che esca dall'orbita terrestre e raggiunga un altro pianeta, ad esempio Giove. Supponiamo per semplicità che sia la Terra che Giove siano su orbite circolari e siano a_1 il semiasse maggiore dell'orbita terrestre e sia a_2 il

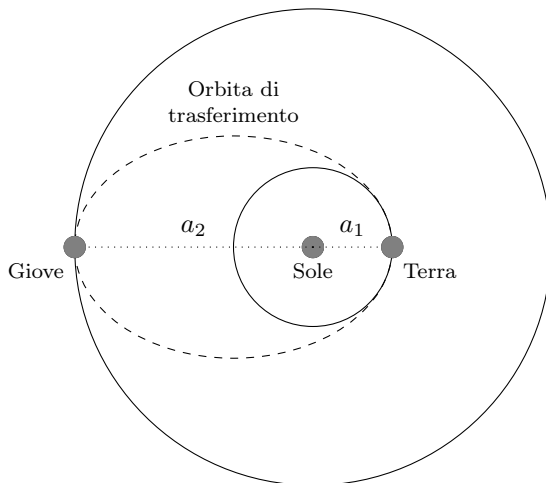


Figura 5: Orbita di trasferimento di Hohmann per una sonda trasferita dall'orbita terrestre all'orbita gioviana.

semiasse maggiore dell'orbita gioviana. Vogliamo rispondere alle seguenti domande:

1. Come facciamo?
2. Quanto carburante dobbiamo spendere?
3. Quanto tempo ci vuole?

Vediamo subito come arrivare a Giove. In riferimento alla Figura 5, possiamo:

- accendere i razzi dalla Terra e inserire la sonda in un'orbita ellittica attorno al Sole con semiasse maggiore $\frac{a_1+a_2}{2}$;
- una volta arrivata nei pressi di Giove, accendere di nuovo i razzi per inserire la sonda in un'orbita circolare attorno al Sole di semiasse maggiore a_2 .

Questo tipo di trasferimento si chiama *trasferimento alla Hohmann*, dal nome dell'ingegnere spaziale tedesco Walter Hohmann che l'ha inventata.

Per rispondere alla seconda domanda, ricorriamo all'*equazione del razzo di Ciolkovskij*, che mette in relazione il propellente speso durante una manovra orbitale con la variazione di velocità Δv avvenuta con la manovra stessa. Per conoscere il propellente usato, basta quindi calcolare la velocità della sonda prima della manovra e la velocità dopo. Nel caso della nostra orbita di trasferimento verso Giove si tratta di accendere i razzi due volte, corrispondenti a due cambi di velocità: uno, che chiamiamo Δv_1 , per mettere il satellite dall'orbita terrestre in orbita ellittica e uno, Δv_2 , per toglierlo dall'orbita ellittica e inserirlo nell'orbita di Giove.

Calcoliamo Δv_1 . Osserviamo che prima della manovra lo spacecraft si trova in orbita circolare attorno al Sole di semiasse maggiore a_1 , quindi la sua velocità per la (2) è

$$v_T = \sqrt{\frac{GM_{\text{Sole}}}{a_1}}.$$

Dopo la manovra, questo si trova in orbita ellittica attorno al sole di semiasse $(a_1 + a_2)/2$, a distanza a_1 dal Sole, quindi la sua velocità è, sempre per la (2),

$$v_{\text{peri}} = \sqrt{GM_{\text{Sole}} \left(\frac{2}{a_1} - \frac{2}{a_1 + a_2} \right)}.$$

Concludiamo che

$$\Delta v_1 = v_{\text{peri}} - v_T = \sqrt{\frac{GM_{\text{Sole}}}{a_1}} \left(\sqrt{\frac{2a_2}{a_1 + a_2}} - 1 \right).$$

Sostituendo i valori $GM_{\text{Sole}} \simeq 1.327 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$, $a_1 \simeq 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ e $a_2 \simeq 7.8 \times 10^{11} \text{ m}$, si ottiene $\Delta v_1 \simeq 8.7 \text{ km/s}$.

Per esercizio, verifica che Δv_2 è dato da

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM_{\text{Sole}}}{a_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2a_1}{a_1 + a_2}} \right)$$

e che nel caso Terra-Giove questo vale $\Delta v_2 \simeq 5.6$ km/s, per un consumo totale di $\Delta v = 14.3$ km/s.

Per rispondere all'ultima domanda, abbiamo bisogno della

TERZA LEGGE DI KEPLER (1619): I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori.

Come tradurre in linguaggio matematico questa legge? Se T è il periodo di rivoluzione di un certo corpo celeste attorno al Sole (cioè il tempo che impiega a compiere un giro attorno al Sole) e a è il semiasse maggiore della sua orbita, allora esiste una costante k tale che

$$T^2 = ka^3.$$

Tale costante è uguale per tutti i corpi celesti che orbitano il Sole e vale $4\pi^2/GM_{\text{Sole}}$. È facile quindi calcolare il tempo di percorrenza dell'orbita di Hohmann: corrisponde alla *metà* del periodo di rivoluzione dell'orbita con semiasse maggiore $(a_1 + a_2)/2$, cioè

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_{\text{Sole}}} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^3} \simeq 1000 \text{ giorni.}$$

Le orbite di Hohmann hanno una proprietà matematica interessante: esse sono dei minimi locali nello spazio di tutte le orbite di trasferimento, rispetto alla quantità di propellente utilizzato. Questo fa sì che siano le orbite più usate in meccanica spaziale. Tuttavia il fatto che non sono dei minimi globali rende possibile l'esistenza di altre orbite più convenienti. Ad esempio, in alcuni

casi (se $a_2 \geq 12a_1$, quindi se il pianeta che si vuole raggiungere è molto lontano) è meno costoso in termini di carburante un tipo di trasferimento con tre manovre invece di due: prima si manda la sonda in un punto che si trova oltre il pianeta, poi la si riporta indietro fino al pianeta, quindi la si inserisce in orbita. Sembra strano, ma può essere dimostrato rigorosamente! Naturalmente questi tipo di trasferimenti a tre manovre impiegano molto più tempo rispetto ai trasferimenti di Hohmann.

Un ultimo aspetto importante è costituito dal fatto che Giove si muove, quindi affinché la sonda possa incontrare il pianeta, bisogna scegliere il momento del lancio in modo che il pianeta si trovi nella stessa posizione della sonda all'arrivo di quest'ultima sull'orbita gioviana. Si parla in questo caso di *finestre di lancio*, cioè giorni specifici in cui una sonda può essere lanciata affinché riesca a incontrare il pianeta al termine della traiettoria prescelta.

3.4 Esplorazione planetaria

Una volta che abbiamo messo una sonda attorno a Giove, cosa si fa? È proprio qui che comincia la ricerca planetaria. Sappiamo ancora poco dei giganti gassosi del Sistema Solare (Giove, Saturno, Urano e Nettuno) e in particolare vorremmo studiarne la composizione interna, il campo magnetico, le interazioni con i loro satelliti naturali. Nel caso particolare di Giove, è attualmente in corso la missione spaziale Juno (NASA), che dal Luglio 2016 sta orbitando il pianeta gassoso e sta raccogliendo dati e inviandoli a Terra. Al Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa il Gruppo di Meccanica Celeste si occupa dell'analisi dei dati di *tracking* della sonda Juno con l'obiettivo di determinarne il campo di gravità. Queste informazioni sono cruciali per i geofisici, affinché possano determinare con accuratezza la struttura interna del pianeta. Conoscere com'è fatto il pianeta più grande del Sistema Solare, infatti, aiuta a

capire come si sono formati gli altri pianeti, inclusa la Terra. Questo potrebbe in ultima istanza condurre a comprendere sotto quali condizioni si può formare la vita e individuare altri pianeti nell'Universo in cui forme di vita possono svilupparsi o possono essersi già sviluppate.

Daniele Serra

*Assegnista di Ricerca in Fisica Matematica presso il
Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa*

Per saperne di più:

https://it.wikipedia.org/wiki/Meccanica_celeste

https://en.wikipedia.org/wiki/Transfer_orbit

<https://www.missionjuno.swri.edu>

http://poisson.dm.unipi.it/~dserra/downloads/settimana_matematica_2017.pdf

Paper and pencil: TWIXT!

4 Paper and pencil: TwixT!

Vi presentiamo in questa sezione un gioco carino e divertente, che potete fare in compagnia. Il TwixT è un gioco da tavolo, per due giocatori, inventato da Alex Randolph nel 1958 e pubblicato nel 1962. La versione che noi vi proponiamo è quella Paper and Pencil che non richiede un vero e proprio tavolo di gioco, ma solo carta e penna (come dice il nome). In questo breve articolo per prima cosa descriveremo il gioco e ne introdurremo le regole, poi sveleremo un po' della matematica che ci sta dietro.

Regole

Per giocare serve una griglia forata quadrata $n \times n$, dove di solito $n = 24$, come quella nella pagina seguente.

Notate che i punti in angolo non sono raffigurati. I bordi del quadrato nella versione originale sono colorati: quelli in alto e in basso sono del colore più chiaro (bianco o rosso) e gli altri due neri. Per esigenze tipografiche qui nelle figure abbiamo tratteggiato i lati in rosso, di modo che nella stampa in bianco e nero risultino ben distinguibili.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	
1		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	1
2	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	2
3	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	3
4	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	4
5	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	5
6	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	6
7	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	7
8	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	8
9	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	9
10	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	10
11	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	11
12	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	12
13	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	13
14	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	14
15	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	o	15
16	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	o	16
17	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o	17
18	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	o	18
19	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	o	19
20	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	o	20
21	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	o	21
22	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	o	22
23	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o		o	23
24	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	24
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	

Lo scopo del gioco è creare un percorso continuo che connetta i due lati opposti (del proprio colore) impedendo all'avversario di fare altrettanto. Ad esempio, se io sono il giocatore nero dovrò costruire un percorso attraverso i punti che colleghi il lato destro e quello sinistro, o viceversa. Si gioca a turni. Durante il proprio turno si può

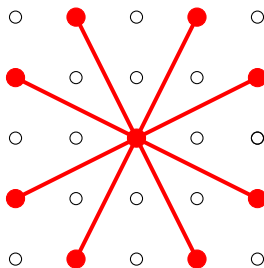
- segnare del proprio colore un punto della griglia (*piolo*),

oppure

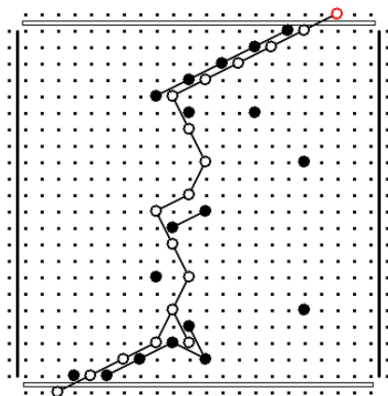
- segnare un punto e collegarlo ad uno di quelli segnati nei turni precedenti con un segmento (*ponte*).

Nota: non è obbligatorio che il percorso sia costruito in maniera consecutiva.

I ponti possono collegare solo pioli che sono ad angoli opposti di un rettangolo 1×2 . In pratica, fissato un punto, è solamente possibile connetterlo ad un altro piolo come in figura (chi conosce gli scacchi può pensare alla mossa del cavallo):



Infine è permesso incrociare i cammini del proprio colore mentre è vietato incrociare quelli dell'avversario e non si possono cancellare punti e segmenti una volta segnati. Ecco un esempio di percorso vincente:



Nella versione originale del TwixT, cioè quella con tavolo di gioco, i ponti sono delle aste in plastica e i punti sono dei veri

e propri pioli (da qui il nome). Le regole sono le stesse eccetto che non si possono incrociare i propri cammini, ma si possono rimuovere i propri ponti.

E la matematica?

Per la teoria dei giochi il TwixT è un gioco

1. *con due giocatori*
2. *a informazione perfetta*, ossia in ogni momento si conosce con certezza la storia delle giocate precedenti
3. *di connessione* cioè i giocatori sono chiamati a completare specifici tipi di connessione.

Della famiglia dei *giochi di connessione* fa parte anche l'Hex che è stato presentato nel numero uno dei giornalini degli Open Days. Per l'Hex e altri giochi di connessione è stato provato, a partire dal lavoro del noto matematico John Nash, che per il primo giocatore esiste una strategia vincente. Ossia è stato dimostrato che il giocatore che inizia, se fa le mosse opportune, ha la garanzia di vincere. Questo però NON vale per il TwixT.

Più precisamente, non si può dire nulla sull'esistenza di una strategia vincente per il primo giocatore.

Il problema nasce dal fatto che per una partita di TwixT ci sono tre possibili esiti: vince il giocatore uno, vince il giocatore due, pareggio. È proprio questa ultima opzione che complica le cose e non permette di usare la prova di Nash.

Inoltre, la lunghezza di una partita di TwixT (misurata numero di mosse) è al più *polinomiale*: detto $L(n)$ il numero di mosse, in funzione di n (la dimensione della griglia), allora esiste un $k > 0$ intero tale che

$$L(n) \leq n^k.$$

Questo fatto non solo ci dice che una partita a TwixT non sarà poi così lunga (a meno che uno tra noi o il nostro avversario non sia particolarmente lento a fare la sua mossa) ma ha anche delle conseguenze matematiche interessanti.

Daremo ora qualche informazione più tecnica, ma non lasciatevi spaventare se non conoscete qualche termine e non capite: questi vogliono solo essere dei piccoli stimoli per menti curiose. Dal fatto che la lunghezza di una partita abbia una maggioranza in termini polinomiali, in un articolo del 2014 [4] è stato provato che il TwixT è PSPACE-*completo* per valori di gioco fissati, cioè la soluzione di una partita può essere risolta da una Macchina di Turing³ utilizzando un algoritmo che occupa solo uno spazio di memoria polinomiale in n . Da questo si può dedurre, grazie ad un lavoro di Mazzoni and Watkins del 1997 [1], che il TwixT fa parte della classe dei problemi NP-*completi*.

Non è questo il luogo adatto in cui addentrarci in spiegazioni, ma per chi ne vuole saperne di più, la *teoria della complessità* è un campo che unisce matematica e informatica e che ha numerosissimi risvolti pratici (come ad esempio quanto può essere più o meno veloce un programma sul vostro pc). E, in particolare, lo studio dei problemi NP-completi ha un ruolo da protagonista in uno dei problemi aperti più studiati degli ultimi anni, la cui soluzione potrebbe mettere in discussione gran parte dei sistemi di sicurezza mondiali.

³ In informatica una macchina di Turing (o più brevemente MdT) è una macchina ideale (il modello da cui sono nati i moderni computer!) che manipola i dati contenuti su un nastro di lunghezza potenzialmente infinita, secondo un insieme prefissato di regole ben definite.

<http://pages.di.unipi.it/brogi/SettimanaCultura/BR/mdt.html>

Chi gioca a TwixT?

Esistono tornei e competizioni internazionali di TwixT. In rete si trovano molti siti in cui giocare contro un computer o contro altri giocatori nel resto del mondo (<http://twixtlive.com>) e altri in cui ci sono problemi ed esercizi da risolvere (<http://www.ibiblio.org/twixtpuzzles/>). Inoltre, si svolgono periodicamente tornei e competizioni anche internazionali.

Adesso non vi resta che provare a giocare!

Agnese Gini

Studentessa Magistrale presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa

Riferimenti bibliografici

- [1] Dominic Mazzoni and Kevin Watkins. Uncrossed knight paths is NP-complete. 1997.
- [2] <https://en.wikipedia.org/wiki/TwixT> 01-08-2017.
- [3] Kevin Moesker. TWIXT: THEORY, ANALYSIS AND IMPLEMENTATION. 2009.
- [4] Bonnet, Édouard and Jamain, Florian and Saffidine, Abdallah. Havannah and TwixT are PSPACE-complete. 2014. Computers and Games: 8th International Conference, CG 2013, Yokohama, Japan, August 13-15, 2013, Revised Selected Papers.

Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una breve lista di libri, pagine web e film che possono essere uno spunto per ulteriori approfondimenti. Alcuni contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti “più leggeri”.

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.
- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi;
- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann;
- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico;
- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan;
- O. A. Ivanov, *Facile come π greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore;
- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.

- G. Lolli *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.
- A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo;
- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.
- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni;
- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Per non confondere le idee ci siamo limitati a proporre una bibliografia essenziale. Di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- D. Aronofsky, II - *Il teorema del delirio*, 1998.
- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.
- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001
- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.
- G. Van Sant, *Good Will Hunting - Genio ribelle*, 1997.

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:
<http://maddmaths.simai.eu/>
- Versione on-line del giornalino:
<https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
<http://www.dm.unipi.it/webnew/>
- Sito delle olimpiadi di matematica:
<http://olimpiadi.dm.unibo.it/>
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
<http://www.sns.it/>
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:
<http://poisson.phc.unipi.it/>

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito (<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento>).

Prossime Iniziative

Vi aspettiamo alla **Settimana Matematica**, il nostro principale evento di orientamento, che si svolgerà nella settimana dal 29 Gennaio al 3 Febbraio 2018: insieme a circa 150 studenti da tutta Italia, avrete la possibilità di confrontarvi con la vita del Dipartimento di Matematica di Pisa, partecipare a laboratori tematici, assistere a conferenze e lezioni preparate appositamente per voi, interagire con docenti e studenti e molto altro ancora...

Troverete informazioni più dettagliate e la modalità di iscrizione sulla pagina web <http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento> a partire da fine Novembre.

STAMPATO IN PROPRIO