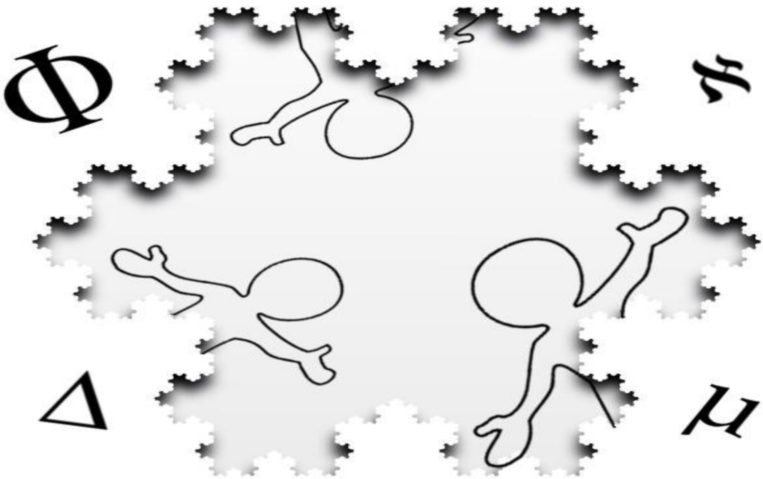
n°6

Pisa, 15 febbraio 2018

Matematica

il giornalino degli OpenDays

...notizie, giochi e pillole di matematica



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Su indicazione della Commissione Orientamento.

Realizzazione a cura degli studenti Counseling 2018:

Ludovico Battista
Domenico Mergoni
Mario Rastrelli

Coordinamento:

Prof. Giovanni Gaiffi

Grafica copertina:

Domenico Mergoni

Si ringraziano gli autori degli articoli per il contributo dato a questo numero.

Introduzione

Questo giornalino, realizzato da studenti del corso di Laurea in Matematica, nasce in occasione degli Open Days, un evento di orientamento organizzato ogni anno dall'Università di Pisa. Come nelle edizioni precedenti, l'obiettivo di questo sesto numero è incuriosire dando qualche assaggio su cosa voglia dire fare matematica anche al di là degli argomenti scolastici[1].
Per prima cosa potrete trovare una descrizione del corso di laurea, seguita da qualche statistica sugli impieghi dei laureati al termine dell'università. Potrete così farvi un'idea di quali possano essere i vari sbocchi lavorativi se sceglierete questo percorso di studi.
A seguire un articolo divulgativo: *La teoria dei grafi nascosta intorno a noi.* A partire da alcuni rompicapi, l'articolo si propone di introdurre strumenti e metodi di ragionamento propri della matematica.

Dopodiché potrete sperimentare il gioco Dots&Boxes, di cui verranno spiegate le regole e qualche iniziale strategia!
Infine, per i più curiosi, abbiamo raccolto una lista di pagine web, libri e film per darvi ulteriori spunti interessanti e qualche approfondimento.
Buona lettura e buon divertimento!

[1] https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days

Indice

1 Il corso di Laurea in Matematica

È un'idea comune che il corso di laurea (CdL) in matematica sia un corso di laurea difficile, pieno di materie pesanti e dedicato esclusivamente a quei pochi che al liceo capivano qualcosa di matematica; che i pochi che ne escono si ritrovino quasi sempre a insegnare in qualche scuola secondaria o a lavorare in banca e guadagnino poco o nulla. Ma quanto c'è di vero in questo? Poco. È vero che il CdL in matematica è un corso vocazionale (se non piace la matematica non ha nemmeno senso provarci) e che il tasso di abbandoni al primo anno è alto (ma è così in tutti i CdL, è uno dei problemi dell'università italiana), d'altro canto è vero che coloro che si laureano in matematica si trovano davanti una delle migliori prospettive di lavoro possibili:

- Secondo l'Occupational Information Network (sito patrocinato dal ministero del lavoro americano, vedi [3]) i matematici si meritano la medaglia d'argento per lavoro in cui "si guadagna tanto e ci si stressa poco", dopo gli scienziati dei materiali (ma con 8mila euro l'anno in più); infatti sia che lavorino nei centri di ricerca sia che prestino servizio nelle grandi aziende la media salariale dei matematici è di 88mila euro, e un indice di stress di 57/100. Da considerare che sono indicati come lavori differenti gli statistici (quinto posto, quindi comunque molto alto), i sistemisti (17 mo) e gli sviluppatori informatici (18mo), tutti lavori accessibili dal CdL in matematica.

- Secondo dati Almalaurea (vedi [2]) circa gli studenti passati dei CdL in materie scientifiche, la quota di occupati a cinque anni dal titolo di primo livello (c'è da considerare che molti studenti decidono di continuare gli studi magistrali) è del 93%, sopra anche agli standard di ingegneria (92%) e dell'area medico-sanitaria (90,2%).

- Sempre dal sito di Almalaurea [1] si possono trovare i seguenti dati:

  – In media il 95% degli studenti di matematica di Pisa sceglierebbero di nuovo lo stesso CdL (la percentuale è dell'80% per gli altri CdL).

  – L'età media degli studenti del CdL di Pisa è 23.2 anni, contro la media nazionale di 24.9.

  – Oltre il 95% di coloro che hanno studiato matematica a Pisa negli ultimi anni vogliono proseguire gli studi (contro il 75% degli altri atenei e CdL italiani nello stesso periodo).

Per avere maggiori informazioni circa cosa possa fare un matematico dopo aver finito il corso di studi rimandiamo alla pagina web *Matematici al lavoro*:
https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0
Ma vediamo ora alcuni dettagli circa la struttura del corso:

1.1 Il corso di Laurea a Pisa

Il corso di Laurea in Matematica si divide formalmente in Laurea Triennale e Laurea Magistrale. La prima, corrispondente al titolo internazionale *Bachelor's degree*, prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale. Esistono due possibili curricula:

- Il curriculum fondamentale;
- Il curriculum computazionale.

Sfruttando la collaborazione con altri Dipartimenti, il primo integra gli studi di matematica con degli approfondimenti di

Fisica, mentre il secondo con argomenti di Analisi Numerica e Informatica.

Al momento dell'immatricolazione vi verrà chiesto di scegliere il curriculum a cui iscrivervi. Non preoccupatevi se siete indecisi: come potete notare dalla tabella 1, i corsi sono identici fino al primo semestre del secondo anno, quindi avrete tempo per modificare la vostra scelta nel modo migliore, senza che questo influisca minimamente sulla vostra carriera.

Naturale prosecuzione è il biennio magistrale, alla fine del quale acquisirete il titolo omonimo (*Master degree* nei paesi anglofoni). Esso è diviso in cinque diversi curricula: didattico, modellistico, applicativo, generale e teorico. Essi vi permetteranno di approfondire le branche della matematica che più vi hanno interessato durante il vostro percorso di studi.

È possibile che molte di queste materie siano solamente nomi per molti studenti delle superiori; per iniziare a capire di cosa parlano queste discipline (che saranno il vostro pane quotidiano se sceglierete questo corso), quali problemi cercano di risolvere e quali sono alcune delle tecniche usate, consigliamo quindi a quelli di voi che sono interessati il libro:

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri

Si tratta sicuramente di uno dei migliori libri introduttivi alla matematica; è un libro divulgativo ma contiene vari teoremi con dimostrazioni vere e proprie che possono aiutare a dare un primo sguardo più approfondito alla matematica.

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale.

<table>
<tr><th>Fondamentale</th><th>Computazionale</th></tr>
<tr><td colspan="2">I anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Arimetica (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Laboratorio di comunicazione mediante calcolatore (3 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi matematica 1 (15 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria 1 (15 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fisica I con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">II anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algebra 1 (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inglese scientifico (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi matematica 2 (12 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria 2 (12 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Laboratorio didattico di matematica computazionale (3 CFU)</td></tr>
<tr><td>Esame a scelta (6 CFU)</td><td>Algoritmi e strutture dati (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">III anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meccanica razionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Fisica II (9 CFU)
Fisica III (6 CFU)</td><td>Calcolo scientifico (6 CFU)
Laboratorio computazionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)</td><td>Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
Ricerca operativa (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>4 Esami a scelta (24 CFU)</td><td>3 Esami a scelta (18 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prova finale (9 CFU)</td></tr>
</table>

Riferimenti bibliografici

[1] https://www2.almalaurea.it/cgi-php/universita/statistiche/framescheda.php?anno=2016&corstipo=L&ateneo=70024&facolta=1391&gruppo=1&pa=70024&classe=10032&corso=tutti&postcorso=tutti&isstella=0&disaggregazione=&LANG=it&CONFIG=profilo

[2] http://www.ilsole24ore.com/art/notizie/2017-08-16/-statistica-chimica-lauree-che-danno-lavoro-9-studenti-10-131340.shtml?uuid=AEqplaDC

[3] http://www.alleyoop.ilsole24ore.com/2017/10/25/ecco-24-lavori-perfetti-ad-alto-tasso-di-guadagno-e-a-basso-tasso-di-stress/

[4] https://www2.almalaurea.it

2 La Teoria dei Grafi nascosta intorno a noi

Uno dei più grandi interrogativi dell'uomo moderno, insieme allo scopo della vita e all'esistenza di altre forme di vita nell'universo, è la ragione per cui la matematica viene studiata. Sarebbe semplicistico, per non dire arrogante, provare a esaurire questo argomento in poche pagine. Quello che ci proponiamo di fare in quest'articolo è presentare tre giochi la cui soluzione può essere resa in modo chiaro ed affascinante con l'uso di strumenti matematici intuitivi; perché, pur non essendo degli esteti, ai matematici piace l'eleganza.

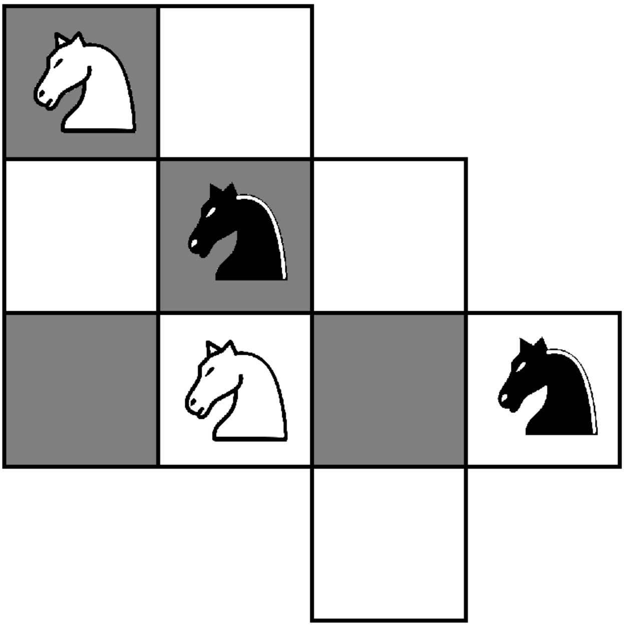


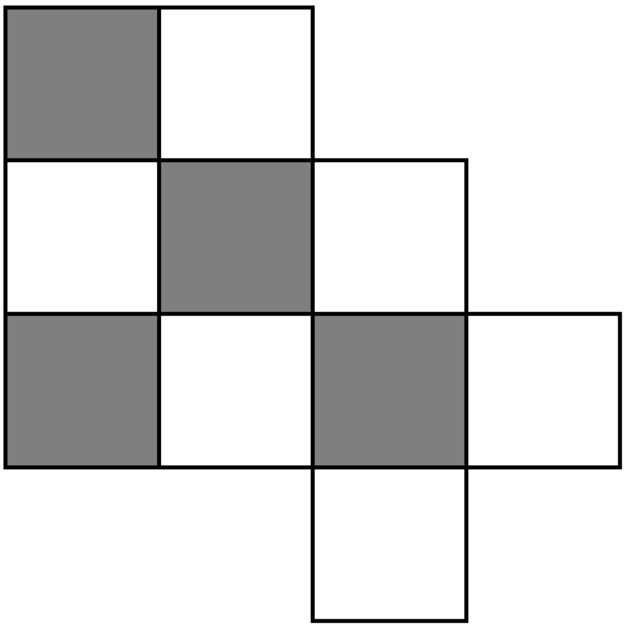
Figura 1: La posizione iniziale.

2.1 Il puzzle dei quattro cavalli, variante

Gli scacchi sono uno sport educativo e divertente; è soprannominato "Il gioco dei re", e non sta a noi decidere se questo dipenda dal fatto che permette di passare molto tempo seduti a non far nulla o dalle sue sfaccettature più strategiche, che si addicono a delle cariche che prendono decisioni importanti.

Oggi vogliamo proporre un rompicapo su questo tema: immaginate di avere quattro cavalli su una scacchiera insolita, due bianchi e due neri, come in figura 1. Scopo del gioco è riuscire a scambiare di posizione i cavalli bianchi e quelli neri. Le regole sono semplici: il movimento del cavallo è come negli scacchi[2] e due cavalli non possono occupare la stessa casella. La pagina successiva serve a permettere dei tentativi.

[2]Il cosiddetto movimento *a L*: due caselle verticalmente e una orizzontalmente o viceversa.



Strappando i cavalli è possibile fare qualche tentativo. I più ordinati possono ritagliarli!

Prima di andare avanti nella lettura dell'articolo, sarebbe istruttivo provare a pensare a una strategia per risolvere questo problema. Badate bene: andare a tentativi è una strategia! Spesso non è quella più conveniente, ma nei rompicapi è sempre la prima che proviamo ad applicare.

I più tenaci, i più fortunati e i più scaltri dovrebbero essere riusciti nell'impresa, ma anche in caso contrario si può procedere nella lettura. Fino ad ora la matematica potrebbe non aver giocato nessun ruolo, ma si possono sempre complicare le cose: sapreste dire quale è il numero minimo di mosse necessario per risolvere tale problema? Dare una risposta a questa domanda potrebbe risultare piuttosto complicato, ma soprattutto, stavolta, andare a tentativi non può aiutare in alcun modo.

La figura 2 potrebbe darvi una piccola mano, soprattutto se avete già avuto a che fare con l'oggetto che stiamo per presentare. Quando girerete pagina, però, la soluzione vi sarà evidente; vi chiedo perciò di prendervi il vostro tempo: il modo di scansare un ostacolo ci rimane tanto più impresso quanto più esso ci appare insormontabile.

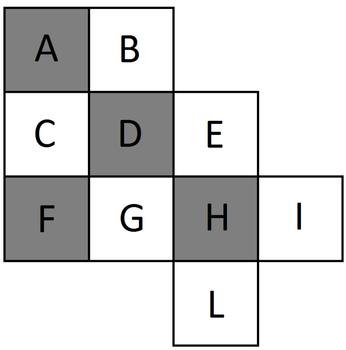
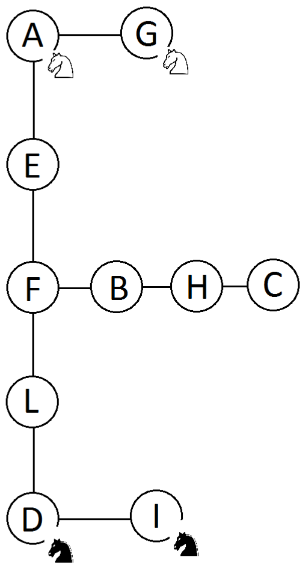


Figura 2: "Delle lettere sulla scacchiera? In che modo dovrebbero aiutarmi?"

Un modo di risolvere il problema è il seguente: disegniamo le lettere su un foglio, e colleghiamo due lettere fra loro se un cavallo può passare, in una mossa, dall'una all'altra. Quello che abbiamo costruito viene chiamato *grafo*: un insieme di *vertici* che sono collegati da alcuni *archi*. Nella fattispecie, il nostro grafo è *non orientato*, perché gli archi non hanno un verso di percorrenza.



Con questo grafo, oltre a risolvere molto facilmente il puzzle, è anche possibile rispondere al nostro problema! Possibile, ma non semplice: il metodo migliore sembra impiegare 26 mosse, ma chi ci assicura che non si possa fare di meglio? In matematica, così come nella vita, ci si trova spesso di fronte ad affermazioni che ci sembrano evidenti. Molte volte abbiamo ragione, ma le più costruttive sono quelle in cui ci sbagliamo; è perciò importante trovare ragioni che definiremmo *inconfutabili*. Ci riuscite?

2.2 Videocassette

Una cosa che viene spesso rinfacciata alle nuove generazioni è l'incapacità di giocare con ciò che si ha in casa. Non siamo più capaci di "fare d'un fil di lana una collana". Per il prossimo gioco abbiamo bisogno di oggetti parallelepipedali, grandi $0.5 \times 1 \times 2$ centimetri, preferibilmente di legno... Ma delle videocassette andranno benissimo.

Prendete delle videocassette. Lo scopo del gioco è il seguente: dovete riuscire a disporle in modo tale che ogni videocassetta tocchi tutte le altre tranne una. Cominciate a provare con quattro.

Una sola precisazione non essenziale: con "toccare" intendo che il contatto avviene su una faccia della videocassetta, non su uno spigolo o su un vertice. Questo dovrebbe aiutare in certe situazioni.

La soluzione con quattro videocassette dovrebbe essere piuttosto immediata. In ogni caso, alcune possibili soluzioni sono proposte in figura 3.

Provate ora con tre videocassette. So che questo è un giornalino, quindi alcuni di voi stanno solo *fingendo* di avere tre videocassette tra le mani. Anche la capacità di astrazione è molto importante, ma non è questo il cuore del discorso: che voi abbiate o meno tre videocassette tra le mani, non dovreste riu-

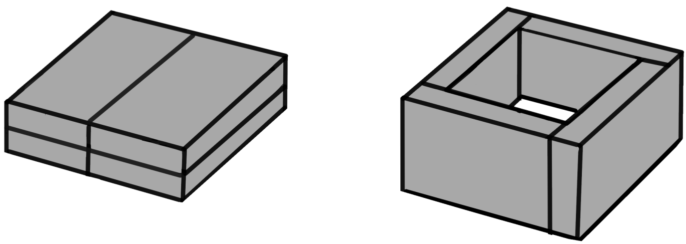


Figura 3: Due possibili soluzioni del problema con 4 videocassette.

scire nell'intento. Sareste capaci di dimostrare che è impossibile con un argomento semplice?

Alziamo la posta. Prendete cinque o sei videocassette e provate. Vi do un indizio: solo in uno di questi due casi una soluzione è possibile, riuscite a trovarla? Per conoscerla proseguite nella lettura!

Ecco, con sei videocassette è possibile. Con cinque no! Il motivo è il seguente:

Proposizione 1. *Non è possibile disporre* 5 *videocassette in modo che ognuna di esse tocchi tutte le altre tranne una.*

Dimostrazione. Supponiamo che tale configurazione esista. Ad essa possiamo associare un grafo nel seguente modo: per ogni videocassetta costruiamo un vertice, e creiamo un arco tra il vertice A e il vertice B se e solo se la videocassetta A tocca la videocassetta B; un esempio di grafo di questo tipo è presente in figura 4. Definiamo ora la *valenza* di un vertice come la somma

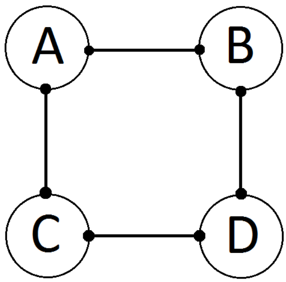


Figura 4: Il grafo associato alle configurazioni di videocassette in figura 3. In entrambi i casi è lo stesso. Ogni vertice ha valenza 2, e la somma delle valenze di tutti i vertici è 8.

del numero di archi che hanno un estremo in esso. Contiamo ora in due modi la somma delle valenze di tutti i vertici:

- se immaginiamo di partire dal grafo senza archi e di aggiungerne uno alla volta, ad ogni passo la somma delle valenze dei vertici aumenta di 2. Tale numero, dunque, è pari;
- d'altra parte, da ogni vertice devono uscire esattamente 3 archi, e dunque la somma delle valenze sarà $5 \cdot 3 = 15$.

Questi risultati non sono compatibili! Questo vuol dire che una tale configurazione di videocassette non esiste.

$\square$

Questa dimostrazione è chiaramente applicabile a qualsiasi numero dispari. Quello che abbiamo fatto ci permette di sottolineare alcune caratteristiche costituzionali del ragionamento matematico:

- Lavorare con numeri piccoli aiuta, a volte, a trovare risultati generali. La dimostrazione che abbiamo proposto per cinque videocassette si applica subito a qualsiasi numero dispari. D'altra parte, quella più naturale che si può fornire per tre videocassette non è facilmente generalizzabile. Procedere per tentativi può essere una buona idea o una perdita di tempo, e non è facile capire in che situazione ci si trova.
- La matematica ci permette di sublimare alcune caratteristiche e di ottenere risultati utilizzando soltanto queste ultime. Non prendete sotto gamba questo concetto! Ad esempio, passare da una configurazione di videocassette al grafo associato ci permette di isolare il concetto di *contatto*, ma ci fa perdere delle informazioni. Se le videocassette

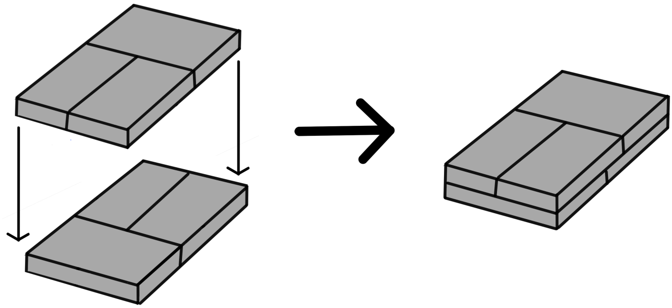


Figura 5: Una possibile soluzione del problema con sei videocassette.

fossero un miliardo, sarebbe possibile creare un grafo con un miliardo di vertici, ognuno collegato a tutti gli altri tranne uno (sareste capaci di dimostrarlo?), ma non sarebbe comunque possibile risolvere il vero problema, per un motivo più *materiale* (anche qui, sapreste abbozzarne uno?).

2.3 Sim

Finora abbiamo presentato una *struttura*, i grafi, e abbiamo usato loro caratteristiche elementari. Stavolta presentiamo un concetto più complicato, lo facciamo a partire da un gioco per due giocatori: il Sim.

Il primo giocatore ha una matita e il secondo una penna[3], e ci sono i sei vertici di un esagono su un foglio. A questo punto ogni giocatore, a turno, colora un segmento che unisce due vertici. Lo scopo del gioco è NON disegnare un triangolo del proprio colore con vertici sui vertici iniziali dell'esagono. Chiaramente si è obbligati a disegnare almeno un segmento finché non saranno presenti tutti quelli possibili!

[3] Questi saranno i nostri *colori*; se avete il blu e il rosso il disegno sarà più accattivante.

Se farete qualche tentativo a questo gioco, vi accorgerete che non finisce mai in parità. Come mai?

Proposizione 2. *Se coloriamo con due colori tutti gli archi del grafo completo su sei vertici*[4]*, comparirà almeno un triangolo monocromatico.*

Dimostrazione.
Diamo dei nomi ai vertici, chiamiamoli A, B, C, D, E, F. Consideriamo i 5 archi uscenti da A, ossia $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$. Almeno tre di questi hanno lo stesso colore, per il principio dei cassetti[5]. Supponiamo, per semplicità, che siano $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, e che siano colorati con la matita. Ora ci sono due possibilità:

- C'è almeno uno tra $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{BD}$ che è colorato con la matita. In questo caso, esiste un triangolo colorato con la matita di vertici A e i due estremi di questo segmento.

- Tutti e tre $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{BD}$ sono colorati con la penna. In questo caso sono proprio B, C e D ad essere i vertici di un triangolo, stavolta colorato con la penna.

□

Andiamo più a fondo nello studio di questo problema. Possiamo ad esempio chiederci se il gioco possa funzionare anche con 5 vertici invece che con 6. La risposta è negativa, e una dimostrazione si può trovare in figura 6. Un'altra domanda che apre la strada a una interessante dimostrazione è la seguente: se

[4]Ossia, un grafo non orientato con sei vertici in cui ogni possibile coppia è collegata da un arco.

[5]Formalmente, usiamo la forma forte di questo principio. Per una referenza, si veda [2].

volessimo giocare in tre, con tre colori, quanti vertici ci servirebbero? Non siamo pronti per rispondere esattamente a questa domanda[6], ma possiamo fare qualche passo.

2.4 Numeri di Ramsey

Nella sezione seguente la trattazione assumerà uno stile molto più rigoroso; il concetto che stiamo per introdurre può apparire, infatti, piuttosto complicato.

Dati t numeri $n_1, \dots, n_t$, ci chiediamo se esiste un numero naturale k tale che, dato un grafo completo su k vertici i cui archi sono colorati con t colori $c_1, \dots, c_t$, esiste almeno un sottoinsieme di n_1 vertici tutti collegati tra loro con archi di colore c_1, oppure almeno un sottoinsieme di n_2 vertici tutti collegati tra loro con archi di colore c_2, e così via.

[6] Anche se è nota la risposta, ossia 17, la dimostrazione non è alla nostra portata.

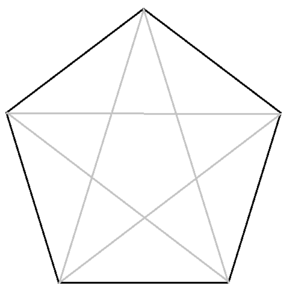


Figura 6: Una 2-colorazione del pentagono che non contiene triangoli monocromatici.

Non è detto che questo numero esista, ma se ne esiste uno esiste *il minimo numero* che ha tale proprietà[7]. In tal caso tale minimo si indica con $R(n_1, \ldots, n_t)$ e si chiama *numero di Ramsey* della t-upla $n_1, \ldots, n_t$.

Teorema 1 (di Ramsey)**.** *Per ogni scelta di numeri naturali* $n_1, \ldots, n_t$*, esiste il numero di Ramsey della* t*-upla* $n_1, \ldots, n_t$.

Dimostrazione. Come abbiamo già fatto notare, ci basta dimostrare che esiste almeno un numero naturale k tale che il grafo completo su k vertici ha la proprietà richiesta; l'esistenza di un minimo sarà una banale conseguenza. Procediamo per induzione su t:

- Se $t = 2$, vogliamo dimostrare che per ogni coppia n, m, esiste un numero con tale proprietà. In particolare procederemo per induzione su $n + m$. Il passo base è chiaro: se $n + m = 2$ allora ho $R(1, 1) = 1$. Ora ci serve notare che, anche se solo uno tra n e m è 1, allora possiamo prendere il grafo completo su un solo vertice e la richiesta è soddisfatta. Dunque, $R(n, 1) = R(1, n) = 1$ per ogni n. Per il passo induttivo, procediamo così: se uno tra n e m è 1, allora abbiamo già notato che $R(n, 1) = 1$ o $R(1, m) = 1$. Se sono entrambi maggiori di 1, allora dimostriamo che ci basta un numero di vertici pari a

  $$R(n, m - 1) + R(n - 1, m).$$

  Visto che entrambi questi numeri di Ramsey hanno somma della 2-upla inferiore a $n + m$, avremo concluso. Consideriamo un grafo completo su $R(n, m - 1) + R(n - 1, m)$

[7] Questo fatto deriva dal *principio di buon ordinamento* dei numeri naturali: un qualsiasi sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette un minimo. Per approfondire, vedi [3].

vertici, e isoliamo un vertice v. Dividiamo, come in figura 7, il resto dei vertici del grafo in due insiemi M ed N, dove i vertici in M sono quelli collegati a v con la penna e quelli in N sono quelli collegati a v con la matita. Inoltre, poiché il numero dei vertici del grafo è

$$R(n, m-1) + R(n-1, m) = |N| + |M| + 1,$$

vale almeno una tra le due disuguaglianze $|M| \geq R(n, m-1)$ o $|N| \geq R(n-1, m)$. Nel primo caso, abbiamo due possibilità. O in M c'è un sottoinsieme di n vertici tutti connessi tra loro con una matita (e dunque c'era anche nel grafo iniziale) o ce n'è uno di $m-1$ vertici tutti collegati tra loro con una penna, a cui si può aggiungere v per trovarne uno di cardinalità m. Nel secondo caso la dimostrazione è analoga.

Abbiamo dunque dimostrato che

$$R(n, m) \leq R(n, m-1) + R(n-1, m).$$

- Vediamo il passo induttivo (ossia $t-1 \Rightarrow t$). Dimostriamo che, nel caso io abbia una t-upla, basta prendere come numero di vertici il numero di Ramsey della $(t-1)$-upla $(n_1, \ldots, n_{t-2}, R(n_{t-1}, n_t))$, che esiste per ipotesi induttiva. Consideriamo infatti un grafo su $R(n_1, \ldots, R(n_{t-1}, n_t))$ vertici e coloriamo i suoi archi con t colori. Ora *confondiamo* gli ultimi due colori, e troviamo così una colorazione con $t-1$ colori. Per la definizione di $R(n_1, \ldots, R(n_{t-1}, n_t))$, c'è almeno un sottoinsieme di n_1 vertici tutti collegati tra loro con archi di colore c_1, oppure almeno un sottoinsieme di n_2 vertici tutti collegati tra loro con archi di colore c_2, ..., oppure almeno un sottoinsieme di $R(n_{t-1}, n_t)$ vertici tutti collegati tra loro con archi di colore c_{t-1}. Nei primi $t-2$

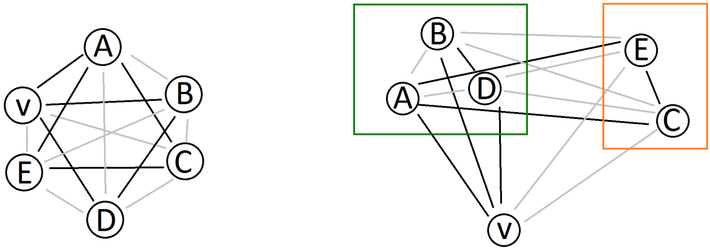


Figura 7: Il processo di isolamento di un vertice.

casi, siamo a posto. Nell'ultimo caso, basta distinguere di nuovo i due colori. Poiché questi ultimi colorano un grafo completo di $R(n_{t-1}, n_t)$ vertici, c'è almeno un sottografo di colore c_{t-1} su n_{t-1} vertici oppure c'è almeno un sottografo di colore c_t su n_t vertici. Il che conclude la dimostrazione.

□

Siamo ora pronti per dare più ufficialmente la seguente definizione:

Definizione 1 (Numero di Ramsey)**.** *Dati t numeri $n_1, \ldots, n_t$, definiamo $R(n_1, \ldots, n_t)$ il numero minimo di vertici tale che, dato un grafo completo su $R(n_1, \ldots, n_t)$ vertici i cui archi sono colorati con t colori $c_1, \ldots, c_t$, esiste almeno un sottoinsieme di n_1 vertici tutti collegati tra loro con archi di colore c_1, oppure almeno un sottoinsieme di n_2 vertici tutti collegati tra loro con archi di colore c_2, e così via.*

Quello che abbiamo fatto nella proposizione 2 è stato dimostrare che $R(3,3) \leq 6$, infatti abbiamo dimostrato che, se coloriamo un grafo completo su 6 vertici con due colori, c'è almeno un sottoinsieme di 3 vertici con tutti i lati colorati del primo colore, oppure c'è almeno un sottoinsieme di 3 vertici con tutti i lati colorati del secondo colore. La figura 6 ci dimostra che $R(3,3) > 5$, e dunque $R(3,3) = 6$. In realtà, ci sarebbe da fare una osservazione: la figura 6 non ci dice soltanto che cinque vertici non soddisfano quella proprietà, ci dice anche che non la soddisfano quattro vertici: basta "dimenticare" un vertice e cancellare gli archi di cui tale vertice era un estremo; in tal modo si ottiene un grafo completo su quattro vertici che non può avere alcun triangolo monocromatico, perché non c'era neanche prima! Chiaramente si può andare avanti per dimostrare che non basta nessun numero inferiore di vertici.

A prescindere dal teorema, che può essere di difficile comprensione, il risultato è emblematico: siamo riusciti a dire che $R(n_1, \ldots, n_t)$ esiste sempre, ma non siamo neanche vicini al calcolarlo effettivamente. Anche se gli n_i sono molto piccoli, tali valori sono ancora sconosciuti; per i più curiosi, una tabella è contenuta alla pagina web [1].

Per dare un'idea di quanto sia difficile trovare risultati precisi, Joel H. Spencer racconta nel suo libro *Ten Lectures on the Probabilistic Method* la seguente storia:

"Erdős[8] *ci chiese di immaginare che un esercito alieno, molto più potente di noi, arrivasse sulla Terra chiedendoci di fornire il valore di* $R(5,5)$*; in caso contrario, avrebbero distrutto il nostro pianeta. Lui affermò che, in quel caso, avremmo dovuto impiegare tutti i nostri computer e tutti i matematici nel tentativo di trovare quel valore. Supponiamo, invece, che ci avessero chiesto il valore di* $R(6,6)$*. In questo caso, a suo parere, avremmo dovuto prepararci a combattere."*

[8] Paul Erdős, 1913-1996; uno dei matematici più prolifici di sempre. A causa del suo atteggiamento molto eccentrico, le storie sul suo conto sono innumerevoli. Per i più curiosi, si veda [5].

2.5 Conclusioni

In definitiva, abbiamo preso in esame tre aspetti della matematica che spesso si intrecciano fino a confondersi: la rielaborazione di dati atta a renderli più intuitivi, l'isolamento delle caratteristiche importanti di un problema, la curiosità che porta alla ricerca per generalizzare risultati che sono semplici nel piccolo.

A cosa è servito tutto questo? Quando il problema che abbiamo davanti è chiaro, come nei primi due casi, la matematica ci ha aiutato a risolverlo. Nell'ultimo caso, lo slancio verso la ricerca è qualcosa che non ha sempre un fine. Lo facciamo perché ci piace sapere cosa possiamo dire, vedere dove possiamo arrivare, trovare i nostri limiti e superarli. E, chi lo sa, se gli alieni ci chiederanno il valore di $R(4,4)$, sapremo già cosa rispondere.

Ludovico Battista, laureato triennale in matematica

Riferimenti bibliografici

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_theorem

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle#Strong_form

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Well-ordering_principle

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Erd%C5%91s

3 Un gioco: Dots and boxes

Dots and boxes (conosciuto in Italia come *Punti e linee*) è un gioco per due giocatori che è divenuto famoso dopo aver attirato l'attenzione, nel XIX secolo, del matematico francese Édouard Lucas (lo stesso che ha inventato la torre di Hanoi). Le regole di questo gioco sono facili, non occorre altro che carta e penna per giocarci, ma questo non deve trarre in inganno: è molto più complesso di quanto sembri a prima vista (abbastanza da mettere in difficoltà giovani prodigi). Ma vediamo intanto come si gioca:

3.1 Regole

Per giocare a questo gioco tutto quello che serve sono: due persone, due penne, un foglio (potrebbe tornare meglio a quadretti). I giocatori preparano la griglia di gioco (un rettangolo di 4×4 punti, almeno per le prime partite) e poi a turno uniscono orizzontalmente o verticalmente due punti adiacenti (qualsiasi, a patto ovviamente che non siano già stati uniti). Se un giocatore completa i quattro lati di un quadrato 1×1 (box, da cui il nome) mette le sue iniziali all'interno del quadrato stesso e traccia un'altra linea; questa regola è particolarmente importante: se colui che ha tracciato un quadrato non dovesse tracciare un'altra linea la strategia di gioco sarebbe completamente diversa. Quando tutte le linee sono state tracciate il gioco finisce e vince colui che ha segnato più caselle. Un esempio di gioco in una griglia 3×3 può essere trovato nella Figura 8.

3.2 Oltre le prime partite: il double-cross

Le regole del gioco sono semplici, giocarci un po' meno; l'esperienza insegna che molti giocatori, iniziando a giocare a questo

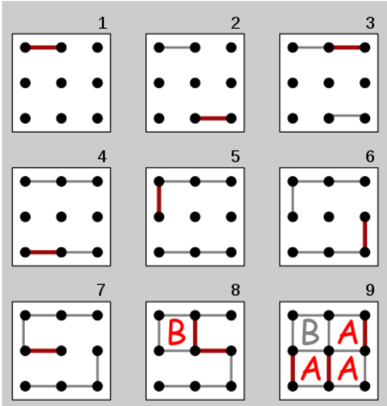


Figura 8: Ogni nuova mossa è segnata in rosso, più mosse sono segnate nella stessa immagine quando il giocatore chiude dei boxes e ha quindi diritto a più linee nello stesso turno

gioco, seguono la stessa strategia:

- Fase iniziale di connessioni più o meno casuali, in cui ogni giocatore si preoccupa solamente di non segnare mai il terzo lato di un quadrato.

- Quando rimangono solo catene (gruppetti di quadrati in posizione tale che fare una mossa per chiudere uno di loro dà la possibilità di chiudere tutti gli altri), ciascun giocatore cerca di prendere la catena più lunga e di aprire all'avversario la più corta possibile (cioè permette all'avversario di impossessarsi della linea più corta presente in gioco: va notato infatti che affinché un giocatore possa prendere una catena è necessario che l'avversario abbia giocato una mossa in essa, cosa che sarà forse più chiara vedendo l'esempio sotto).

Questa strategia però non è sempre la migliore possibile: a volte conviene sacrificare qualche quadrato per obbligare l'avversario

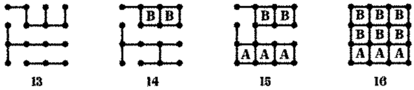


Figura 9: Un esempio di gioco

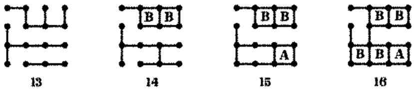


Figura 10: Un esempio di gioco

in una posizione difficile.
La Figura 9 è un esempio di gioco intuitivo, mostra la parte finale di una partita nella quale i due giocatori hanno cercato di massimizzare il guadagno alla fine di ogni singola loro mossa: nella prima mossa il giocatore B riempie quante più caselle possibili e apre ad A la catena più corta; A fa lo stesso e perde in questo modo la partita. Ma avrebbe A potuto cambiare le sorti della partita? In effetti sì, con una tecnica chiamata double-cross che è ben esemplificata nella Figura 10: Il giocatore A non massimizza il guadagno della mossa 15 (poteva avere tre caselle e ne ha chiusa solo una) ma ha obbligato il giocatore B in una posizione di svantaggio: qualsiasi mossa esso giochi perderà.

Nelle partite tra giocatori esperti chiaramente questa tecnica viene utilizzata da entrambi i giocatori e quindi vincerà il giocatore che ha il 'controllo' della partita: si cerca di obbligare l'avversario ad aprire la prima catena lunga (che di solito è sufficiente per squilibrare il gioco e permettere al giocatore di vincere).

3.3 Qualcosa di più su questo gioco

Questo gioco è:

- a **informazione perfetta**: la conoscenza di ciò che sta avvenendo nel gioco è uguale per ogni giocatore (non ci sono carte coperte o informazioni conosciute solamente da un giocatore) e ciascun giocatore conosce tutte le mosse fatte fino a quel punto (ci sono diversi giochi di questo tipo, come gli scacchi o il Go);

- **imparziale**: l'unica differenza tra i due giocatori è che uno inizia per primo; in ogni momento la gamma delle mosse permesse dipende solo dalla configurazione del momento e non da quale dei due giocatori deve muovere (non avviene lo stesso per gli scacchi: in un momento X della partita il bianco e il nero non possono fare le stesse mosse).

Giocare bene a questo gioco non è per nulla facile, per averne un'idea vi consigliamo di cercare il libro di Elwyn Berlekamp *The dots and boxes game*. In questo libro il matematico racconta la sua esperienza con questo gioco, le sue difficoltà nell'impararlo e propone diversi quesiti interessanti (alcuni dei quali non ancora risolti quando lui pubblicò il libro) oltre che moltissimi consigli su come giocare al meglio.

Domenico Mergoni, studente del corso di Laurea Triennale in matematica

Riferimenti bibliografici

[1] Elwyn Berlekamp. *The Dots-and-Boxes Game*. A. K. Peters Ltd., 2000.

[2] Elwyn Berlekamp, John Horton Conway and Richard K. Guy. *Winning Ways for your Mathematical Plays*. A. K. Peters Ltd., 2004.

Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una breve lista di libri, pagine web e film che possono essere uno spunto per ulteriori approfondimenti. Alcuni contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti “più leggeri”.

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi;

- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann;

- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico;

- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan;

- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore;

- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri ch ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.

- G. Lolli *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.

- A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo;

- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.

- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni;

- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di Andrè Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Per non confondere le idee ci siamo limitati a proporre una bibliografia essenziale. Di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- D. Aronofsky, Π - *Il teorema del delirio*, 1998.
- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.
- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001
- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.
- G. Van Sant, *Will Hunting - Genio ribelle*, 1997.

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica: http://maddmaths.simai.eu/
- Versione on-line del giornalino: https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa: http://www.dm.unipi.it/webnew/
- Sito delle olimpiadi di matematica: http://olimpiadi.dm.unibo.it/
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa: http://www.sns.it/
- Sito degli studenti di matematica di Pisa: http://poisson.phc.unipi.it/

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito (http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento).