

n°7

*Pisa, 24 settembre 2018*

# **Matematica**

***il giornalino degli OpenDays***

*...notizie, giochi e pillole di matematica*

$$\int_{\text{stickman} \in \mathbb{R}} e^{-\text{stickman}^2} d\text{stickman} = \sqrt{\pi}$$



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

**Su indicazione della Commissione Orientamento.**

**Realizzazione a cura degli studenti Counseling 2018:**

Ludovico Battista

Luca Bruni

Chiara Giraudò

Mario Rastrelli

Filippo Testa

**Coordinamento:**

Prof. Giovanni Gaiffi

**Grafica copertina:**

Chiara Giraudò e Filippo Testa

Si ringraziano gli autori degli articoli per il contributo dato a questo numero.

## Introduzione

Questo giornalino, realizzato da studenti del corso di Laurea in Matematica, nasce in occasione degli eventi di orientamento organizzati ogni anno dall'Università di Pisa. Come nelle edizioni precedenti, l'obiettivo di questo settimo numero è incuriosire dando qualche assaggio su cosa voglia dire fare matematica anche al di là degli argomenti scolastici

L'edizione di quest'anno è molto ricca! Per prima cosa potrete trovare una descrizione del corso di laurea, seguita da qualche statistica sugli impieghi dei laureati al termine dell'università. Potrete così farvi un'idea di quali possano essere i vari sbocchi lavorativi se sceglierete questo percorso di studi.

A seguire due articoli divulgativi: nel primo, Sistemi Lineari, viene enunciato il problema della loro risoluzione con particolare attenzione alla complessità computazionale dei metodi citati, insieme ad alcune applicazioni del problema in ambito non matematico.

Il secondo, Matematica del conteggio, mostra, dopo una breve introduzione sugli alberi binari orientati, un'applicazione di tali tecniche in ambito biologico computazionale.

Dopodiché viene presentato un gioco da tavola con diverse applicazioni alla matematica, con cui potrete divertire un po': il Black.

Siamo inoltre orgogliosi di inaugurare con questo numero la rubrica dei problemi del Giornalino. Nella sezione Divertissement, infatti, avrete la possibilità di cimentarvi in qualche problema! Siamo ansiosi di conoscere le vostre soluzioni, che potete comunicare all'indirizzo email [LezioniAperteMatematica@gmail.com](mailto:LezioniAperteMatematica@gmail.com).

Inoltre, per i più curiosi, abbiamo raccolto una lista di pagine web, libri e film per darvi ulteriori spunti interessanti e qualche approfondimento.

Buona lettura e buon divertimento!

---

<sup>1</sup><https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>



## Indice

Il corso di Laurea in Matematica	7	
1 Il corso di Laurea a Pisa . . . . .		8
Sistemi lineari, loro applicazioni e aspetti computazionali	11	
1 Sistemi di equazioni lineari . . . . .		11
2 Applicazioni . . . . .		13
3 Problemi di equilibrio . . . . .		13
4 Analisi di reti e problemi del Web . . . . .		16
5 Modelli economici . . . . .		16
6 Restauro di immagini . . . . .		18
7 Come si risolve un sistema lineare . . . . .		20
8 Complessità computazionale . . . . .		20
9 Propagazione degli errori . . . . .		23
10 Cenni storici . . . . .		25
Matematica del conteggio	28	
1 Enumerazione di alberi binari orientati . . . . .		28
2 Con gurazioni in alberi di specie . . . . .		31
3 Conclusioni . . . . .		33
Il gioco del Black!	35	
1 Descrizione e regole . . . . .		35
2 La strategia vincente! . . . . .		37
Divertissement	40	
1 Il campionato di biliardino . . . . .		40
2 I quadrati sono meglio . . . . .		40
3 La cifra 1 basta e avanza! . . . . .		40
4 Un'uguaglianza di angoli . . . . .		40
5 Cammini nel piano . . . . .		41
6 Il teorema di Liouville discreto . . . . .		41

7	Il problema del ballottaggio . . . . .	41
8	Soluzioni . . . . .	43
	Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media	44
	Prossime iniziative	47

# Il corso di Laurea in Matematica

È un'idea comune che il corso di laurea (CdL) in matematica sia uno tra i più difficili, pieno di esami impegnativi e riservato solo a chi al liceo riusciva molto bene nella materia. Spesso la visione ristretta della matematica che fornisce la scuola secondaria porta a credere che dopo la laurea gli unici sbocchi lavorativi siano la ricerca e l'insegnamento.

Per quanto il CdL in matematica richieda passione per la materia e molto impegno, alla fine del percorso i laureati sono soddisfatti della scelta fatta e hanno davanti un ampio spettro di possibilità lavorative:

- Secondo l'Occupational Information Network (sito patrocinato dal ministero del lavoro americano, vedi [3]) i matematici si meritano la medaglia d'argento per il lavoro in cui si guadagna tanto e ci si stressa poco ; infatti sia che lavorino nei centri di ricerca sia che prestino servizio nelle grandi aziende, la media salariale dei matematici è di 88mila euro all'anno, e un indice di stress di 57/100. Da considerare che sono indicati come lavori di erenti gli statistici (5 posto, quindi comunque molto alto), i sistemisti (17) e gli sviluppatori informatici (18), tutti lavori accessibili dal CdL in matematica.
- I dati di Almalaurea (vedi [2]) riportano che il 94,6% dei laureati magistrali in matematica risulta occupato a tre anni dalla laurea, contro il 94% dei laureati in ingegneria.
- Sempre dal sito di Almalaurea [1] si possono trovare i seguenti dati:

In media il 95% degli studenti di matematica di Pisa sceglierebbero di nuovo lo stesso CdL (la percentuale è dell'80% per gli altri CdL).

In media il tempo necessario per completare la laurea triennale in matematica a Pisa è di 4,1 anni.

Oltre il 95% di coloro che hanno studiato matematica a Pisa negli ultimi anni vogliono proseguire gli studi (contro il 75% degli altri atenei e CdL italiani nello stesso periodo).

Per avere maggiori informazioni su cosa possa fare un laureato in matematica rimandiamo alla pagina [Matematici al lavoro: https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0](https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0)

## 1 Il corso di Laurea a Pisa

Il corso di Laurea in Matematica si divide formalmente in Laurea Triennale e Laurea Magistrale. La prima, corrispondente al titolo internazionale Bachelor's degree prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale. Esistono due possibili curricula:

- ^ Il curriculum fondamentale;
- ^ Il curriculum computazionale.

Sfruttando la collaborazione con altri Dipartimenti, il primo integra lo studio della matematica con approfondimenti di fisica, mentre il secondo con argomenti di matematica computazionale e informatica.

Al momento dell'immatricolazione vi verrà chiesto di scegliere il curriculum a cui iscrivervi. Non preoccupatevi se siete indecisi: come potete notare dalla tabella 1, i corsi sono identici fino al secondo semestre del secondo anno, quindi avrete tempo per capire cosa vi piace e scegliere di conseguenza.

Naturale prosecuzione è il biennio magistrale, alla fine del quale acquisirete il titolo omonimo di Master degree (nei paesi anglofoni). Esso è diviso in cinque diversi curricula: didattico, modellistico, applicativo, generale e teorico. Essi vi permetteranno di approfondire



Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale.

Fondamentale	Computazionale
I anno	
Aritmetica (9 CFU)	
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)	
Laboratorio di comunicazione mediante calcolatore (3 CFU)	
Analisi matematica 1 (15 CFU)	
Geometria 1 (15 CFU)	
Fisica I con laboratorio (9 CFU)	
II anno	
Algebra 1 (6 CFU)	
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)	
Inglese scientifico (6 CFU)	
Analisi matematica 2 (12 CFU)	
Geometria 2 (12 CFU)	
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)	
Laboratorio didattico di matematica computazionale (3 CFU)	
Esame a scelta(6 CFU)	Algoritmi e strutture dati (6 CFU)
III anno	
Meccanica razionale (6 CFU)	
Fisica II (9 CFU)	Calcolo scientifico (6 CFU)
Fisica III (6 CFU)	Laboratorio computazionale (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)	Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
4 Esami a scelta(24 CFU)	Ricerca operativa (6 CFU)
	3 Esami a scelta(18 CFU)
	Prova finale (9 CFU)

le branche della matematica che più vi hanno interessato durante il vostro percorso di studi.

Nella tabella alla pagina seguente troverete l'elenco degli esami da sostenere durante la laurea triennale, molti dei quali riguardano argomenti non trattati a scuola. Per iniziare a capire cosa studiano queste discipline, quali problemi cercano di risolvere e quali sono alcune delle tecniche usate, consigliamo il libro:

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica* Bollati Boringhieri

Si tratta sicuramente di uno dei migliori libri introduttivi alla matematica, dal carattere divulgativo ma contenente vari teoremi con dimostrazioni vere e proprie che costituiscono dei primi esempi di vera matematica.

Riferimenti bibliografici

[1] <https://www2.almalaurea.it/cgi-php/universita/>

statistiche/framescheda.php?anno=2016&corstipo=L&ateneo=70024&facolta=1391&gruppo=1&pa=70024&classe=10032&corso=tutti&postcorso=tutti&isstella=0&disaggregazione=&LANG=it&CONFIG=pro lo

- [2] <http://www.ilsole24ore.com/art/notizie/2017-08-16/-statistica-chimica-lauree-che-danno-lavoro-9-studenti-10-131340.shtml?uuid=AEqplaDC>
- [3] <http://www.alleyoop.ilsole24ore.com/2017/10/25/ecco-24-lavori-perfetti-ad-alto-tasso-di-guadagno-e-a-basso-tasso-di-stress/>
- [4] <https://www2.almalaurea.it>

# Sistemi lineari, loro applicazioni e aspetti computazionali

## Sommario

I sistemi di equazioni lineari hanno una storia molto antica e una teoria ben consolidata. Sono comunque oggetti ancora molto importanti per la ricerca matematica, in quanto modellizzano svariate situazioni del mondo reale, che fanno parte della vita di ogni giorno, ed è grazie alla risoluzione efficiente di sistemi di equazioni che possiamo ad esempio mettere facilmente a fuoco una foto sfocata, mediante un programma di foto ritocco.

In questa nota rivisiteremo i sistemi lineari, ponendo particolare attenzione alle applicazioni e agli aspetti computazionali, tracciando anche un percorso storico.

## 1 Sistemi di equazioni lineari

Un problema abbastanza familiare che si incontra nelle scuole superiori è quello di risolvere un sistema di equazioni del tipo

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

dove  $a; b; c; d; e; f$  sono numeri assegnati e dove si cercano soluzioni  $x; y$  che soddisfino simultaneamente le due equazioni. Sappiamo che, a seconda dei valori dei dati  $a; b; c; d; e; f$ , un sistema di questo tipo può non avere soluzioni, ne può avere infinite o, nella situazione generalmente più desiderata, ammettere una sola soluzione. Ad esempio il sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x + 6y = 17 \end{cases}$$

ha unica soluzione  $x = 1, y = 2$ .

Uno dei motori più significativi che alimentano la ricerca in matematica è la curiosità intellettuale, e tra i desideri più frequenti per un matematico c'è la spinta a generalizzare ed estendere il più possibile i concetti e gli strumenti disponibili. Per questo viene naturale considerare sistemi di tre equazioni e tre incognite o più in generale di  $n$  equazioni e  $n$  incognite, dove  $n > 1$  è un numero intero qualsiasi. In questo caso, non avendo un numero sufficiente di lettere per rappresentare i coefficienti di questi sistemi conveniamo di

usare degli indici per descrivere coefficienti, termini noti e incognite. Denotiamo allora  $x_j$ , per  $j = 1; 2; \dots; n$ , le  $n$  incognite, con  $a_{i,j}$  il coefficiente di  $x_j$  nella equazione  $i$ -esima e con  $b_i$  il termine noto nell'equazione  $i$ -esima. In questo modo il sistema si lascia scrivere nella forma seguente

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

In sintesi il sistema viene univocamente individuato da una tabella di  $n \times n$  coefficienti  $A = (a_{i,j})_{i,j=1;\dots;n}$ , che è chiamata matrice, e da una  $n$ -upla di termini noti  $b = (b_i)_{i=1;\dots;n}$ . In forma compatta il sistema viene scritto semplicemente come

$$Ax = b$$

dove  $x = (x_i)_{i=1;\dots;n}$  è la  $n$ -upla delle incognite e la giustapposizione di  $A$  e  $x$  sintetizza la parte sinistra dell'espressione (1). Se vogliamo ricordare la struttura delle equazioni possiamo scrivere il sistema anche con la notazione

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i; \quad i = 1; 2; \dots; n;$$

dove la notazione  $\sum_{j=1}^n$  significa sommare tutti i termini per  $j$  che scorre da 1 a  $n$ . Nessuno ci vieta di considerare sistemi lineari  $n$  equazioni in  $m$  incognite, con  $m \in \mathbb{N}$ , cioè del tipo

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j = b_i; \quad i = 1; 2; \dots; n;$$

oppure di  $n$  equazioni e  $n$  incognite, basta per questo considerare l'espressione

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i; \quad i = 1; 2; \dots; n$$

purché la somma di un numero finito di addendi dia un risultato finito.

## 2 Applicazioni

Sono innumerevoli i problemi del mondo reale che si riducono alla risoluzione di sistemi lineari. In questa sezione vogliamo presentare alcuni esempi, in forma semplificata, che sono molto significativi come rappresentanti di problemi reali.

## 3 Problemi di equilibrio

Problemi di equilibrio intervengono in numerose applicazioni del mondo reale. Vediamo una applicazione della chimica e una della fisica.

Bilanciamento di una equazione chimica

Consideriamo la reazione chimica



Bilanciare la reazione significa trovare i valori  $x, y, z$  e  $t$  tali che il numero di atomi di ciascun elemento sia lo stesso in entrambi i membri dell'equazione:



Questo porta al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x & z = 0 \\ 6x & 2t = 0 \\ 2y & 2z & t = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione generale è

$$\begin{cases} y = \frac{7}{2}x \\ z = 2x \\ t = 3x \end{cases}$$

Poiché siamo interessati a soluzioni intere, scegliamo  $x=2$ , dunque otteniamo  $y=7, z=4, t=6$  e l'equazione bilanciata è



Problemi più complessi richiedono la soluzione di sistemi di equazioni lineari con un numero molto più alto di incognite.

Collana appesa a due estremità

Una collana è costituita da perle collegate da un filo elastico, dove la forza esercitata tra due perle è proporzionale alla distanza delle perle. Le perle sono soggette anche alla forza peso. Qual è la configurazione di equilibrio se appendiamo la collana a due estremità fissate?

Fissiamo un sistema di assi cartesiani con l'origine nell'estremo sinistro in cui è fissata la collana, indichiamo con  $(x_i, y_i)$  le coordinate della  $i$ -esima perla, per  $i = 1; \dots; n$ , e con  $(b_1; b_2)$  le coordinate dell'estremità destra a cui è fissata la collana. Sulla prima perla, per  $i = 2; \dots; n - 1$ , agisce la forza di gravità e le forze elastiche esercitate dalle due perle contigue. Più precisamente, sulla costante elastica del filo, nella direzione dell'asse  $x$  agiscono le forze

$$k(x_i - x_{i+1}) - k(x_i - x_{i-1});$$

mentre nella direzione dell'asse  $y$  agiscono le forze

$$p_i - k(y_i - y_{i-1}) - k(y_i - y_{i+1});$$

dove  $p_i$  è la forza peso che agisce sulla  $i$ -esima perla. Sulla prima e l'ultima perla agiscono, rispettivamente, le forze nella direzione dell'asse  $x$

$$\begin{aligned} kx_1 - k(x_1 - x_2); \\ k(x_n - x_{n-1}) - k(x_n - b_1); \end{aligned}$$

mentre nella direzione dell'asse  $y$

$$\begin{aligned} p_1 - ky_1 - k(y_1 - y_2); \\ p_n - k(y_n - y_{n-1}) - k(y_n - b_2); \end{aligned}$$

assumendo per semplicità che la forza elastica esercitata dalle due estremità fissate abbia la stessa costante elastica.

La figura 1 sintetizza le 3 forze che agiscono su una generica perla della collana.

Figura 1: Le tre forze che agiscono sulla perla-esima

Imponendo la condizione di equilibrio, cioè che la somma delle forze sia zero, lungo l'asse otteniamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0; \\ x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} &= 0; \quad i = 2; \dots; n-1; \\ x_{n-1} + 2x_n &= b_1; \end{aligned}$$

mentre lungo l'asse otteniamo il sistema

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 &= p_1 = k; \\ y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} &= p_i = k; \quad i = 2; \dots; n-1; \\ y_{n-1} + 2y_n &= b_2 + p_n = k; \end{aligned}$$

Questi sono due sistemi di equazioni in incognite che hanno un'unica soluzione, che ci fornisce le coordinate  $(x_i, y_i)$  delle perle nella condizione di equilibrio. La figura 2 mostra la posizione di equilibrio di una collana formata da 12 perle di uguale massa dove l'estremo sinistro ha quota 6 e quello destro ha quota -3.

Figura 2: Posizione di equilibrio di una collana formata da 12 perle di uguale massa appesa alle due estremità.

Possiamo estendere questa analisi per studiare la deformazione di una rete a molle di un letto. Stavolta ogni punto della rete è individuato da tre coordinate  $(x_i; y_i; z_i)$ . Se la rete ha  $n$  maglie, in totale

abbiamo  $n^2$  punti da individuare, che si ottengono risolvendo tre sistemi di equazioni lineari, ciascuno con  $n^2$  equazioni e  $n^2$  incognite. In particolare, se  $n = 10^3$  abbiamo  $10^6$  incognite!

#### 4 Analisi di reti e problemi del Web

Una rete (meglio conosciuta come network) è costituita da un insieme di nodi e di archi che connettono i nodi. Ad esempio:

- ^ Reti del web: l'insieme dei nodi è l'insieme delle pagine web e gli archi rappresentano i link da una pagina all'altra.
- ^ Social networks gli archi rappresentano le connessioni tra varie persone (i nodi) in termini di amicizia, collaborazione, abitudini, . . . .
- ^ Modelli di tra co: l'insieme di nodi è costituito da punti di smistamento di un tra co (ad esempio gli incroci in un tra co stradale, oppure gli aeroporti) e gli archi sono le connessioni tra i vari nodi.

La dinamica nel tempo di queste reti può essere studiata risolvendo sistemi di equazioni lineari. Nel caso del problema del Page-Rank di Google, trattato in [3], il sistema di equazioni lineari ha dimensione circa 10 miliardi.

#### 5 Modelli economici

Wassily Leontief ha ricevuto il premio Nobel nel 1973 per il suo modello di sviluppo dell'economia, che può essere interpretato mediante sistemi di equazioni lineari. Nel modello più semplice si studia un sistema economico formato da industrie, in cui ciascuna industria consuma dei beni prodotti dalle altre industrie o da essa stessa (ad esempio un impianto che genera energia elettrica utilizza per la produzione un po' dell'energia che genera). Il sistema economico è detto chiuso se soddisfa le proprie necessità, cioè nessun prodotto entra o esce dal sistema economico. Indichiamo con  $n_i$  il numero di unità che l'industria  $i$  produce e anche l'industria  $i$  produca



una unità. Se  $p_k$  rappresenta la produzione totale dell'industria  $k$  allora  $m_{i;j} p_j$  rappresenta il numero di unità prodotte dall'industria  $s_j$  e consumate dall'industria  $s_i$ . Dunque il numero totale di unità prodotte dall'industria  $s_i$  è data da

$$m_{i;1}p_1 + m_{i;2}p_2 + \dots + m_{i;n}p_n$$

Per avere un'economia bilanciata, la produzione totale di ciascuna industria deve essere uguale al suo consumo totale. Questo porta al sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} & m_{1;1}p_1 + m_{1;2}p_2 + \dots + m_{1;n}p_n = p_1 \\ & m_{2;1}p_1 + m_{2;2}p_2 + \dots + m_{2;n}p_n = p_2 \\ & \vdots \\ & m_{n;1}p_1 + m_{n;2}p_2 + \dots + m_{n;n}p_n = p_n \end{aligned}$$

Ad esempio, supponiamo che l'economia di una certa regione dipenda da tre industrie: un'industria che produce servizi, una che produce energia elettrica e un'industria petrolifera. Dopo aver monitorato le attività di queste tre industrie, si osserva che:

- ^ per produrre una unità di servizi, l'industria che produce servizi consuma 0,3 unità della propria produzione, 0,3 unità di elettricità e 0,3 unità di petrolio;
- ^ per produrre una unità di elettricità, l'industria che produce elettricità ha bisogno di 0,4 unità di servizi, 0,5 unità di petrolio e 0,1 unità della propria produzione;
- ^ l'industria petrolifera, per produrre una unità di petrolio, ha bisogno di 0,3 unità di servizi, 0,6 unità di elettricità e di 0,2 unità della propria produzione.

Vogliamo calcolare quanto ciascuna industria debba produrre per soddisfare le richieste proprie e delle altre industrie, assumendo che nessun prodotto entri e esca dal sistema. Quindi il consumo totale di ciascuna industria deve essere uguale alla sua produzione

totale. Indicando con  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  rispettivamente la produzione dell'industria di servizi, dell'industria che produce energia elettrica e dell'industria petrolifera, si ottiene il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 0.3p_1 + 0.3p_2 + 0.3p_3 = p_1 \\ 0.4p_1 + 0.1p_2 + 0.5p_3 = p_2 \\ 0.3p_1 + 0.6p_2 + 0.2p_3 = p_3; \end{cases}$$

la cui soluzione generale è  $p_1 = 0.82s$ ,  $p_2 = 0.92s$ ,  $p_3 = s$ , con  $s$  qualsiasi. Poiché cerchiamo soluzioni positive, possiamo ad esempio scegliere  $s = 100$ , quindi  $p_1 = 82$  unità,  $p_2 = 92$  unità e  $p_3 = 100$  unità.

Questo modello economico assume che non ci siano beni che entrino o escano dal sistema, ma nella realtà questo succede raramente. Generalmente un'industria produce anche dei beni per richieste esterne al sistema, ad esempio l'industria petrolifera produce del petrolio per l'esportazione. In tal caso, indicando con  $d_i$  la richiesta di produzione all'industria  $i$  per l'esterno, l'equazione che deve soddisfare l'industria  $i$ -esima è

$$m_{i;1}p_1 + m_{i;2}p_2 + \dots + m_{i;n}p_n + d_i = p_i:$$

## 6 Restauro di immagini

Un'immagine digitale, ad esempio una fotografia, viene codificata da una o più tabelle di numeri (matrici), che rappresentano i pixel che formano l'immagine. Ad esempio, una foto in bianco/nero viene rappresentata con una tabella di numeri, il cui numero in posizione  $(i; j)$  rappresenta l'intensità luminosa del puntolino (pixel) di coordinate  $(i; j)$  nella foto. Di solito il nero si rappresenta con 0 e il bianco con 255. Una foto a colori è rappresentata da tre tabelle di numeri: una per il rosso, una per il verde e una per il blu (codice RGB).

Un problema che si presenta in tantissime applicazioni, ad esempio nello studio di foto scattate da satelliti, è la rimessa a fuoco di immagini sfocate. Se interpretiamo un'immagine come la sovrapposizione di tante immagini fatte di un solo puntolino, allora

l'immagine sfocata è la somma delle sfocature di ogni singolo puntolino dell'immagine originale. Inoltre, la sfocatura di un singolo puntolino, è essa stessa un'immagine, che rappresenterà una piccola macchiolina. La figura 3 mostra l'immagine di un puntolino luminoso e la sua sfocata.

Figura 3: Immagine di un puntolino luminoso e la sua sfocata

Nel caso di un'immagine bianco/nero, la sfocatura di un puntolino bianco su sfondo nero sarà una matrice che ha pochi elementi diversi da 0, che si concentrano intorno al puntolino. Chiamiamo con  $A = (a_{i;j})_{i;j}$  la matrice che descrive il punto sfocato e, per convenienza, facciamo scorrere gli indici  $i;j$  da  $-k$  a  $k$ , dove  $2k + 1$  è l'ampiezza della patacca e dove il centro della patacca ha indici  $i = 0, j = 0$ . Se chiamiamo  $X = (x_{i;j})_{i=1; \dots; m; j=1; \dots; n}$  la matrice che rappresenta l'immagine originale e  $S = (s_{i;j})_{i=1; \dots; m; j=1; \dots; n}$  la matrice che rappresenta quella sfocata, vale la relazione

$$s_{i;j} = \sum_{p=-k}^k \sum_{q=-k}^k a_{p;q} x_{i-p; j-q}; \quad i = 1; \dots; m; j = 1; \dots; n;$$

dove si assume  $x_{i;j} = 0$  se  $i \notin \{1; \dots; m\}, j \notin \{1; \dots; n\}$ . Dunque, sfocare un'immagine significa calcolare  $S$  mentre rimettere a fuoco significa risolvere un sistema lineare. Il numero di equazioni e di incognite è dato dal numero  $m \cdot n$  di pixel dell'immagine. Per rimettere a fuoco una fotografia di 20 Megapixel occorre risolvere un sistema con 20 milioni di incognite!

Nella figura 4 è riportata una immagine originale, una versione sfocata e il risultato della rimessa a fuoco ottenuta risolvendo in modo approssimato il sistema lineare che descrive la sfocatura.

Figura 4: Immagine originale, immagine sfocata e immagine rimessa a fuoco risolvendo un sistema lineare

## 7 Come si risolve un sistema lineare

Per le innumerevoli applicazioni, il problema del calcolo della soluzione di un sistema di equazioni lineari è stato affrontato sotto i seguenti aspetti:

- ^ dal punto di vista algoritmico, con lo sviluppo e l'analisi di metodi di risoluzione che in particolare permettano di risolvere sistemi di grandi dimensioni in tempi di calcolo ragionevoli;
- ^ dal punto di vista numerico, con lo studio della propagazione degli errori dovuti all'uso dell'aritmetica floating point dei calcolatori.

Nelle sezioni seguenti andiamo a analizzare questi aspetti.

## 8 Complessità computazionale

Per risolvere un sistema di due equazioni e due incognite conosciamo il metodo di sostituzione che consiste nel ricavare una incognita, ad esempio  $y$ , dalla prima equazione, sostituirla nella seconda equazione in modo da ottenere una equazione di primo grado nella sola  $x$ . Risolta questa equazione possiamo così ricavare  $x$ . Questo metodo è noto come metodo di Gauss. Un altro metodo, noto come metodo di Cramer, che viene spesso presentato per la sua eleganza, permette di scrivere le soluzioni  $x$  e  $y$  come rapporto di due determinanti.

Entrambi questi metodi possono essere estesi al caso di un sistema di  $n$  equazioni in  $n$  incognite. Ma quante operazioni aritmetiche

dobbiamo svolgere per applicare questi metodi? Questa domanda non è banale poiché ci aiuta a capire quanto tempo dobbiamo aspettare affinché un computer fornisca la soluzione di un sistema. Nonostante i computer disponibili attualmente siano molto veloci e possano eseguire miliardi di operazioni al secondo, può accadere di dover aspettare anni o addirittura millenni prima di avere la soluzione calcolata da un computer. Allora è opportuno sapere il costo di un metodo di risoluzione come funzione di  $n$ .

Il costo del metodo di Cramer e del metodo di Gauss è valutabile quantomeno nella parte più costosa. Infatti il metodo di Gauss, risolve un sistema eseguendo circa  $\frac{2}{3}n^3$  operazioni aritmetiche, mentre il metodo di Cramer, in cui i determinanti sono calcolati con la regola di Laplace dello sviluppo per righe, ha un costo di circa  $2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n(n+1) = (n+1)!$  operazioni aritmetiche. Le due funzioni hanno un andamento molto diverso. Nella tabella 2 si riportano i tempi di esecuzione stimati dei due algoritmi eseguiti su un PC che esegue un miliardo di operazioni al secondo. È sorprendente osservare che per risolvere un sistema di 50 equazioni col metodo di Cramer occorrono circa  $5 \cdot 10^{42}$  miliardi di anni mentre per il metodo di Gauss bastano pochi millesimi di secondo! A confronto il tempo trascorso dall'universo dal Big Bang ad oggi, che è di circa 137 miliardi di anni, diventa trascurabile rispetto a quello impiegato dal metodo di Cramer.

n	Gauss	Cramer
5	0.08 milionesimi di secondo	0.7 milionesimi di secondo
10	0.6 milionesimi di secondo	4 secondi
20	530 milionesimi di secondo	160 migliaia di anni
50	8.3 millesimi di secondo	$5 \cdot 10^{42}$ miliardi di anni
$10^3$	66 secondi	$1:3 \cdot 10^{2546}$ miliardi di anni
$10^6$	2114 anni	$2:6 \cdot 10^{5565699}$ miliardi di anni
$10^9$	2114 miliardi di anni	*

Tabella 2: Tempi stimati per risolvere un sistema di  $n$  equazioni in incognite con un PC usando i metodi di Gauss e di Cramer.

Il metodo di Gauss richiede ancora tempi di risoluzione ragionevoli se la dimensione del sistema è moderatamente grande, ad

esempio, alcune migliaia, ma se ad esempio dell'ordine di 20 milioni come nel problema della rimessa a fuoco di una fotografia di 20 Megapixel che è venuta sfocata, o dell'ordine di 10 miliardi come nel caso del problema del PageRank, il tempo di calcolo richiederebbe migliaia di anni anche usando un super computer.

In questi casi la fantasia del matematico deve escogitare metodi specifici che sfruttino le peculiarità di questi sistemi come accade appunto per i due problemi citati.

Se  $n$  è molto grande può essere conveniente utilizzare metodi iterativi [4], che non calcolano esattamente la soluzione  $x_1, \dots, x_n$  del sistema, ma calcolano successioni  $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , tali che  $x_i^{(j)} \rightarrow x_i$  per  $j \rightarrow \infty$ , per  $i = 1, \dots, n$ . Sotto opportune ipotesi, è sufficiente un valore piccolo di  $j$  affinché  $x_i^{(j)}$  sia una buona approssimazione di  $x_i$ . L'idea è dunque calcolare  $x_i^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , con  $j$  moderatamente piccolo, e prendere come approssimazione di  $x_i$ . In generale, ciascuna iterazione, cioè il calcolo di  $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$  dati  $x_1^{(j-1)}, \dots, x_n^{(j-1)}$ , richiede circa  $2n^2$  operazioni aritmetiche. Dunque se è il numero di iterazioni effettuate, il tempo di calcolo cresce come  $n^3$ , che è decisamente più basso rispetto a quello del metodo di Gauss, che è molto più piccolo della dimensione  $n$ .

Il costo per iterazione può essere abbassato se la matrice  $A$  che definisce il sistema, ha delle particolari caratteristiche. Ad esempio, per il problema del PageRank, è una matrice così detta sparsa, cioè ha pochi elementi  $a_{ij}$  diversi da zero rispetto alla dimensione  $n$ , dunque una iterazione richiede circa  $k$  operazioni, dove  $k$  è il numero di elementi diversi da zero [1]. La sparsità della matrice  $A$  è dovuta al fatto che una generica pagina del Web non contiene link a tutte le pagine esistenti ma solo ad alcune. Per cui in ogni riga di  $A$  ci sono pochi elementi uguali a 1 e tutti gli altri uguali a zero.

Per il problema della ristrutturazione di immagini, la matrice ha una struttura così detta Toeplitz, per cui una iterazione può essere calcolata mediante algoritmi veloci basata sulla Fast Fourier

Transform (FFT), con un numero di operazioni proporzionale a  $n \log n$  [2].

## 9 Propagazione degli errori

Un altro problema computazionale non banale riguarda gli errori. Infatti, facendo eseguire un metodo di risoluzione a un computer e utilizzando la velocissima aritmetica floating point, accade che ad ogni operazione vengono generalmente introdotti errori molto piccoli, ma che possono sommarsi e amplificarsi durante il calcolo e rovinare completamente il risultato. Questi piccoli errori sono dovuti al fatto che i numeri floating point si rappresentano con un numero finito di cifre, per cui occorre spesso troncare a questo valore il numero di cifre dei risultati calcolati ad ogni passo. Al termine del calcolo, il computer restituisce dei numeri  $x_1, \dots, x_n$ , che sono una approssimazione della soluzione esatta  $x_1, \dots, x_n$ .

Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 + (1 + \epsilon)x_2 = 1 + 2\epsilon \\ x_1 + \epsilon^{-1}x_2 = 1 + \epsilon^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

dove  $\epsilon > 0$  è un numero assegnato, ha una unica soluzione data da  $x_1 = 1, x_2 = 1$ . La Tabella 3 mostra, per diversi valori di  $\epsilon$ , i valori di  $x_1$  e  $x_2$  calcolati da un PC utilizzando l'eliminazione di Gauss e l'errore di approssimazione, denotato come

$$\max_j |x_j - x_j^*|, j=1,2$$

Si osserva come i risultati deteriorino quando  $\epsilon$  diventa piccolo. In particolare, se  $\epsilon = 10^{-8}$ , il valore di  $x_1$  è addirittura negativo. Dalla tabella si osserva che, dividendo per 10, l'errore viene circa moltiplicato per 100 o, in altri termini, il numero di cifre corrette diminuisce di 2.

H. Hotelling negli anni 40 del secolo scorso dimostrò che, in generale, quando si applica il metodo di Gauss gli errori generati ad ogni operazione possono crescere esponenzialmente in funzione di

$n$	$x_1$	$x_2$	errore
$10^4$	1	1	0
$10^5$	1.000001110223025	0.999999999988897	$1.11 \cdot 10^{-6}$
$10^6$	0.999777955395075	1.000000000222045	$2.22 \cdot 10^{-4}$
$10^7$	1.022204460492503	0.99999997779554	$2.22 \cdot 10^{-2}$
$10^8$	-1.2204460714547741	1.000000022204461	2.22

Tabella 3: Soluzione e errore calcolati  $x_1, x_2$  del sistema (2) e errore  $\max_{j=1,2} |x_j - x_{2j}|$ , per diversi valori di  $n$

In questo modo il metodo sarebbe completamente inutilizzabile poiché produrrebbe dei risultati completamente rovinati dall'errore. In realtà la situazione non è così catastrofica se si utilizzano particolari tecniche per controllare la crescita degli errori. Nel 1948, A. Turing introdusse delle strategie, successivamente adottate da J. H. Wilkinson, dette strategie di pivoting per scegliere quale incognita ricavare da quale equazione da sostituire nelle altre in modo tale che gli errori generati dall'aritmetica floating point siano tenuti sotto controllo. Successivamente, A. Householder introdusse un metodo di risoluzione che ha un costo leggermente più alto (più operazioni aritmetiche) che non produce alcuna amplificazione degli errori.

Ad esempio, vogliamo risolvere il sistema di equazioni in  $n$  incognite

$$\begin{array}{l}
 0 \cdot x_1 + x_n = 1 \\
 x_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \\
 x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \\
 \vdots \\
 x_{n-1} + 0 \cdot x_n = 1
 \end{array} \quad (3)$$

che ha come soluzione  $x_1 = 1; x_2 = 1; \dots; x_n = 1$ . Calcoliamo la soluzione al PC utilizzando l'eliminazione di Gauss con e senza strategie di pivoting, per diversi valori di  $n$ . La Tabella 4 mostra, al variare di  $n$ , l'errore di approssimazione, definito come  $\max_{i=1, \dots, n} |x_i - x_{2i}|$ , dove  $x_i$  è la soluzione calcolata dal PC, con e senza strategie di pivoting. Si osserva come i risultati deteriorino quando  $n$  aumenta se non si usano strategie di pivoting, invece i risultati hanno errori molto bassi e quasi indipendenti da



utilizzando pivoting.

n	Con Pivoting	Senza Pivoting
5	0	9:09 $10^{13}$
10	2:22 $10^{16}$	1:32 $10^7$
15	2:22 $10^{16}$	1:82 $10^2$
20	1:11 $10^{16}$	9:61 $10^2$
25	1:11 $10^{16}$	1:13 $10^8$

Tabella 4: Errore  $\max_{i=1, \dots, n} |x_i - \tilde{x}_i|$  della soluzione del sistema (3), calcolata con e senza strategia di pivoting, per diversi valori di n

## 10 Cenni storici

La comparsa dei sistemi di equazioni lineari, in base alle conoscenze storiche attuali, risale alla cultura cinese di oltre 2500 anni fa. I primi tentativi documentati di risolvere sistemi si trovano nel libro cinese Chiu-chang Suan-shu (nove capitoli sull'aritmetica) che si stima fosse stato scritto intorno al 200 AC. All'inizio dell'ottavo capitolo è descritto il problema:

tre fasci di grano di buona qualità, due di media qualità e uno di cattiva qualità sono venduti a 39 dou; due fasci di buona qualità, tre di media e uno di cattiva qualità sono venduti a 34 dou; un fascio di buona qualità, due di media e tre di cattiva qualità sono venduti a 26 dou. Quali sono i costi di ciascun fascio di buona, media e cattiva qualità?

In chiave moderna il problema si formula con il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Nel libro il problema viene affrontato mettendo dei bastoncini colorati di bambù, che rappresentano i coefficienti, in un tavoliere e le righe del tavoliere vengono manipolate secondo delle regole opportune.

Documentazioni successive si hanno dopo quasi due millenni, quando il matematico giapponese S. Kowa (1642-1708) migliora

la tecnica cinese introducendo il concetto attualmente noto come determinante. Circa nello stesso periodo il matematico tedesco G. W. Leibniz (1646 1716) sviluppa in modo indipendente il suo concetto di determinante. Sembra che sia nel lavoro di Kowa che in quello di Leibniz sia contenuta quella che poi verrà chiamata la regola di Cramer per risolvere sistemi, scoperta poi da G. Cramer (1704 1752).

Tra il 1750 e il 1900 viene scritto molto sul concetto di determinante, esso diventa lo strumento più importante per risolvere sistemi lineari. Nel 1809 il matematico tedesco C. F. Gauss usa il metodo di sostituzione per risolvere sistemi, chiamato solo recentemente metodo di eliminazione gaussiana. Nel 1930, W.H. Richardson sviluppa metodi iterativi.

Gli aspetti computazionali dell'algebra lineare cominciano ad essere studiati con J. von Neumann (1903 1957), matematico ungherese emigrato in America negli anni '40. L'avvento dei calcolatori dà un grande impulso alla ricerca di metodi di risoluzione e cienti. Nel 1932 M. Picone crea il corso **Calcoli Numerici e Gra ci**: sistemi lineari, non lineari, integrazione, analisi di Fourier presso la Scuola di Scienze Statistiche e Attuariali di Roma. A proposito dei sistemi Picone scrive: il problema può essere considerato come la divisione tra numeri in piu dimensioni... Mentre per la divisione esistono macchine automatiche, per i sistemi lineari non è così ... Recentemente il prof. Malloc dell'Università di Cambridge ha costruito una macchina elettrica molto originale che può risolvere sistemi no a 10 equazioni e incognite. Nel 1946, L. Fox, C. Goodwin, A. Turing e J. H. Wilkinson risolvono un sistema ~~18~~ 18 con una calcolatrice da tavolo in due settimane.

Nel 1943 H. Hotelling (1895 1973) dimostra che il metodo di Gauss è inabile se usato con una aritmetica approssimata come è quella dei computer, a causa della grande amplificazione degli errori. Nel 1947 von Neumann e Goldstein dimostrano che il metodo di Gauss è abile se applicato a matrici definite positive. È

J. H. Wilkinson (1919 1986) a fare per primo un'analisi sistematica e rigorosa degli errori e a dimostrare che il metodo di Gauss, accompagnato da opportune strategie di pivoting, è comunque a dabile ed efficiente. Gli aspetti computazionali dell'algebra lineare hanno un grandissimo sviluppo a partire dal secolo scorso, con notevoli contributi del matematico americano G. H. Golub (1932 2007).

Un enorme impulso alla ricerca è stato dato dalle applicazioni. I modelli matematici nelle scienze applicate, nel calcolo scientifico e nell'ingegneria si riconducono alla risoluzione di grossi sistemi di equazioni lineari. Maggiore è l'accuratezza del modello e maggiore è il numero di equazioni e incognite del sistema. Allo studioso è richiesta la continua individuazione e analisi di metodi efficienti che permettano di trattare problemi di dimensioni sempre più grandi in tempi di calcolo contenuti.

Lo sviluppo di internet, in particolare l'analisi delle reti complesse, ha moltiplicato i problemi allo studio e aumentato significativamente l'importanza e l'interesse dei metodi dell'algebra lineare..

Dario A. Bini e Beatrice Meini,  
Professori Ordinari presso il Dipartimento di Matematica di  
Pisa

Riferimenti bibliografici

- [1] A.N. Langville and C.D. Meyer, Google's PageRank and beyond: the science of search engine rankings. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [2] M.K. Ng, Iterative methods for Toeplitz systems. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2004.
- [3] F. Poloni, La matematica dell'importanza. Il giornalino degli Open Days<sup>o</sup> 2. 2016
- [4] R.S. Varga, Matrix iterative analysis. Springer Series in Computational Mathematics, 27. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

# Matematica del conteggio

L'idea in queste pagine è di illustrare alcuni degli scopi e dei metodi della combinatoria enumerativa, quella parte della matematica che detto molto in generale si occupa di contare il numero di possibili configurazioni che un sistema discreto può assumere, al variare di uno o più parametri scelti. Partiamo con un esempio standard che ci permette di accennare ad alcuni strumenti di base.

## 1 Enumerazione di alberi binari orientati

Un albero binario orientato si sviluppa a partire da una radice, con due figli per ogni nodo non terminale (Fig. 5A). Il termine orientato indica che stiamo considerando anche l'orientamento destra/sinistra dei vari rami. Come si vede nella Figura 5A, per  $n = 1; 2; 3; 4$  ci sono rispettivamente 1; 2; 5 alberi binari orientati con  $n$  foglie. Quanti alberi ci sono per un valore  $n$  arbitrario? Vediamo come dare una formula esatta introducendo alcune tecniche di conteggio.

Denotiamo con  $a_n$  il numero di alberi con  $n$  foglie quindi  $a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = 2; a_4 = 5$ ; e così via. La soluzione al nostro problema può essere trovata attraverso la funzione generatrice

$$A(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$

associata alla sequenza  $(a_n)$ . Senza preoccuparci troppo di problemi di convergenza, interpretiamo la nostra funzione  $A(z)$  come una somma in serie puramente simbolica, in cui le potenze  $z^n$  sono dei segnaposti per i numeri  $a_n$ .

Il primo passo verso la soluzione consiste nel trovare un'equazione per  $A(z)$ . L'idea è di tradurre in equazione la naturale decomposizione degli alberi che stiamo considerando. In Figura 5B, si vede che per un albero binario con  $n$  foglie ci sono due opzioni possibili: o  $t$  consiste di una sola foglia, cioè  $n = 1$ , oppure, se  $n > 1$ ,  $t$  si decompone nei due sottoalberi attaccati alla radice. Questi avranno rispettivamente  $e$  ed  $n - e$  foglie, per un certo valore

Figura 5: Alberi binari orientati. (A) Alberi con  $1 \leq n \leq 5$  foglie. (B) Decomposizione di un albero con  $n \geq 1$  foglie.

$1 \leq i \leq n - 1$ . Per  $n > 1$ , tale decomposizione si traduce direttamente nella ricorrenza  $a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_1$ , che ci fornisce

$$\begin{aligned} A(z) &= a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \\ &= a_1 z + (a_1 z a_1 z) + (a_1 z a_2 z^2 + a_2 z^2 a_1 z) \\ &\quad + (a_1 z a_3 z^3 + a_2 z^2 a_2 z^2 + a_3 z^3 a_1 z) + \dots \\ &= a_1 z + a_1 z (a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots) \\ &\quad + a_2 z^2 (a_1 z + a_2 z^2 + \dots) + a_3 z^3 (a_1 z + \dots) + \dots \\ &= a_1 z + a_1 z A(z) + a_2 z^2 A(z) + a_3 z^3 A(z) + \dots \\ &= a_1 z + A(z) (a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots) = a_1 z + A(z) A(z) \\ &= z + A(z)^2: \end{aligned}$$

Trovata l'equazione che cercavamo, possiamo in questo caso anche risolverla ottenendo

$$A(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2}.$$

L'espansione in serie di potenze  $A(z)$  per  $z = 0$  ci mostra che  $A(z) = A(0) + \frac{A'(0)}{1!} z + \frac{A''(0)}{2!} z^2 + \frac{A'''(0)}{3!} z^3 + \frac{A^{(4)}(0)}{4!} z^4 + \dots$ ; dove  $A(0) = 0$  e per  $n \geq 1$

$$\frac{A^{(n)}(0)}{n!} = a_n.$$

Veri chiamo quest'ultima uguaglianza per i primi valori di  $n$ . Poiché  $A'(z) = (1 - 4z)^{-1/2}$  si ha che  $\frac{A'(0)}{1!} = 1 = a_1$ , poi  $A''(z) = 2(1 - 4z)^{-3/2}$

$4z)^{3=2}$  ci dice che  $\frac{A^{(0)}(0)}{2!} = 1 = a_2$ , siccome  $A^{(0)}(z) = 12(1-4z)^{5=2}$  abbiamo che  $\frac{A^{(0)}(0)}{3!} = 2 = a_3$ , ed in  $A^{(0)}(z) = 120(1-4z)^{7=2}$  implica che  $\frac{A^{(0)}(0)}{4!} = 5 = a_4$ .

Attraverso semplici operazioni di derivazione, l'espressione trovata per la funzione generatrice  $A(z)$  ci permette quindi di calcolare il valore dei numeri  $a_n$  per un  $n$  arbitrario. In particolare, si verifica direttamente che si ha

$$a_n = \frac{1}{n} \binom{2n}{n} \frac{2}{1}$$

Infatti, da come si comportano le prime derivate  $A'(z)$ , si vede che per  $n \geq 1$  il valore di  $A^{(n+1)}(0)$  può essere calcolato ricorsivamente come  $A^{(n+1)}(0) = 2(2n-1)A^{(n)}(0)$ . Da quest'ultima relazione, dividendo entrambi i membri per  $(n+1)!$ , otteniamo la ricorrenza

$$a_{n+1} = \frac{2(2n-1)}{n+1} a_n;$$

che è soddisfatta dalla formula per  $a_n$  indicata sopra.

Dall'ultima ricorrenza trovata si nota che, per  $n$  sufficientemente grande, il rapporto  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n-1)}{n+1}$  tende al valore  $4$ . Questo ci dice che la quantità  $a_n$  che stiamo studiando ha una crescita esponenziale del tipo  $4^n$ . La cosa interessante è che avremmo potuto dedurre questa proprietà asintotica direttamente dalla espressione trovata per  $A(z)$ . Detto in termini semplici, è infatti un fenomeno generale che una sequenza numerica cresce come  $(1/r)^n$  quando  $r$  è il più grande numero reale tale che in tutti i punti complessi  $a+ib$  di modulo  $|z| = \sqrt{a^2+b^2} < 1/r$  la funzione generatrice della sequenza risulta avere un andamento regolare, privo di spigolature o lacerazioni (Fig. 6). Nel caso della funzione  $A(z)$ , a causa della presenza della radice  $\sqrt{1-4z}$  abbiamo  $1/r = 1/4$ , da cui è possibile dedurre la crescita esponenziale del tipo  $(1/4)^n = 4^{-n}$  per la sequenza  $(a_n)$ .

La corrispondenza tra la crescita asintotica di una sequenza e le proprietà analitiche della funzione generatrice associata è ciò che rende la combinatoria analitica [1] uno strumento particolarmente utile per risolvere problemi enumerativi.

Figura 6: Parte reale (a sinistra) e parte immaginaria (a destra) della funzione  $f(z) = \frac{1}{1-4z}$ , con  $z = a + ib$ . Nella regione  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} < \frac{1}{4}$  (dentro il laccio), la funzione  $f(z)$  ha un andamento regolare.

## 2 Con gurazioni in alberi di specie

Dopo aver accennato alle funzioni generatrici ed al legame tra le loro proprietà analitiche e la crescita asintotica della sequenze numeriche associate, mostriamo brevemente un' applicazione di queste tecniche in ambito biologico-computazionale.

Un albero di specie è un albero binario che descrive le relazioni ancestrali tra specie o popolazioni (Fig. 7). I rami dell'albero rappresentano popolazioni che evolvono nel tempo. Andando dal basso verso l'alto (indietro nel tempo), due diverse popolazioni con uisco- no in uno stesso ramo che rappresenta la popolazione ancestrale ad entrambe. Gli intervalli temporali di questo processo corrispondono alle lunghezze dei vari rami dell'albero di specie. Ad esempio,

Figura 7: Un albero di specie con all'interno un albero filogenetico realizzato prendendo tre copie  $g; u; s$  dello stesso gene appartenenti ad individui delle tre specie considerate. Il gene  $u$  trova un progenitore comune con il gene  $g$  prima di trovarlo con il gene  $s$ .

in Figura 7 si considerano tre specie: Gorilla, Umani e Scimpan-

zé. Umani e Scimpanzé conuiscono in una stessa popolazione che, dopo un certo numero di generazioni misurato dalla lunghezza del rispettivo ramo, si congiunge con la popolazione dei Gorilla. Secondo tale rappresentazione, Umani e Scimpanzé sono in più stretta relazione tra loro di quanto lo siano con i Gorilla.

Può succedere ed in realtà succede spesso che seguendo la storia evolutiva di singole parti di genoma prese da individui delle popolazioni considerate, l'albero logenetico che se ne ricava non sia in accordo con l'albero di specie. In Figura 7, prendendo un gene che regola la stessa funzione in tre individui delle tre specie in esame, l'albero logenetico che si sviluppa all'interno dell'albero di specie ci dice che il gene preso dall'umano trova un antenato comune con il gene preso dal gorilla prima che le rispettive linee genetiche possano coalescere con la linea proveniente dal gene preso dallo scimpanzé. Questo tipo di fenomeno di discordanza, detto di incomplete lineage sorting [2], è correlato alle quantità temporali in gioco nell'evoluzione delle specie considerate: più sono corti i rami dell'albero di specie e più è probabile che a livello di singole porzioni di genoma l'albero logenetico sia non concorde.

Per calcolare la probabilità di tali eventi e, più in generale, per determinare con quale probabilità un certo albero logenetico può prodursi all'interno di un dato albero di specie, si usano modelli stocastici ed algoritmi la cui complessità può essere descritta attraverso lo studio della numerosità di certe strutture combinatorie che codificano i modi diversi con cui un albero logenetico può disporsi internamente ad un albero di specie. Di queste strutture se ne trovano di diversi tipi, a seconda dell'algoritmo che si considera. Accenniamo brevemente alle generazioni ancestrali, restringendoci al caso in cui l'albero logenetico e l'albero di specie siano concordi.

Supponiamo di avere un albero di specie ed un albero logenetico che hanno la forma dell'albero in Figura 8A. L'albero logenetico può inserirsi dentro l'albero di specie in vari modi, ad esempio come in Figura 8B o Figura 8C. La considerazione di erenzia



Figura 8: Con gurazioni diverse dello stesso albero logenetico in un albero di specie.

dalla con gurazione  $\mathcal{C}_2$  in base a quali sono i rami dell'albero di specie in cui avvengono le diverse coalescenze dell'albero logenetico interno (denotate in lettere greche). Nella con gurazione  $\mathcal{C}_1$ , le coalescenze dell'albero interno che avvengono nella radice dell' albero di specie sono  $e$ . Nella con gurazione  $\mathcal{C}_2$ , le coalescenze che avvengono nella radice dell'albero di specie sono invece  $f$  e  $g$ . I due insiemi  $\{f, g\}$  e  $\{e, f\}$  sono due delle possibili con gurazioni ancestrali alla radice dell'albero di specie. Un'altra possibile con gurazione ancestrale alla radice è ad esempio  $\{e, g\}$ , quando tutto l'albero interno si realizza nella radice dell'albero di specie.

In generale, la quantità da studiare è il numero di possibili con gurazioni ancestrali alla radice di un albero di specie. Per alberi di specie che sono massimamente asimmetrici, la quantità  $c(t)$  cresce in maniera polinomiale rispetto al numero di foglie in  $t$ . In altri casi,  $c(t)$  cresce in modo esponenziale. Cosa succede se prendiamo un albero di specie scelto a caso con probabilità uniforme tra tutti quelli che hanno  $n$  foglie? Usando una tecnica simile a quella adottata per l'enumerazione degli alberi binari orientati, si può far vedere che in media  $c(t)$  cresce asintoticamente come

$$E[c(t)] \sim \frac{3}{2} \left( \frac{4}{3} \right)^t$$

### 3 Conclusioni

Abbiamo brevemente accennato ad alcuni scopi e metodi della combinatoria enumerativa: la matematica del conteggio. Oltre alle possibili applicazioni, un aspetto interessante di questa disciplina

è dato dalla semplicità con cui i problemi possono essere formulati. Attenzione però, non sempre le soluzioni sono altrettanto semplici da trovare!

Filippo Disanto,  
Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

Riferimenti bibliografici

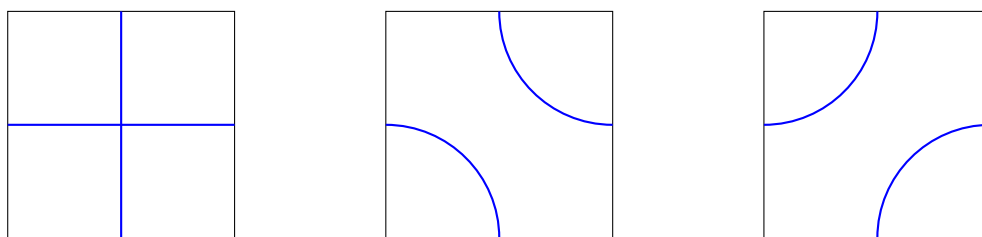
- [1] P. Flajolet, R. Sedgewick. 2009. Analytic Combinatorics. Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] D. Venema. 2013. Evolution Basics: Species Trees, Gene Trees and Incomplete Lineage Sorting. <https://biologos.org/blogs/dennis-venema-letters-to-the-duchess/evolution-basics-species-trees-gene-trees-and-incomplete-lineage-sorting/>

# Il gioco del Black!

## 1 Descrizione e regole

Il Black è un gioco da tavolo per due giocatori e deve il nome al suo ideatore William L. Black che lo inventò nel 1960 quando ancora era un giovane laureando al Massachusetts Institute of Technology. William aveva svolto degli studi su altri giochi da tavolo come l'Hex e il Bridg-it, e dal suo lavoro nacque il gioco del Black.

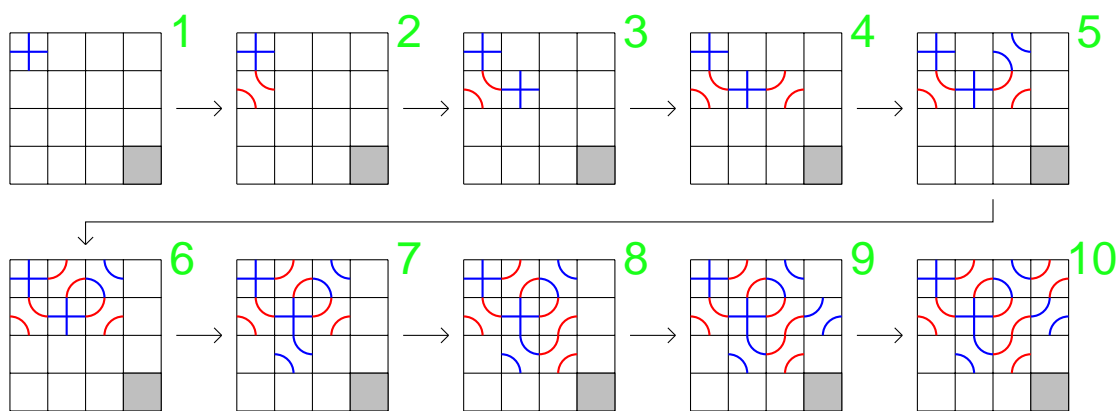
La versione originale del Black prevede una scacchiera e delle pedine marcate, ma può essere facilmente giocato con carta e penna. In particolare si disegna su di un foglio una scacchiera di forma rettangolare a piacere (la versione più comune è una scacchiera 8x8, ma nulla vieta di creare scacchiere molto allungate tipo 3x17) e il primo giocatore disegna una croce nella casella in alto a sinistra e annerisce la casella in basso a destra. A questo punto il secondo giocatore continua il percorso iniziato dal primo giocatore facendo uno dei tre segni indicati (rispettivamente posizionando la casella marcata col segno voluto) nella gura sotto in una delle caselle adiacenti alla prima:



Come si può notare, i tre segni disponibili hanno ciascuno due linee: una costituisce uno dei tre modi in cui il percorso può essere collegato; l'altra, almeno inizialmente, non sembra avere particolare interesse, ma vedremo che sarà il punto fondamentale per la creazione di una strategia vincente. Per quanto riguarda la casella a forma di croce, una volta imboccata una strada, non si può girare di novanta gradi: possiamo immaginare che le due strade siano in realtà dei fili elettrici e cambiare strada repentinamente provochi un cortocircuito.

I giocatori si alternano le mosse; ogni mossa deve prolungare il percorso in una casella adiacente. Il vincitore è colui che riesce a marcare con il proprio segno la casella annerita. Inoltre, se un giocatore prolunga il percorso facendolo sbattere contro un margine del rettangolo, perde automaticamente la partita. Una possibile strategia potrebbe quindi essere quella di spingere l'avversario contro il muro, piuttosto che puntare al raggiungimento del traguardo.

Vediamo adesso una possibile partita di Black in una scacchiera 4 4:



Osserviamo come le linee tracciate che all'inizio non collegano il percorso ritornano prepotentemente in gioco: al 5<sup>mo</sup> mossa il secondo giocatore riesce a sfuggire allo schianto contro il muro utilizzando una pedina già posizionata! Il primo giocatore riesce comunque a vincere la partita in questo caso non puntando direttamente alla casella annerita, ma osservando che con la 6<sup>a</sup> mossa lo schianto del secondo giocatore. Questa strategia è quella ottimale in questo caso; infatti, se avesse giocato la curva nell'altro senso, il secondo giocatore avrebbe potuto allungare il percorso sfruttando ancora una casella già presente nella scacchiera (quella (3,3)).

In una partita 4 4 è comunque possibile intravedere i percorsi possibili una volta che sono state posizionate un po' di caselle; è quindi possibile vedere le mosse "fatale" che ha portato il secondo giocatore alla sconfitta (la mossa (3,3)), ma in una scacchiera 8 8 le possibilità diventano moltissime e gli intrecci che si creano

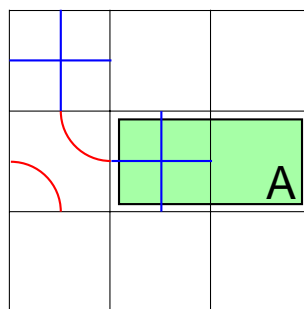
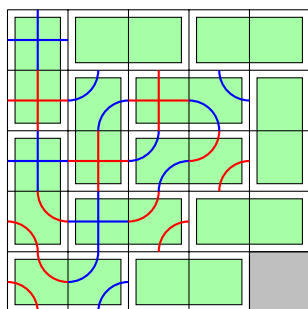
sono molto di cili da prevedere: una mossa sbagliata può essere "fatale". Provare per credere!

Il gioco fu felicemente accolto dalla comunità scientifica e il suo interesse matematico crebbe ancora di più quando venne pubblicata da Elwin R. Berlekamp una strategia elegantissima basata solamente sul numero di caselle della scacchiera! Dato che la conoscenza della strategia distrugge tutto il divertimento del gioco, invitiamo i lettori e divertirsi con il Black prima di andare avanti e a vedere se anche loro riescono ad avere la geniale intuizione di Elwin R. Berlekamp!

## 2 La strategia vincente!

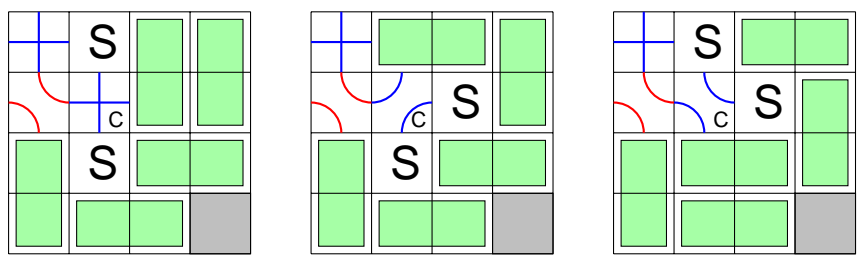
Berlekamp fornì un'elegante strategia per il gioco del Black; in particolare il secondo giocatore vince se il numero complessivo di caselle è pari; se invece il numero complessivo delle caselle è dispari vince il primo giocatore! Vediamo come procedere:

Caso Dispari, vince il primo giocatore: Dopo che il secondo giocatore ha piazzato la prima casella, il primo deve immaginarsi la scacchiera coperta interamente con tessere del domino ad eccezione della casella annerita di arrivo e delle due già marcate. La tassellatura scelta non ha importanza come vedremo dal metodo di gioco. Ogni volta che il secondo giocatore compie una mossa, indirizza il percorso in una nuova tessera del domino che chiameremo **A**; quello che deve fare il primo giocatore è solamente mettere la tessera giusta in modo che il secondo giocatore sia vincolato a stare **A** su



In questo modo il primo giocatore non può mai andare a sbattere contro il muro (poiché la mossa che fa indirizza sempre nella seconda casella **A**) e inoltre, nel caso si arrivi alla casella finale, è lui a vincere la partita poiché è **prima** casella

Caso Pari, vince il secondo giocatore: La strategia per il caso pari è leggermente più complicata, ma si basa sulla stessa idea di tassellatura. Quello che deve fare il secondo giocatore come prima mossa è una curva verso l'interno della scacchiera. A questo punto il primo giocatore prolungherà il percorso con una casella a sua scelta che chiameremo **C**. Fatta questa mossa si può procedere alla tassellatura del secondo giocatore: in questo caso si deve ricoprire la scacchiera con tessere del domino eccetto: le caselle già segnate, quella annerita e le due caselle che sono messe in collegamento **C** con la linea che non si collega al percorso (come mostrato negli esempi sotto). Queste due caselle speciali (indicate **S** nelle figure) sono state battezzate da Berlekamp con il nome di **domino diviso** un nome azzecato in quanto grazie al collegamento **C** è come se formassero una tessera del domino



A questo punto il secondo giocatore si trova in una situazione come il caso dispari già analizzato: ad ogni mossa forza il proprio avversario a continuare il percorso sulla tessera di domino in cui si trova. Nel caso in cui si trovasse nella situazione di dover marcare un segno **S** sarà su ciente far quello che indirizzi verso la seconda tessera **S**. Come per il caso dispari, adesso il secondo giocatore ha la vittoria in tasca!

Il lettore più attento avrà notato che la strategia descritta si adatta a qualsiasi tipo di scacchiera e non necessariamente a una rettangolare. Ci si può dunque sbizzarrire con forme strane stando attenti solamente al numero di caselle totali della scacchiera!

Il lettore ancora più attento avrà notato che la strategia vincente per il caso pari presenta una piccola limitazione che non è stata evidenziata; e voi sapete trovarla?

Luca Bruni,  
studente presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

# Divertissement

*una rubrica di esercizi a cura di Davide Lombardo*

## 1 Il campionato di biliardino

Nel campionato provinciale di biliardino di Pisa ogni squadra ha vinto almeno cinque partite. Dimostrare che c'è una squadra che ha perso almeno cinque partite.

*(Le regole del campionato prevedono che ognuna delle partite possa terminare con una vittoria di una delle due squadre oppure con un pareggio.)*

## 2 I quadrati sono meglio

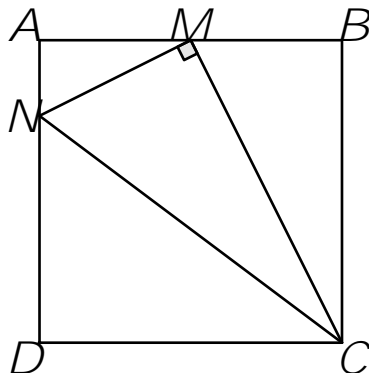
Dimostrare che per ogni scelta di 3 numeri reali  $a, b, c$  si ha  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .

## 3 La cifra 1 basta e avanza!

Sia  $n$  un intero positivo dispari la cui espressione decimale non termina per 5. Dimostrare che c'è un multiplo di  $n$  che in base dieci si scrive utilizzando solo la cifra 1.

## 4 Un'uguaglianza di angoli

Sia  $ABCD$  un quadrato, chiamiamo  $M$  il punto medio di  $AB$  e  $N$  un punto sul lato  $AD$  in modo che  $\widehat{NMC}$  sia retto (come in figura). Dimostrare che  $\widehat{BCM} = \widehat{MCN}$ .





## 5 Cammini nel piano

Una formica parte dall'origine del piano cartesiano e ogni secondo si muove di 1mm a destra o di 1mm verso l'alto. Quanti percorsi diversi la portano, dopo  $d + a$  secondi, a trovarsi nel punto di coordinate  $(d, a)$ ?

Qualche apertura verso la matematica non elementare

## 6 Il teorema di Liouville discreto

Sul piano è disegnata una scacchiera infinita, in ogni casella della quale è scritto un numero intero positivo. Questi numeri hanno una particolarità: il valore scritto in una casella della scacchiera è uguale alla media dei valori scritti nelle 4 caselle adiacenti. Dimostrare che i numeri scritti sul piano sono tutti uguali.

**Commento.** Funzioni di questo tipo sono dette *armoniche*; esiste una versione del teorema di Liouville anche per funzioni armoniche continue, ovvero funzioni che associano ad ogni punto del piano un numero reale, e hanno la proprietà che il valore in ogni punto è pari alla media dei valori che la funzione assume su una circonferenza centrata in quel punto. Il teorema di Liouville afferma allora che una funzione armonica limitata è costante. Questo risultato, lungi dall'essere una curiosità isolata, è invece estremamente importante nel campo della matematica noto come *analisi complessa*, e ha fra le sue conseguenze nientemeno che il celebre teorema fondamentale dell'algebra, ovvero il fatto che ogni polinomio a coefficienti reali o complessi ammetta tutte le sue radici nel campo dei numeri complessi!

## 7 Il problema del ballottaggio

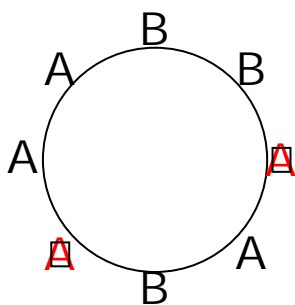
Alle elezioni per il rettorato dell'Università di Francuvia sono arrivate al ballottaggio le candidate Maria Agnesi ( $A$ ) e Margherita Beloch ( $B$ ). Maria Agnesi ha ottenuto  $a$  voti, strettamente più dei  $b$  voti di Margherita Beloch, ed ha vinto le elezioni. Durante lo spoglio

dei voti, gli scrutatori hanno tenuto traccia di tutte le  $a + b$  schede mentre le guardavano una per una, perciò sanno quanti voti favorevoli a ciascuna candidata erano stati scrutinati in ogni momento dello spoglio. Dimostrare che la probabilità che Maria Agnesi sia stata strettamente in vantaggio per tutta la durata dello scrutinio (ovvero che in ogni momento le schede scrutinate favorevoli ad  $A$  fossero più di quelle favorevoli a  $B$ ) è  $\frac{a-b}{a+b}$ .

*Questo è un problema famoso, che ha ricevuto molte soluzioni nel tempo (vedi Wikipedia, Bertrand's ballot theorem); qui suggeriamo due possibili approcci.*

**Strategia 1.** Supponiamo di avere una sequenza di  $a + b$  voti, di cui  $a$  per la candidata  $A$  e  $b$  per la candidata  $B$ . Pensiamo questa sequenza come 'ciclica', ovvero come scritta lungo il bordo di una circonferenza, senza un inizio e una fine precisa. Dimostrare allora che ci sono esattamente  $a - b$  posizioni da cui si può iniziare a leggere la sequenza (diciamo in senso orario) in modo tale che  $A$  sia sempre in vantaggio. Ora non dovrebbe essere difficile arrivare alla conclusione!

Ecco un esempio del caso  $a = 5$  e  $b = 3$ ; quelle riquadrate sono le posizioni da cui si può partire per avere una sequenza in cui  $A$  sia sempre in vantaggio.



**Strategia 2.** Rappresentiamo il processo di scrutinio come un cammino nel piano (cartesiano): ogni volta che viene scrutinato un voto per  $A$  facciamo un passo verso l'alto, e ogni volta che viene aperto un voto per  $B$  facciamo un passo verso destra. In questo modo, la condizione che  $A$  sia sempre in vantaggio vuol dire esattamente che questo cammino non interseca la diagonale  $y = x$ . Come

si fa spesso in matematica, cerchiamo invece di contare i cammini che *non* ci vanno bene. Ci sono quelli che iniziano con  $B$  (quanti sono?); e ci sono quelli che iniziano con  $A$  ma ad un certo punto intersecano la diagonale. Per ognuno di questi possiamo guardare la prima volta in cui il cammino interseca la diagonale; immediatamente prima deve essere stato scrutinato un voto per  $B$ , e al momento c'è una situazione di pareggio. *Riflettendo* su questa situazione, si può mostrare che i cammini 'cattivi' che iniziano con  $A$  sono in effetti tanti quanti i cammini che iniziano per  $B$ . E da qui è facile concludere... soprattutto se avete già fatto l'esercizio 5!

**Commento.** Il secondo approccio risolutivo è anche conosciuto come il *principio di riflessione*, e ha moltissime applicazioni in questioni non solo di combinatoria ma anche di probabilità, dove si rivela ad esempio uno strumento potente per studiare le proprietà del moto browniano.

## 8 Soluzioni

Per questa nuova rubrica del giornalino abbiamo deciso di proporre un metodo interattivo per quel che riguarda le soluzioni: dateci le vostre! Non abbiate paura di sbagliare: è proprio così che si impara. Attendiamo le vostre proposte e le eventuali richieste di chiarimenti all'indirizzo email [LezioniAperteMatematica@gmail.com](mailto:LezioniAperteMatematica@gmail.com)! Scriveteci anche se, dopo averci ragionato, non trovate una strada per la risoluzione dell'esercizio: saremo contenti di condividere i metodi che sono venuti in mente a noi.

*Davide Lombardo,  
Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa*

# Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una breve lista di libri, pagine web e film che possono essere uno spunto per ulteriori approfondimenti. Alcuni contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti "più leggeri".

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.
- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi;
- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann;
- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico;
- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan;
- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore;
- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.
- G. Lolli *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Ravello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare

la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.

- A. Parlange, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo;
- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.
- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni;
- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Per non confondere le idee ci siamo limitati a proporre una bibliografia essenziale. Di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affascinati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- D. Aronofsky, *- Il teorema del delirio*, 1998.
- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.
- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001
- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.
- G. Van Sant, *Will Hunting - Genio ribelle*, 1997.

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:  
<http://maddmaths.simai.eu/>
- Versione on-line del giornalino:  
<https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:  
<http://www.dm.unipi.it/webnew/>
- Sito delle olimpiadi di matematica:  
<http://olimpiadi.dm.unibo.it/>
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:  
<http://www.sns.it/>
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:  
<https://poisson.phc.dm.unipi.it/>

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito (<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento>).

# Prossime iniziative

- Vi aspettiamo alla **Settimana Matematica**, il nostro principale evento di orientamento, che si svolgerà nei giorni 16, 17 e 18 gennaio 2019: insieme a circa 150 studenti da tutta Italia, avrete la possibilità di confrontarvi con la vita del Dipartimento di Matematica di Pisa, partecipare a laboratori tematici, assistere a conferenze, interagire con docenti e studenti, e molto altro ancora...

Troverete informazioni più dettagliate e la modalità di iscrizione sulla pagina web

<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento> a partire da fine novembre.





STAMPATO IN PROPRIO