PISA, 23-24 SETTEMBRE 2019

Matematica
IL GIORNALINO DEGLI open days

notizie, giochi
e pillole
di matematica

Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Su indicazione della Commissione Orientamento.

Realizzato con la collaborazione degli studenti counselling:
Alessandro Pinzi
Francesca Pistolato
Alessandra Tullini

Coordinamento: Alessandra Caraceni, Giovanni Gaiffi

Grafica: Alessandra Caraceni

Introduzione

Eccoci giunti alla nona edizione del Giornalino degli Open Days!

Questa pubblicazione, curata da professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa e prodotta contestualmente alle attività di orientamento, è rivolta principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

La prima sezione, utile – ci auguriamo – a chi stia considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario di sapore matematico, presenta il Corso di Laurea in Matematica così come declinato presso l'Università di Pisa. Troverete una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica, integrata da dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in Matematica.

A seguire vi proponiamo come sempre articoli con lo scopo di avvicinare il lettore al mondo della matematica, ai suoi metodi e alle sue variegate sfaccettature.

Ma questo numero contiene una novità! Potrete leggere un'esclusiva intervista con un ex-studente davvero speciale del nostro dipartimento; a parlare direttamente ai partecipanti alla Settimana Matematica 2019 – e a voi attraverso queste pagine – è il matematico **Alessio Figalli**, vincitore della prestigiosissima medaglia Fields nel 2018. Ci parlerà dell'ammissione alla Scuola Normale, dell'esperienza di un ragazzo uscito dal Liceo Classico che si iscrive a Matematica, della vita da studente, da ricercatore, da professore, ma anche di disuguaglianza isoperimetrica, di trasporto ottimo e di come equazioni astratte possano descrivere il movimento delle nuvole.

A raccontarci una sorprendente connessione fra una somma "sbagliata" di frazioni e linee rette tracciate su fogli a quadretti saranno poi **Carlo Carminati** (Università di Pisa) e **Giulio Tiozzo** (Università di Toronto), che con il loro articolo ci conducono alla scoperta delle sequenze di Farey e dell'albero di Stern-Brocot.

La nostra rubrica dedicata ai giochi matematici vi offrirà stavolta una serie di indovinelli logici: saprete evitare la tigre e fuggire con la vostra amata, nonostante i quesiti impossibili di un re nemico?

Vi proponiamo poi, come negli ultimi numeri, una piccola raccolta di problemi matematici con i quali confrontarvi, nella speranza che vi siano di stimolo: vi invitiamo ad inviarci le vostre soluzioni (o i vostri dubbi) all'indirizzo `LezioniAperteMatematica@gmail.com`!

E se dopo tutto questo non siete ancora sazi di matematica, niente paura: la nostra ultima rubrica contiene un ampio assortimento di consigli di lettura, nonché una lista di film e una di link a siti web che potrebbero fare al caso vostro.

Indice

Il corso di laurea in Matematica

Ciao! Sono una studentessa del Dipartimento di Matematica di Pisa. Quando ripenso agli anni delle scuole superiori mi viene subito in mente lo stupore sui volti delle persone quando dicevo loro che all'università avrei studiato matematica. "Ma allora ti piace insegnare?" rispondeva qualcuno. "E che sbocchi ci sono dopo?" qualcun altro. E come non citare "Ah, io non ci ho mai capito nulla!". È capitato anche a voi? A me abbastanza frequentemente. La risposta a queste domande ce l'avevo chiara in mente: la matematica mi incuriosiva e affascinava, e questo, un po' ingenuamente, mi bastava per decidere di proseguirne gli studi. La realtà che ho trovato a Pisa non ha che accresciuto questa mia convinzione e mi ha portato a saper rispondere alle stesse domande con motivazioni più concrete.

Innanzitutto, vi presento i risultati di un paio di indagini svolte a livello sia internazionale sia locale. In generale risulta che i laureati in Matematica siano soddisfatti della scelta fatta e godano di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare:

- Secondo l'Occupational Information Network (sito patrocinato dal ministero del lavoro americano, vedi [3]) i matematici si meritano la medaglia d'argento per il lavoro in cui "si guadagna tanto e ci si stressa poco" (vedi [4]); infatti sia che lavorino nei centri di ricerca sia che prestino servizio nelle grandi aziende, la media salariale dei matematici è di 88mila euro all'anno, con un indice di stress di 57/100. Da considerare che sono indicati come lavori differenti gli statistici (5° posto, quindi comunque molto alto), i sistemisti (17°) e gli sviluppatori informatici (18°), tutti lavori accessibili dal CdL in matematica.

- I dati di Almalaurea (vedi [1]) riportano che il 91,3% dei laureati magistrali in matematica risulta occupato a tre anni dalla laurea.

- Sempre sul sito di Almalaurea [5] si possono trovare i seguenti dati:

SCAN ME

Visita il sito del corso di laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

- Fra i laureati magistrali in Matematica a Pisa nel 2018, il 92,9% si iscriverebbe nuovamente allo stesso corso nello stesso ateneo.
- In media il tempo necessario per completare la laurea triennale in matematica a Pisa è di 3,7 anni.
- Oltre il 92% di coloro che hanno studiato matematica a Pisa negli ultimi anni desidera proseguire gli studi.

Da un paio di anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo nasce il progetto "Matematici al Lavoro". Se siete curiosi di scoprire in quali settori un matematico possa essere utile vi consiglio la pagina de "I Mestieri dei Matematici".

`https://www.mestierideimatematici.it`
`https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0`

Il corso di laurea a Pisa

Di preciso cosa ti aspetta se studierai matematica a Pisa? Il Corso di Laurea in Matematica si divide formalmente in Laurea Triennale e Laurea Magistrale. La prima corrisponde al titolo internazionale *Bachelor's degree* e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici; la seconda, invece, è internazionalmente identificata con la *Master's degree*. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

Come in altri ambiti, condizione necessaria per raggiungere un livello avanzato è la specializzazione delle proprie conoscenze, tant'è che alcuni sistemi universitari prevedono che lo studente si concentri su uno specifico settore da subito. L'offerta del Dipartimento di Matematica di Pisa cerca di accompagnare lo studente verso una scelta consapevole del proprio ramo d'interesse, garantendo delle ampie basi attraverso una serie di esami obbligatori, ma lasciando anche la possibilità di saziare il proprio gusto personale con alcuni esami a scelta. In particolare, si ha fin dall'inizio la possibilità di inquadrare i propri studi in uno dei due curricula seguenti, a seconda che si preferisca un percorso classico od uno volto ad applicazioni computazionali:

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

Sfruttando la collaborazione con altri Dipartimenti, il primo integra lo studio della matematica con approfondimenti di fisica, mentre il secondo con argomenti di matematica computazionale e informatica. Al momento dell'immatricolazione vi verrà chiesto di scegliere il curriculum a cui iscrivervi. Non preoccupatevi se siete indecisi: come potete notare dalla Tabella 1, i corsi sono identici fino al secondo semestre del secondo anno, quindi avrete tempo per capire cosa vi piace ed eventualmente cambiare curriculum.

Naturale prosecuzione è il biennio magistrale, alla fine del quale si acquisisce il titolo omonimo. Esso è diviso in cinque diversi curricula: didattico, modellistico, applicativo, generale e teorico; tramite questi sarà possibile approfondire gli argomenti che più vi hanno appassionati durante i primi tre anni di studio.

Il Dipartimento di Matematica non collabora solo con altri dipartimenti dell'Università di Pisa, ma anche con università estere grazie ad alcuni accordi internazionali. Sono particolarmente prestigiosi gli accordi con l'École Polytechnique di Parigi e la Hokkaido University, che consentono il conseguimento di titoli congiunti. Vi sono naturalmente gli accordi Erasmus, grazie ai quali uno studente può svolgere uno o più semestri di studio oppure lavorare alla tesi presso una università europea. Sulla pagina dell'internazionalizzazione potete trovare tutte le informazioni e restare aggiornati sui nuovi accordi:

`http://people.cs.dm.unipi.it/boito/international.html`

<table>
<tr><th>Fondamentale</th><th>Computazionale</th></tr>
<tr><td colspan="2">I anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aritmetica (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Laboratorio di comunicazione mediante calcolatore (3 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi matematica 1 (15 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria 1 (15 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fisica I con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">II anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algebra 1 (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inglese scientifico (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi matematica 2 (12 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria 2 (12 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Laboratorio didattico di matematica computazionale (3 CFU)</td></tr>
<tr><td>Esame a scelta (6 CFU)</td><td>Algoritmi e strutture dati (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">III anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meccanica razionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Fisica II (9 CFU)
Fisica III (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)

4 Esami a scelta (24 CFU)</td><td>Calcolo scientifico (6 CFU)
Laboratorio computazionale (6 CFU)
Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
Ricerca operativa (6 CFU)
3 Esami a scelta (18 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prova finale (9 CFU)</td></tr>
</table>

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2019-2020 (vedi [7]).

Nella Tabella 1 trovate l'elenco degli esami da sostenere durante la laurea triennale, molti dei quali riguardano argomenti non trattati a scuola. Per iniziare a capire cosa studiano queste discipline, quali problemi cercano di risolvere e quali sono alcune delle tecniche usate, consigliamo il libro:

R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri.

Si tratta sicuramente di uno dei migliori libri introduttivi alla matematica, dal carattere divulgativo ma contenente vari teoremi con dimostrazioni vere e proprie che costituiscono dei primi esempi di "vera" matematica.

Bibliografia

[1] https://www2.almalaurea.it/cgi-php/universita/statistiche/framescheda.php?anno=2018&corstipo=LS&ateneo=tutti&facolta=tutti&gruppo=1&pa=tutti&classe=11045&postcorso=tutti&isstella=0&annolau=tutti&condocc=tutti&iscrls=tutti&disaggregazione=&LANG=it&CONFIG=occupazione

[2] http://scuola24.ilsole24ore.com/art/universita-e-ricerca/2017-08-18/-statistica-chimica-lauree-che-danno-lavoro-9-studenti-10-181043.php?uuid=AEBLghEC

[3] https://www.onetonline.org

[4] http://www.alleyoop.ilsole24ore.com/2017/10/25/ecco-24-lavori-perfetti-ad-alto-tasso-di-guadagno-e-a-basso-tasso-di-stress/

[5] https://www2.almalaurea.it

[6] https://www.almalaurea.it/sites/almalaurea.it/files/comunicati/2019/rapporto_almalaurea2019_profilo_condizioneoccupazionale_0.pdf

[7] http://www.dm.unipi.it/webnew/sites/default/files/Reg_LT_1920.pdf

Una chiacchierata con Alessio

*Il matematico **Alessio Figalli**, uno dei vincitori della prestigiosa Medaglia Fields nel 2018, risponde alle domande dei ragazzi della Settimana Matematica, svoltasi nel nostro Dipartimento dal 16 al 18 gennaio 2019*

Penso che questa sia una bellissima iniziativa: cerco sempre di partecipare agli incontri con ragazzi come voi e di contribuire a occasioni formative come questa, che vi sta dando la possibilità di scoprire cosa sia la Matematica… il che è un privilegio! Molti non sanno cosa sia: c'è un po' quest'idea del matematico che serve solo a dividere il conto quando andate a mangiare la pizza. Ma in questi giorni scoprirete che la Matematica è molto di più: può essere profonda, creativa, può essere una sfida… e anche un lavoro, cosa di cui non avevo idea quando ero uno studente come voi.

Quando a 16-17 anni facevo tranquillamente il mio liceo classico l'obiettivo era quello di "portare a casa il voto", finché non ho scoperto le Olimpiadi della Matematica. E' stato allora che ho cominciato a vedere la Matematica con occhi diversi: non si trattava più semplicemente di imparare regole e applicarle, ma di un processo più complicato in cui sei chiamato a mettere qualcosa di tuo, a volte combinando teoremi "noti" in maniera non ovvia, non standard, a volte proprio inventandoti una soluzione dal nulla.

Ecco, alla fine fare Matematica è una versione più evoluta proprio di questo: è questo che facciamo io e i miei colleghi... con la differenza che purtroppo, mentre davanti a un esercizio che vi viene dato sapete se non altro che una soluzione c'è, nella ricerca questo non è detto: a volte non sai proprio dove andrai a parare!

Ma torniamo ai tempi del liceo: partecipando alle Olimpiadi ho incontrato tanti ragazzi appassionati ed è grazie a loro che ho considerato l'idea di provare a entrare in Normale. Non ci avevo mai pensato prima: io sono romano, a Roma ci sono ben tre università… non è che ti venga in mente di cambiare città! In ogni caso non credevo di avere molte speranze: mi sono messo a studiare cercando di risolvere i problemi delle ammissioni passate, quelli di Matematica e specialmente quelli di Fisica; e all'inizio la realtà è che li guardi e sul momento ti dici "beh, non li farò mai!". Ma davanti a un problema difficile, che non riesci a fare, ci sono due modi possibili di reagire: o ti dici "non lo so fare, vuol dire che non sono in grado" e abbandoni la sfida, oppure pensi "adesso non lo so fare; vediamo se lo saprò fare fra un mese" e ti dai una possibilità.

Ed è così che è stato per me: leggi la soluzione, piano piano arrivi a capirla, e anche se non riesci a fare il secondo, il terzo, il quarto esercizio… magari al quinto azzecchi la prima parte del ragionamento, e a forza di lavorare e imparare prima o poi risolvi un esercizio per intero. Già dalle Olimpiadi avevo imparato che servono impegno e un po' di sacrificio; non basta il talento, la preparazione è fondamentale. Questo è vero anche nello studio universitario, nella ricerca… è importante accettare che ci sono esercizi difficili e prenderli come una sfida. Racconto spesso che per ogni articolo con cui ho risolto un problema aperto ci sono dieci, quindici problemi che non riesco a risolvere e articoli non conclusi che rimangono nel cassetto.

Ai miei tempi gli scritti di ammissione in Normale si svolgevano proprio in queste aule; dopo lo scritto di Matematica ero sconfortato: ero certissimo che fosse stato un disastro, ma dopo una notte parzialmente insonne mi ripresentai per lo scritto di Fisica, e fatto quello me ne tornai a Roma sconsolato. Tornai a Pisa dieci giorni dopo per tentare l'ammissione a Ingegneria al Sant'Anna; fu in quell'occasione che scoprii il mio nome fra quelli degli ammessi all'orale, affissi nell'ingresso della Scuola Normale. Fu una rivelazione: a me non era così chiaro cosa volessi fare – Matematica, Ingegneria… – ma il momento di gioia che provai nello scoprire di essere passato agli orali fu così grande che mi sorpresi a pensare che avrei fatto Matematica in ogni caso, anche se non fossi stato ammesso.

Ma fui ammesso. Seguirono quattro anni della mia vita passati fra questi banchi, giorno dopo giorno; posso dire in tutta sincerità di essere stato molto fortunato: ho avuto ottimi docenti qui, l'Università di Pisa dà una formazione fantastica. Io sono normalista, ma non va dimenticato che i normalisti seguono tutti i corsi all'Università di Pisa, con l'eccezione di alcuni corsi aggiuntivi tenuti all'interno della Scuola.

Durante i miei studi scoprii l'esistenza di programmi di scambio. Alcuni di voi conosceranno l'Erasmus, che consente di trascorrere un periodo all'estero durante gli studi universitari; la Normale ha accordi particolari con le Ecoles Normales francesi, di cui mi avvalsi per trascorrere un periodo di sei mesi a Lione. Fu un'esperienza importante, l'occasione di conoscere un secondo mondo: consiglio a chiunque di passare un periodo all'estero!

Finiti i sei mesi della mia borsa di scambio, tornai a Pisa a laurearmi: era il momento di decidere cosa fare della mia vita. Oggi una laurea in Matematica consente a chi lo voglia di entrare direttamente nel mondo del lavoro con una vasta gamma di scelte, dall'informatica alla finanza… Io mi sentivo a mio agio in ambito accademico e decisi di tentare il concorso di ammissione al dottorato.

Con il dottorato si inizia a fare ricerca, si entra in un mondo diverso dallo studio. Non è solo questione di potenzialità: nel mondo della ricerca bisogna saper affrontare la frustrazione. La ricerca di dottorato comunque può essere molto soddisfacente, è un'esperienza che consiglio a chiunque sia appassionato. Nel mio caso il dottorato andò molto bene, dopo un iniziale periodo duro.

Poi ho lavorato in Francia (grazie all'esperienza all'Ecole Normale), in America e infine in Svizzera, a Zurigo, dove vivo da quasi tre anni.

Ecco, questa è un po' la mia storia; ma al di là di questa piccola introduzione vorrei lasciare spazio alle vostre domande: non siate timidi!

Quali sono i tuoi interessi di ricerca?

La Matematica è molto varia: si può provare a dividerla in macroaree, dalla geometria all'algebra all'analisi alla probabilità, con tante sfaccettature

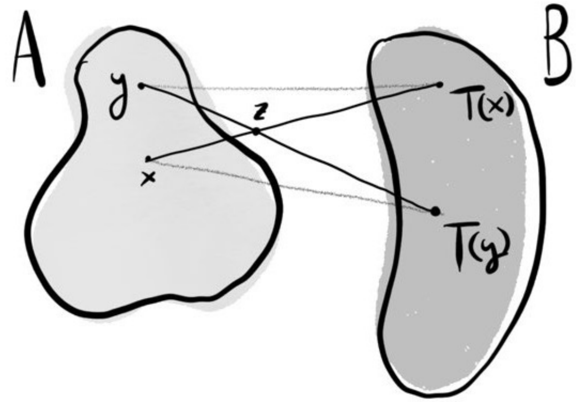

Figura 1: La disuguaglianza triangolare mostra come i raggi di trasporto non possano intersecarsi senza contraddire l'ottimalità.

all'interno. Dopo vari dubbi da studente ho deciso di orientarmi verso l'analisi; un problema che mi affascinò molto durante la mia laurea magistrale e che poi usai come argomento per la mia tesi di laurea fu quello del trasporto ottimale.

Si tratta di un problema che ha un'origine molto antica. Alla fine del 1700 Gaspard Monge, un matematico francese, lavorò su questioni di questo tipo: suppongo di avere delle miniere; queste miniere producono del materiale edile con il quale voglio costruire delle fortificazioni, creare degli avamposti di guerra (ricordate che la Francia a fine '700 viveva un momento espansionistico sotto Napoleone); come posso trasportare "in materia ottimale" il materiale dalle miniere alle fortificazioni? Naturalmente dobbiamo anzitutto specificare cosa significhi per noi ottimale: per Monge, l'intenzione era quella di minimizzare un costo totale, dove il costo di trasportare un'unità di materiale da un punto a un altro era semplicemente proporzionale alla distanza fra i due punti. Notate poi che la questione è complicata dal fatto che ciascun avamposto avrà bisogno per essere costruito di una specifica quantità di materiale, e a sua volta ciascuna miniera ne produce una quantità fissata. Come distribuisco le unità di materiale prodotte dalle miniere sui vari avamposti?

Monge elaborò uno studio teorico di questo problema che a posteriori giudicheremmo abbastanza elementare, ma colse un aspetto molto importante, che vi posso mostrare facilmente. Supponete per semplicità di voler trasportare il materiale dai punti della zona A ai punti della zona B del piano. Immaginate di decidere di portare ciò che si trova nel punto x sul punto $T(x)$ (T sta per "trasporto") e ciò che si trova nel punto y su $T(y)$, come nella Figura 1. Questa scelta può essere ottimale? La risposta è no, per il semplice fatto che il segmento da x a $T(x)$ e il segmento da y a $T(y)$ si intersecano! Per la disuguaglianza triangolare, infatti, risulta conveniente mandare x su $T(y)$ e y su $T(x)$: abbiamo $|x-T(x)|+|y-T(y)| = |x-z|+|z-T(x)|+|y-z|+|z-T(y)| > |x-T(y)|+|y-T(x)|$, dove $|a-b|$ è la distanza fra il punto a e il punto b e z è il punto d'intersezione fra i segmenti sopra citati.

Quello che abbiamo appena mostrato si può esprimere in questi termini: i raggi di trasporto non si intersecano mai. A partire da questa idea, il problema di Monge si riduce a identificare questi raggi unidimensionali lungo i quali i punti possono viaggiare e poi, passando da un problema nel piano a un problema sulla retta, più semplice da risolvere, determinare la specifica destinazione di ciascun punto lungo il suo raggio.

La storia del trasporto ottimale ovviamente non finisce qui; ma l'episodio specifico che affascinò me è molto più moderno ed è legato alla tradizione matematica di Pisa, in particolare alla figura di Ennio de Giorgi.

De Giorgi è un matematico che si è occupato molto di problemi geometrici, in particolare fra le altre cose di quelle che si chiamano "superfici minime". Un suo risultato fondamentale è la disuguaglianza isoperimetrica; in altre parole, la ragione per cui le bolle sono rotonde!

Ma anche la ragione per cui tante città hanno una forma circolare. Conoscete la storia di Didone? Didone arriva sulle coste dell'Africa, dove vuole fondare una città; le viene offerta tanta terra quanta ne può ricoprire con una pelle di bue. Lei taglia la pelle di bue in tante strisce sottili e le cuce insieme a formare una corda molto lunga; con questa corda (di una certa lunghezza fissata) vuole racchiudere l'area maggiore possibile. Ora, Didone si trova sulla costa dell'Africa, per cui possiamo immaginare che il suo problema sia quello di racchiudere una porzione del semipiano con la sua corda, come in Figura 2. La forma migliore che Didone possa dare alla sua regione di semipiano, quella di area massima data la lunghezza della corda, è quella di un semicerchio. È dentro a questo semicerchio ottimale che sorgerà Cartagine.

Se il problema fosse stato quello di racchiudere una regione del piano di area massima possibile con una curva di lunghezza fissata, o quello equivalente di tracciare una curva di lunghezza minima possible che racchiuda un'area fissata nel piano, la soluzione sarebbe stata il cerchio.

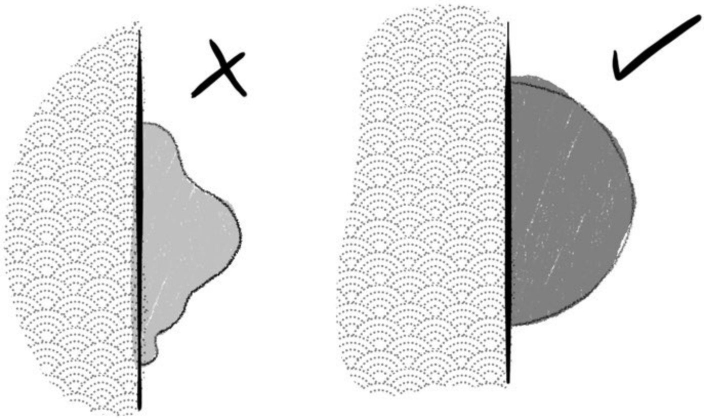

Figura 2: Ottimalità del semicerchio.

Lo stesso problema si può porre nello spazio: a volume fissato, qual è la forma che minimizza la superficie? E questo è esattamente il problema della forma delle bolle di sapone: quando una bolla che avete prodotto si chiude, l'aria che contiene è quella che vi avete soffiato all'interno; la forma sulla quale si assesterà la bolla è quella che minimizza l'energia di tensione, che è proprio proporzionale all'area superficiale. Insomma: la soluzione al problema nel caso delle tre dimensioni è, come si vede dalle bolle di sapone, proprio la sfera. Da qui un matematico può porsi la stessa domanda nel caso di quattro, cinque… quante dimensioni vuole!

La dimostrazione rigorosa della disuguaglianza isoperimetrica (in tre dimensioni, e anche più in generale) è più difficile di quanto non lo sia quella del caso due-dimensionale: la prima valida in dimensione qualunque è degli anni '50 ed è dovuta appunto a De Giorgi.

Da studente scoprii l'esistenza di questo teorema matematico che mi piacque molto; e una cosa che mi affascinò fu la connessione inaspettata data dal fatto che una dimostrazione di questo teorema sfrutta proprio il trasporto ottimale. Ora, qui andiamo un po' sul complicato; l'idea di base è quella di trasportare le particelle d'aria da – diciamo – una bolla "immaginaria" di forma qualunque e di un certo volume fissato a una bolla sferica dello stesso volume; e la quantità da minimizzare, il "costo" associato alle particelle d'aria spostate, non è la distanza come nel problema di Monge, ma il suo quadrato.

Insomma: da studente sono stato veramente affascinato da queste idee e connessioni, e da allora mi sono dedicato proprio all'applicazione di risultati di calcolo delle variazioni, e più in generale tecniche analitiche, a problemi geometrici.

Hai avuto difficoltà venendo dal liceo classico?

Sì! Ma per fortuna le difficoltà non durano troppo.

Per le Olimpiadi della Matematica, che sono state per me l'inizio di questa avventura, non c'è una vera differenza fra formazione classica e scientifica: le nozioni utili di geometria, combinatoria, un po' di algebra – cose che mi sono messo a studiare da solo – non fanno parte in ogni caso dei programmi scolastici. Per entrare in Normale per me il problema più grosso è stato l'esame di Fisica: con tanta buona forza di volontà presi un libro di testo di Fisica del liceo scientifico e provai a colmare le lacune che potevo: il mio regalo di postmaturità a me stesso!

Una volta entrato in Università, poi, il mio problema era soprattutto psicologico: in realtà tante cose che vengono fatte agli ultimi anni di liceo scientifico e non al liceo classico vengono riviste in maniera più approfondita al primo anno di università, in particolare durante il corso di Analisi; la didattica è organizzata in modo che anche uno studente del classico possa frequentare Matematica! Ma all'inizio può essere scoraggiante vedere che gli altri sanno fare tutto e tu ancora non sai fare nulla; per esempio quando venivano assegnati esercizi che sono standard per un liceo scientifico io vedevo tanti ragazzi che non erano minimamente in difficoltà davanti al "solito studio di funzione", mentre io non sapevo proprio da dove cominciare! Ma si tratta di affrontare il problema, o si è perso in partenza; io per fortuna ho incontrato gente molto disponibile, ma soprattutto l'insegnamento qui era strutturato molto bene: accanto alle lezioni c'erano sempre esercitazioni; gli esercitatori ci davano esercizi da fare e avevano delle ore di ricevimento. Nel mio caso andai nello studio di Ariela Briani (era esercitatrice di Analisi ai tempi, adesso è in Francia) e dissi che proprio non sapevo da dove cominciare: non sapevo come si facesse uno studio di funzione; lei si mise lì e spiegò a me come agli altri ragazzi venuti con me a ricevimento quello di cui avevamo bisogno.

La realtà è che dopo già un semestre il problema non si pone più. E a posteriori ho anche notato un vantaggio. Durante un periodo trascorso a Pisa del mio dottorato di ricerca sono stato esercitatore a Ingegneria Edile e Architettura, sia per Analisi che per Geometria; avevo degli studenti veramente in gamba e fin dall'inizio ho cercato di far passare il messaggio che è molto importante fare gli esercizi anche per chi sa già le cose; se non ci si esercita, poi lo si paga all'esame! Purtroppo non tutti mi hanno ascoltato e ricordo benissimo che proprio i migliori, nonostante i tanti voti altissimi che abbiamo dato a fine esame, non sono riusciti a superare il 10. Quindi ecco, voglio dire che in questo aver fatto il classico aiuta: non ti dà la spocchia di già sapere le cose!

Com'è stata la tua esperienza alle Olimpiadi della Matematica?

Iniziai a partecipare al quarto anno di liceo; incominciai a studiare per conto mio: esisteva un sito gestito dall'Unione Matematica Italiana in cui tanti ragazzi scrivevano problemi e soluzioni, e all'inizio soprattutto seguivo i problemi postati e risolti dagli altri. Come dicevo prima, uno all'inizio i problemi magari non li sa fare; ma leggendo le soluzioni scopre nuove tecniche, vede che gli altri nominano teoremi che non conosce, scopre cosa siano e poi alla lunga impara a usarli.

Al penultimo anno di liceo andai dal mio preside, dato che la mia scuola non era neanche iscritta al Progetto Olimpiadi, e dissi che a me sarebbe piaciuto partecipare; lui accettò di iscrivere la scuola e io partecipai alle gare individuali, arrivando al livello nazionale. Fu una bellissima esperienza, anche perché i miei compagni di scuola erano al classico proprio perché odiavano la Matematica: parlare di Matematica con loro sarebbe stato impensabile! Alla gara nazionale a Cesenatico incontrai invece tanti ragazzi appassionati, alcuni dei quali erano già all'ultimo anno e si stavano preparando per provare a entrare in Normale, da cui in un certo senso parte tutta la storia che vi ho raccontato! Partecipai alle gare individuali durante gli ultimi due anni di liceo e ad una gara a squadre solo una volta, a Roma, all'ultimo anno. Io credo che sia molto bello trovare qualcuno con cui si ha sintonia per studiare e prepararsi insieme, ma nel mio caso il mio giro di amici non era fatto di appassionati di Matematica: ero da solo per necessità; e anche per i ragazzi della squadra del liceo che avevamo formato la Matematica non era proprio la priorità. Ma è utile e bello incoraggiarsi a vicenda: in due s'impara molto più in fretta!

Ti sei mai pentito della scelta fatta?

Uhm… no! Certo a volte penso che sarebbe bello saperne di più di tante altre cose. Per esempio sono rimasto molto colpito quando ci fu la scoperta legata alle onde gravitazionali: ci sono stati tantissimi seminari sul tema fatti in giro e andando ad ascoltarli li ho trovati di un affascinante mostruoso. Poi però bisogna anche rendersi conto che risultati come questi sono i grandi traguardi di una disciplina; in realtà ci sono migliaia e migliaia di fisici che lavorano e non è che uno si trovi facilmente a fare scoperte sensazionali; e anche chi lavora per esempio sulle onde gravitazionali magari sta lì non so quanti anni ad ascoltare nella speranza che arrivi questo segnale.

In realtà io mi sono accorto che la Matematica è giusta per me; a me piace la sua stabilità: la Matematica è quella, le cose sono vere o sono false; non è che qualcuno possa tirare fuori dal nulla un'altra teoria, magari non compatibile… la Matematica è molto onesta in questo senso, e questo l'ho molto apprezzato negli anni anche a livello della sua comunità; se dimostro un teorema, può non piacere, però l'ho dimostrato. Questo mi ha sempre dato un senso di tranquillità.

Ma con il progredire della tecnologia la Matematica diventa obsoleta?

Beh, la tecnologia va avanti, ma la Matematica va avanti anche grazie alla tecnologia… e la tecnologia grazie alla Matematica!

Voi vivete nell'era post-Google: inserite parole chiave in questo motore di ricerca che piace tanto, lui riesce a trovarvi il sito giusto. Vi assicuro che negli anni '90 non era così: inserendo le parole chiave non si trovava mai davvero quello che si stava cercando. E la Matematica che c'è dietro Google, l'algoritmo che "decide" come selezionare i siti, è molto interessante. A partire dalle parole chiave voglio trovare proprio il sito che sto cercando… non è una questione banale. Non basta semplicemente trovare tutti i siti che contengono quelle parole chiave! Anche se per esempio stessi cercando una frase completa, non voglio che Google mi proponga un sito scritto da una persona completamente inaffidabile, che nessuno ha mai visitato; e in effetti questo non avverrà mai: l'algoritmo produce una gerarchia; un sito condiviso, a cui tanti altri siti puntano, avrà un peso maggiore rispetto a uno scritto da una persona a caso. In tutto questo dobbiamo gestire un margine di incertezza, considerare il problema sotto un aspetto probabilistico e accettare la presenza di fluttuazioni; infatti magari il risultato che cerco non sarà il primo o il secondo, ma il quarto.

Poi adesso si parla tanto di intelligenza artificiale, di big data… Questi sono problemi di Matematica! Si tratta di capire, per esempio, come insegnare a un computer a riconoscere immagini. A questo proposito, una ragazza che si è dottorata a Zurigo recentemente occupandosi proprio di questo problema ha raccontato questa storia interessante all'inizio della sua tesi. Come si insegna a un computer a riconoscere immagini? Un po' come a un bambino: gli si fornisce una quantità di dati, migliaia di immagini, e gli si dice "questa è una mucca", "questo è un cane", "questo è un gatto"... Poi in immagini nuove il computer deve riconoscere degli oggetti. Ma un esempio classico che ancora ci mette in difficoltà, in cui dopo aver identificato migliaia e migliaia di immagini il computer cade in errore, è questo: prendo una mucca e la metto su una spiaggia. Il computer resta completamente scioccato perché non ha mai visto una mucca sulla spiaggia, e quindi non riconosce la mucca! Qui si tratta di capire per esempio come riconoscere una parte dell'immagine isolandola dal contesto; e recentemente, cosa che mi ha abbastanza affascinato, sono stati proposti dei metodi per farlo che hanno a che fare proprio col trasporto ottimale! L'idea è quella di pensare alle immagini come composte da pixel e confrontarle cercando di spostare i pixel di un'immagine su quelli di un'altra in modo "ottimale", valutando così quanto siano vicine.

La Matematica è anche questo: la tecnologia va avanti, ma la Matematica certo non resta indietro!

Hai mai pensato ad applicazioni pratiche della tua ricerca?

Allora, c'è da dire che il trasporto ottimale è una disciplina della Matematica all'interno della quale ci sono tantissime sottoaree. C'è gente che lo studia da un punto di vista molto applicato; per esempio nell'urbanistica: voglio trasportare le persone da casa al luogo di lavoro; conosco la distribuzione delle persone perché so dove sono costruite le abitazioni e conosco le dimensioni degli uffici; voglio capire quale sia la maniera migliore di costruire infrastrutture. Ma il trasporto ottimale interviene anche in biologia: se l'obiettivo è pompare il sangue dal cuore perché arrivi dove deve arrivare nel nostro corpo – e il corpo vuole farlo in un certo senso in maniera ottimale, senza “sprecare” chilometri di vene! – si sviluppa un sistema circolatorio strutturato come il nostro, con arterie più grandi e poi ramificazioni in vasi sempre più piccoli, fino ai capillari… esattamente le stesse strutture si vedono negli alberi, se ci fate caso: il nutrimento si raccoglie nel tronco, viene tirato su e poi ridiviso.

Insomma, esistono applicazioni concrete; ce ne sono anche di più avanzate: machine learning, intelligenza artificiale e così via.

La verità è però che io ho studiato problemi abbastanza puri, nel senso che ho usato il trasporto ottimale per studiare problemi tipo “bolle di sapone” come quelli di cui vi parlavo prima. Dopotutto, se fossi stato più motivato dalle applicazioni magari sarei andato a lavorare nel privato.

Ma bisogna capire che, anche dal punto di vista delle applicazioni, lasciare “libero” il cervello può essere molto interessante. Un altro esempio di applicazione legato sempre al trasporto ottimale è quello della meteorologia. Negli anni ’90 un meteorologo ha scoperto che, sotto certe condizioni, le nuvole si muovono in maniera “ottimale”; ovvero, diciamo che io guardo una nuvola (composta da tante particelle), e la riguardo un secondo dopo (quindi vedo un’altra configurazione di particelle), e mi chiedo come ciascuna particella si sia spostata tra il primo e il secondo istante di tempo; ecco, il cammino di ciascuna di queste particelle segue una legge del trasporto ottimale. Scoperto questo, si può cercare di lavorare dal punto di vista del trasporto ottimale – cosa che ho fatto – per risolvere queste equazioni della meteorologia. Dalla scoperta di questo concetto alla soluzione del problema ci sono voluti circa vent’anni. Ora, se tutti fossimo sempre alla ricerca di applicazioni immediate, magari nessuno si sarebbe mai reso conto di questa connessione; questo stesso meteorologo in realtà lavora in un centro di ricerca. Lasciare la gente libera di pensare un po’ in grande può essere fonte di tante scoperte.

Questo comunque l’abbiamo già visto nella realtà di tutti i giorni: si potrebbero fare molti esempi sui quali potete trovare facilmente informazioni in rete: quello della crittografia, che non esisterebbe senza teoremi astratti di algebra che i matematici hanno dimostrato nel ’700, quello della codifica digitale di audio e immagini, basata su scoperte di Fourier del 1800…

Io mi diverto con la Matematica pura; ma la Matematica pura ha dimostrato di poter portare a invenzioni rivoluzionarie! Con questo non voglio dire che con i miei risultati si cambierà il mondo; io ho ricevuto un premio per la Matematica assegnato da matematici: da una comunità pura che apprezza teoremi puri. Per noi la priorità è quella di far progredire la Matematica stessa – come entità, come teoria… – con l’idea che possa fare del bene, anche portare a lungo termine dello sviluppo. Ma più di tutto siamo mossi dal senso della conoscenza!

Hai altre passioni oltre alla Matematica? Quali?

Diciamo che ho avuto altri passatempi: al liceo ero molto amante dello sport, ma una volta entrato in Normale per i primi anni era dura trovare il tempo; un po' di sacrifici anche in questo senso li ho dovuti fare! Mi è sempre piaciuto molto giocare a calcio (anche se purtroppo – ne parlavo proprio oggi a pranzo con i colleghi – ultimamente giocare mi fa sentire gli anni!). E ho molti hobby: mi piace sciare, andare in montagna…

Col tempo ho apprezzato sempre di più il fatto di riuscire a "staccare": con grandi passioni come quella per la Matematica c'è il grosso rischio di non riuscire a staccare il cervello, cosa che alla lunga può nuocere, specialmente se sei concentrato su un problema per il quale magari hai preso una strada di soluzione sbagliata. Ogni tanto bisogna svuotare e ripartire, come un reboot per il computer: prendersi un weekend in cui il sabato si risponde alle mail e la domenica è completamente libera, per esempio.

Una cosa che cerco di fare è seguire il calcio: a Zurigo ci sono riuscito di meno, ma a Austin avevamo organizzato l'A. S. Roma Austin Fanclub, ero riuscito a coinvolgere un sacco di umanisti!

Insomma: è buono avere hobby e dedicarsi ad altre cose. Io personalmente non ho avuto altre passioni che fossero al livello di quella per la Matematica.

Qual è la motivazione che ti spinge nella ricerca?

Un po' questo spirito della conoscenza che ho nominato prima. Mettiamola così: potrei dire, "secondo me fra tutte le curve del piano il cerchio è quella che racchiude la massima area a perimetro fissato". Sembra ragionevole, no? Beh, sarebbe bello dimostrarlo. Fin da quando ero studente – lo spirito critico del matematico! – mi sarebbe venuto da dire: bello, sembra ragionevole, ma siamo sicuri che sia proprio così? Non potremmo esserci persi qualcosa? Una cosa è sembrare, una cosa è avere una certezza.

Io sono sempre stato attratto da problemi che a me sembravano affascinanti (e questo è un giudizio personale! Non per niente nella Matematica abbiamo così tante sottoaree); d'altra parte, fra i problemi che mi affascinano ho cercato di essere anche pragmatico nella scelta di quelli a cui dedicarmi, perché alcuni possono essere più curiosità personali, altri più strutturali e potenzialmente interessanti per tutta la comunità.

La scelta dei propri problemi di ricerca in ogni caso è molto difficile e imparare a farla fa parte della maturazione di un matematico: i miei studenti di dottorato, già laureati, vengono da me a chiedermi un problema su cui lavorare, non lo scelgono da soli; io do loro delle proposte e della letteratura da leggere, loro tornano magari non del tutto convinti – mi dicono che vorrebbero qualcosa di più geometrico, o meno geometrico, o con un po' di probabilità... – e a quel punto si aggiusta il tiro. Io da studente ho capito abbastanza presto di essere particolarmente interessato all'Analisi, ma per capire in che direzione andare al suo interno ho dovuto esplorare molto!

Una lettura che per te è stata importante?

Una che mi è piaciuta durante il liceo è stata il libro "Che cos'è la Matematica?", di Courant e Robbins, penso sia un classico. Non sono mai stato un grande lettore ma lo lessi con molto piacere!

Trova più facilmente lavoro un laureato in Matematica o uno in Fisica?

Ehm, non sono un'agenzia di collocamento!

Io conosco bene il mondo matematico e molto meno quello fisico, ma una cosa che vi posso dire è questa: oggi i matematici vengono assunti spesso al di là delle loro conoscenze in Matematica. E' la forma mentis che sviluppano che è molto apprezzata nel mondo del lavoro: ho amici che, dopo una laurea, un dottorato, addirittura un postdoc in Matematica, sono andati a lavorare a Google o nella finanza; e sono stati assunti nonostante non avessero alcuna conoscenza pregressa del mestiere che andavano a fare! Questo perché in genere un matematico, una volta assimilati i concetti di base, ha un approccio ai problemi che piace: tira fuori l'idea giusta, magari è proprio intrigato dall'ottimizzare certi processi... Insomma, quella che è molto apprezzata, vedo, è la versatilità della mente matematica; e naturalmente non è detto che un fisico non possa averla!

Per quanto riguarda il mondo accademico, credo che la quantità di opportunità sia comparabile. Quello che posso dire è che, dovendo insegnare la Matematica a tutti – matematici, fisici, ingegneri! – i matematici sono richiesti in tutte le università.

Secondo te la Matematica si scopre o si inventa?

Quando ero giovane qualcuno mi disse che "come matematico ero molto ingegnere": ho una visione molto pragmatica. Per me la Matematica è uno strumento che nel tempo è stato sviluppato dall'uomo per descrivere la natura. Ad esempio, nel caso della geometria euclidea, uno mette degli assiomi perché sembrano naturali, e da quelli dimostra il Teorema di Pitagora. Però la verità è che in questo processo noi ci lasciamo ispirare molto dalla natura: se io disegno un triangolo rettangolo su questo vale il teorema di Pitagora; e fra le altre cose sappiamo che la somma dei suoi angoli interni è 180°. Ragionevole: magari pure in un universo parallelo vale la stessa cosa. Però se considero la cara vecchia Terra – una sfera, diciamo – e dal polo Nord scendo lungo un meridiano fino all'equatore, poi mi faccio 2000 km lungo l'equatore e ritorno al polo Nord con un altro meridiano, ho formato un triangolo con due angoli di 90° più un terzo angolo… la somma è ben più di 180° e il Teorema di Pitagora ha dei problemi a valere! Ecco, stiamo parlando di una geometria non euclidea; la Matematica sviluppa teorie sempre più generali proprio per modellizzare situazioni di questo genere, in cui magari teoremi che ci sembravano ovvi non sono più veri. Ma le geometrie non euclidee le abbiamo create proprio perché le abbiamo "viste"! Insomma, io penso che noi sviluppiamo la Matematica a partire dalla nostra esperienza e da quello che ci circonda: magari in un mondo diverso svilupperemmo una Matematica diversa a partire da assiomi diversi. Questa è la mia visione: chiaramente si tratta di una questione filosofica e molto personale; altri potrebbero rispondere in modo completamente diverso!

Frazioni e fogli quadrettati

di ***Carlo Carminati***, *Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa*
e ***Giulio Tiozzo***, *Department of Mathematics of the University of Toronto*

1 Introduzione

Cominciamo proponendo alcune domande e problemi legati ad oggetti matematici che tutti conoscono sin dalle scuole elementari. Vi suggeriamo di tenere a mano un foglio a quadretti: potrebbe tornarvi utile!

1.1 Mission impossible

Ecco un celebre rompicapo, attribuito al matematico e scrittore inglese Lewis Carroll. La figura qui sotto induce a pensare che sia possibile ricoprire un rettangolo 5x13 ricomponendo i pezzi di una piastrella quadrata 8x8.

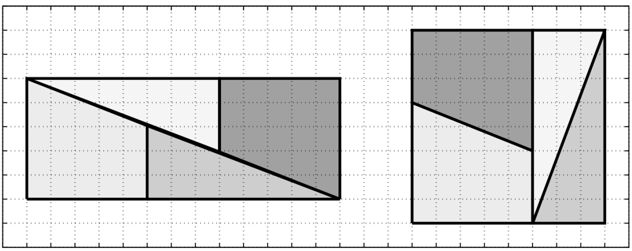

Figura 1: Dov'è l'imbroglio?

La cosa è paradossale, dato che le aree non coincidono: $5 \times 13 = 65 = 8^2 + 1$... Tra qualche pagina spiegheremo dove sta l'inghippo.

1.2 Le frazioni (non) crescono sugli alberi

Le frazioni, o più precisamente i numeri che si scrivono come rapporto di due interi, si chiamano *numeri razionali*; l'insieme di tutti i numeri razionali si indica col simbolo $\mathbb{Q}$. Lavorare con le frazioni è facile, a patto di ricordare due cose fondamentali:

(i) la somma di due frazioni p/q e p'/q' si calcola mediante la formula:

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{pq};$$

(ii) mai dividere per 0.

Nel seguito di questa sezione vedremo che "trasgredendo" a queste regole possiamo scoprire cose interessanti e formulare domande non banali. Cominciamo defininendo una nuova operazione che indichiamo col simbolo $\oplus$:

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}.$$

Per esempio $\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ ... esattamente quello che **non** si deve assolutamente fare se si vuole calcolare la somma usuale[1]. Osserviamo infatti che, in generale, se p, q, p', q' sono interi positivi la quantità $\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'}$ rappresenta un valore intermedio tra gli 'addendi' $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ (quindi non coincide **mai** con la vera somma); chiameremo *frazione mediana*[2] il risultato dell'operazione $\oplus$.

Se abbiamo una lista L di frazioni positive possiamo definire una lista derivata aggiungendo alla lista L, tra ogni coppia di elementi adiacenti, la loro frazione mediana; in questo modo partendo da una lista di $n+1$ elementi ne otteniamo una di $2n+1$ elementi.

Partiamo ora dalla lista che contiene le "frazioni"[3] $L_0 := [\frac{0}{1}, \frac{1}{0}]$ e consideriamo la lista derivata L_1, la derivata della derivata L_2, e così via:

[1] Nella letteratura anglosassone l'operazione che abbiamo indicato con $\oplus$ viene talvolta indicata scherzosamente col termine *freshman sum* (la somma della matricola).

[2] Attenzione: la frazione mediana non coincide, in generale, con la media aritmetica.

[3] Ovviamente la prima rappresenta il numero 0, mentre la seconda è solo una scrittura formale.

$$
\begin{array}{ll}
L_0 & \left[\frac{0}{1},\ \frac{1}{0}\right] \\
L_1 & \left[\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{0}\right] \\
L_2 & \left[\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{0}\right] \\
L_3 & \left[\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{0}\right] \\
L_4 & \left[\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{0}\right] \\
 & \dots
\end{array}
\tag{1.1}
$$

In questo modo otteniamo una sequenza infinita di liste finite, dove ciascuna è contenuta nella successiva: $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset ....$

Possiamo anche rappresentare gli elementi così generati come nodi di un albero binario infinito, chiamato albero di Stern-Brocot, dove all'enne-

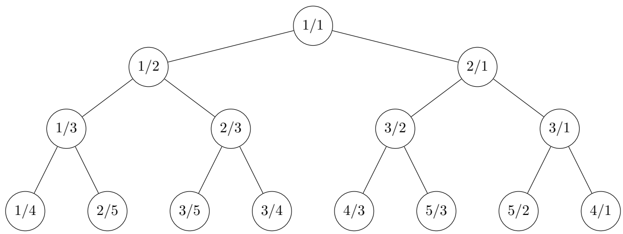

Figura 2: Ramificazioni iniziali dell'albero di Stern-Brocot.

simo livello compaiono i 2^{n-1} elementi generati dall'ennesima derivazione. Si noti che tutti gli elementi che stanno nel sottoalbero sinistro sono frazioni comprese tra 0 ed 1, inoltre l'applicazione $p/q \mapsto q/p$ corrisponde alla simmetria di asse verticale che scambia il sottoalbero sinistro con quello destro.

Ci possiamo chiedere se ogni frazione positiva p/q compaia nell'albero, se le frazioni che compaiono siano sempre in forma ridotta ai minimi termini (ovvero se p e q sono primi tra loro), e se possano esserci ripetizioni.

La definizione ed il lemma che seguono saranno la chiave per dare risposta a tutte queste domande:

Definizione 1. *Due frazioni* $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$ *sono una* coppia irriducibile *se si ha che*

$$mq - np = 1. \tag{1.2}$$

Lemma 1. *Se le frazioni* $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$ *sono adiacenti in una delle liste* $L_0, L_1, L_2, L_3, \ldots$ *allora sono una coppia irriducibile. Inoltre la frazione mediana* $\frac{p+m}{q+n}$ *è il razionale con denominatore minimo contenuto nell'intervallo aperto* $(p/q, m/n)$.

Verificare che tutti gli elementi adiacenti nelle prime liste sono coppie irriducibili è un'operazione meccanica (p.es. $3/5$ e $2/3$ sono adiacenti nella quarta lista generata, e infatti $2 \times 5 - 3 \times 3 = 1$), ma per dimostrare che questa proprietà vale sempre dovremo utilizzare un procedimento induttivo. Per il momento ci limitiamo ad osservare che (1.2) implica che le frazioni che compaiono nelle liste sono tutte ridotte, e sono ordinate in maniera strettamente crescente (di conseguenza ogni frazione compare nell'albero al più una volta). In effetti dal lemma segue che ogni frazione positiva compare in corrispondenza di qualche nodo dell'albero, ma questo lo vedremo dopo nella sezione 2, dove dimostriamo anche il lemma 1.

Un'altra domanda interessante è la seguente: data una frazione p/q, a quale livello dell'albero la troviamo? Qual è il percorso per raggiungerla? Nella sezione 2 proveremo a rispondere anche a queste domande.

1.3 Linee rette nell'era digitale

Lo schermo del computer è un'area rettangolare divisa in minuscole celle (i *pixel*); per rappresentare una linea sullo schermo il computer colora i pixel che vengono attraversati. Questo fatto è evidente quando una linea retta viene rappresentata su uno schermo a bassa risoluzione: in figura 3, a scopo esplicativo, raffiguriamo una retta su una quadrettatura abbastanza grossolana.

Una retta di coefficiente angolare compreso tra 0 ed 1 può essere composta assemblando opportunamente le tessere □ e ⊟, incollandole in corrispondenza di un lato verticale (vedi figura 3). In maniera analoga, una retta con coefficiente angolare maggiore di 1 potrà essere assemblata incollando tessere di forma □ o ◫ incollate lungo i lati orizzontali.

Alcune domande naturali sono le seguenti:

1. Quali sequenze di tessere possiamo trovare lungo una retta? Per esempio non è difficile convincersi che nessuna retta conterrà mai la sequenza □ □ ⊟ ⊟.

2. Quali rette danno luogo ad una sequenza periodica?

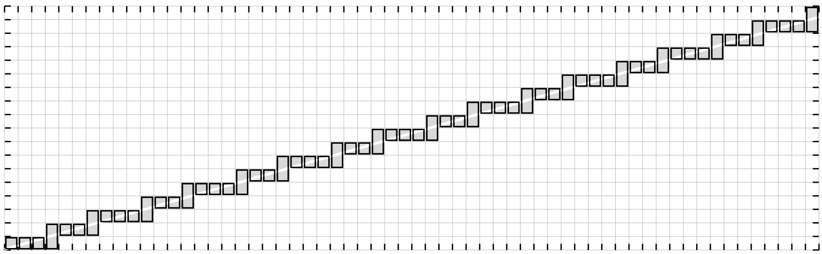

Figura 3: Una retta nel piano e la sua 'digitalizzazione' su una griglia. Possiamo codificare questa retta mediante la sequenza □ □ □ ▯ □ □ ▯ □ □ □ ▯ □ □ ▯ □ □ □ ▯ □ □ ▯ □ □ □ ▯...

3. Data la sequenza di tessere associata ad una certa retta, posso ricavare informazioni sul suo coefficiente angolare?

Il secondo di questi quesiti non è di difficile soluzione (invitiamo chi legge a provare a rispondere autonomamente), degli altri due tratteremo più avanti.

2 Prospettiva proiettiva

Torniamo alle domande che abbiamo formulato nella sezione 1.2, ed in particolare al lemma 1, che sarà la chiave di tutto.

Partiamo osservando che la condizione (1.2) di essere una coppia irriducibile (ovvero $mq - np = 1$) ha un'interessante interpretazione geometrica[4]. Infatti, come si può verificare direttamente calcolando la differenza di aree di figure elementari, la quantità $mq - np$ rappresenta l'area del parallelogramma generato nel piano dai vettori[5] (q, p) e (n, m); questi vettori individuano due rette di coefficiente angolare rispettivamente $\frac{p}{q}$ e $\frac{m}{n}$, e la frazione mediana $\frac{p+m}{q+n}$ risulta essere il coefficiente angolare del vettore risultante dalla somma tra (q, p) e (n, m). Osserviamo anche che tra i punti

[4] Chi ha dimestichezza con le matrici riconoscerà facilmente che $mq - np$ è il determinante della matrice $\begin{pmatrix} q & n \\ p & m \end{pmatrix}$.

[5] Nel seguito identificheremo sistematicamente il punto di coordinate (q, p) col vettore che va dall'origine a (q, p).

a coordinate intere interni al rettangolo $[0, q+n] \times [0, p+m]$, i punti (q, p) e (n, m) sono quelli più vicini alla diagonale.

Queste considerazioni mostrano che, anche se siamo partiti parlando di frazioni, tutte le questioni si possono riformulare in maniera molto più trasparente usando i vettori. Più precisamente: siamo interessati allo *spazio proiettivo*, ovvero l'insieme delle *direzioni* individuate dai vettori. L'operazione $\oplus$ è quindi una somma sotto mentite spoglie, e se non riconosciamo le consuete proprietà di una somma è solo perché stiamo interpretando il risultato non come un *vettore* ma come una *direzione*. È una questione di prospettiva: i vettori $(1, 1)$ e $(101, 100)$ sono molto lontani se considerati come vettori, ma corrispondono a direzioni quasi indistinguibili (per lo meno ad occhio nudo). Anche la frazione 'degenere' $1/0$ trova adeguata spiegazione in questo contesto, visto che corrisponde all'inoffensivo vettore $(0, 1)$, che punta in direzione verticale.

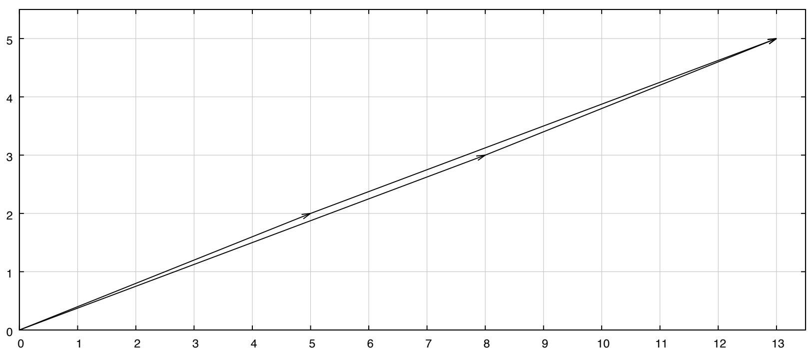

Figura 4: Il parallelogramma generato dai vettori $(8, 3)$ e $(5, 2)$ ha area $8 \times 2 - 5 \times 3 = 1$, ma è molto schiacciato sulla diagonale, individuata dalla direzione del vettore $(13, 5)$.

La figura 4 dovrebbe suggerire la soluzione del paradosso esposto in § 1.1: la suddivisione del rettangolo nasconde, sotto il tratto spesso dei bordi neri dei tasselli, un parallelogramma di area 1, che corrisponde all'area che sembra svanire quando si ricompongono i pezzi nella piastrella quadrata. L'occhio umano è un formidabile supporto per la nostra intuizione, ma risulta poco affidabile per fare stime quantitative precise (è difficile accorgersi, ad occhio, di una discrepanza inferiore al 2%). Per questo motivo è sempre bene affidarsi a dimostrazioni rigorose[6].

[6] I programmi di calcolo numerico che girano sui computer moderni utilizzano la doppia pre-

Dimostrazione del Lemma 1. È immediato verificare che tutti gli elementi adiacenti nelle prime liste sono coppie irriducibili. Supponiamo ora di aver dimostrato la proprietà (1.2) per tutti gli elementi adiacenti di una certa lista L_k; osserviamo quindi che due elementi adiacenti nella lista L_{k+1} formano una coppia della forma

$$\left(\frac{p}{q}, \frac{p+m}{q+n}\right) \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{p+m}{q+n}, \frac{m}{n}\right)$$

con p/q, e m/n elementi adiacenti di L_{k+1}. Ma in entrambi i casi queste sono coppie irriducibili. Infatti nel caso della prima coppia abbiamo che $(p+m)q-(q+n)p = mq-np = 1$; analogamente nel caso della seconda si verifica $(p+m)n-(q+n)m = mq-np = 1$.

Pertanto la proprietà (1.2) si propaga per contagio da una lista a quella successiva, e dunque deve valere per tutte le liste[7].

La minimalità del denominatore della frazione mediana si comprende meglio impostando il problema in termini di vettori: dobbiamo infatti verificare che tra tutti i punti a coordinate intere che stanno all'interno dello spicchio del primo quadrante compreso tra le semirette individuate dai vettori (q,p) e (n,m), il vettore $(q+n, p+m)$ è quello di ascissa minima. In altre parole dobbiamo verificare che, se

$$\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{m}{n} \tag{2.1}$$

e vale

$$\lambda \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

con λ e μ numeri reali, allora $b \geq q+n$.

Ma possiamo invertire (2.2) ottenendo che

$$\begin{cases} \lambda = nb - ma \\ \mu = -pb + qa. \end{cases}$$

Quindi sia λ che μ sono numeri interi, e di conseguenza la condizione (2.1) implica che $aq - pb \geq 1$ e $nb - ma \geq 1$, ovvero $\lambda \geq 1$ e $\mu \geq 1$. Deduciamo

cisione, che garantisce circa 15 cifre decimali significative: molto meglio dell'occhio umano ma pur sempre una precisione finita, che a volte risulta comunque insufficiente, dato che in matematica non di rado capita di aver a che fare con quantità mostruosamente piccole (o grandi).

[7] Qui, volendo essere formali, dovremmo far riferimento al principio di induzione matematica.

quindi che

$$b = \lambda q + \mu n \geq q + n,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\lambda = \mu = 1$: ciò conclude la dimostrazione del lemma. Notiamo che da questa dimostrazione segue pure un altro fatto interessante: il parallelogramma generato dai vettori (q, p) e (n, m) non contiene alcun nodo a coordinate intere al suo interno.

A questo punto non è difficile dimostrare che ogni frazione a/b appartiene a tutte le liste L_k per tutti gli indici più grandi di un certo k_0. A questo scopo osserviamo che se $a/b \notin L_k$, posso definire $I_k = (\frac{p_k}{q_k}, \frac{m_k}{n_k})$ come l'intervallo aperto che ha come estremi i due elementi adiacenti di L_k tali che $\frac{p_k}{q_k} < \frac{a}{b} < \frac{m_k}{n_k}$. È facile constatare che gli intervalli I_k formano una successione di intervalli incapsulati $I_{k+1} \subset I_k$ e, per la minimalità della frazione mediana, deve sempre essere $b \leq q_k + n_k$. D'altra parte la quantità $q_k + n_k$ forma una successione strettamente crescente in k, pertanto può rimanere sotto la soglia b solo per un numero finito di valori dell'indice k. Questo vuol dire che ci sarà un indice k_0 per cui si avrà che $a/b \in I_{k_0} = (\frac{p}{q}, \frac{m}{n})$ e $a/b = \frac{p+m}{q+n}$, così che $a/b \in L_{k_0+1}$, e ciò termina la dimostrazione.

Nel seguito chiameremo *genitori* della frazione a/b la coppia irriducibile di frazioni p/q e m/n che compare nella dimostrazione appena terminata, ovvero quella che soddisfa le condizioni $mp - qn = 1$ e $\frac{a}{b} = \frac{p+m}{q+n}$. Questa definizione è ben posta ed ha anche un significato geometrico intrinseco: le frazioni p/q e m/n sono i coefficienti angolari dei vettori (q, p) e (n, m), che corrispondono ai due punti a coordinate intere più vicini alla diagonale del rettangolo $[0, b] \times [0, a]$. Pertanto un problema interessante è il seguente: data una frazione a/b, come si determinano i suoi genitori?

3 L'albero dei periodi

Torniamo ora alle questioni che abbiamo accennato nella sezione 1.3: vogliamo codificare una retta in base al modo con cui questa taglia i tasselli di una griglia quadrata. Per semplicità nel seguito ci limiteremo a considerare rette del tipo $y = \alpha x + \beta$ con coefficiente angolare $\alpha \in [0, 1]$.

Per formalizzare questo problema conviene definire una sequenza biinfinita composta da caratteri di un alfabeto binario: chiamiamo *sequenza di taglio* della retta r la successione $(..., \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, ...)$ dove $\xi_n = 1$

se la retta r taglia una retta orizzontale del reticolo nella striscia $n-1 \leq x \leq n$, e $\xi_n = 0$ altrimenti.

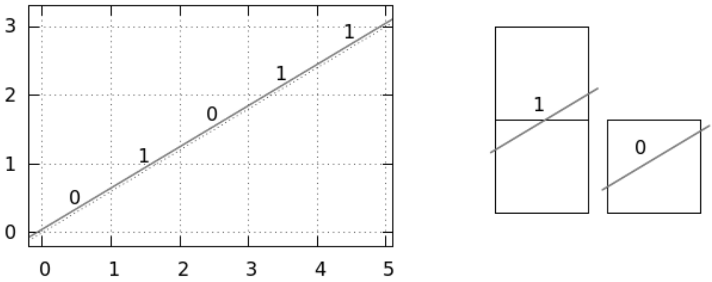

Figura 5: La sequenza di taglio di una retta.

Per il momento assumeremo anche che la retta sia *non degenere*, ovvero che non passi per alcun nodo a coordinate intere; è facile vedere che in tal caso questa codifica coincide con quella accennata in nella sezione 1.3 mediante la corrispondenza $\square \mapsto 0$ e $\boxminus \mapsto 1$. Al di là di considerazioni di carattere tipografico, preferiamo utilizzare l'alfabeto $\{0,1\}$ invece che $\{\square, \boxminus\}$ perché tale scelta rende facile esprimere la codifica a partire dall'equazione della retta. Infatti è immediato verificare che

$$\xi_k = \lfloor \alpha k + \beta \rfloor - \lfloor \alpha(k-1) + \beta \rfloor \tag{3.1}$$

dove $\lfloor x \rfloor$ indica il più grande intero che non supera x (p.es. $\lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$). Per tutte le rette non degeneri tale definizione corrisponde a quella che abbiamo dato nella sezione 1.2, ma in realtà la formula (3.1) è definita anche per una retta degenere (anche se in questo caso non è evidente l'interpretazione geometrica). Avremmo anche potuto scegliere un'espressione leggermente diversa:

$$\xi_k = \lceil \alpha k + \beta \rceil - \lceil \alpha(k-1) + \beta \rceil \tag{3.2}$$

dove $\lceil x \rceil$ denota il più piccolo intero non inferiore ad x (p.es. $\lceil \sqrt{5} \rceil = 3$, $\lceil 3 \rceil = 3$). Queste due espressioni coincidono su tutte le rette non degeneri, ma non su quelle degeneri che possiamo pensare come rette dotate di una doppia codifica; indicheremo rispettivamente con (ξ_k^+) e (ξ_k^-) le due codifiche di una retta ottenute con le formule (3.1) e (3.2), rispettivamente; chiameremo queste codifiche sequenza di taglio *superiore* ed *inferiore*.

Per dare un'interpretazione geometrica di questa doppia codifica può essere utile, in via provvisoria, codificare una retta degenere utilizzando l'alfabeto ternario $\{0, 1, X\}$, dove si procede come per le rette non degeneri, tranne per il fatto che si usa il simbolo X in adiacenza di un passaggio per un nodo della quadrettatura. In questo modo le cifre X capitano sempre in coppia. La codifica di una retta parallela e molto vicina a quella data si ottiene trasformando tutte le coppie XX in 10 o in 01 a seconda che la nuova retta passi sopra o sotto.

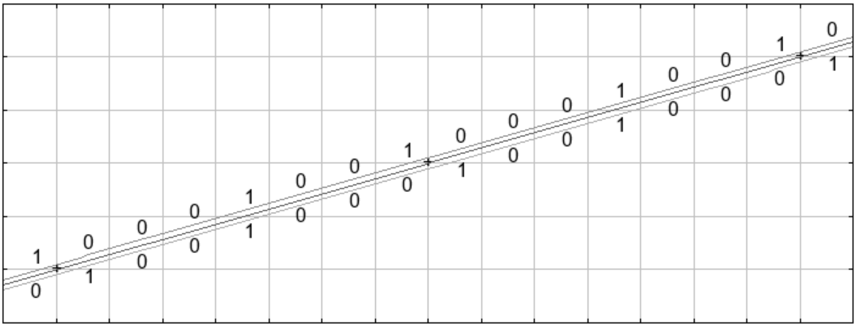

Figura 6: Sequenze di taglio per una retta appena sopra ed una appena sotto una retta degenere; le due sequenze differiscono solo in corrispondenza di un nodo sulla retta degenere.

Una retta degenere con coefficiente angolare razionale passa per infiniti nodi della quadrettatura e, di conseguenza, la sua codifica conterrà infiniti blocchi del tipo XX. P.es. la retta $y = \frac{p}{q}x$ interseca i nodi della griglia a coordinate intere nei punti del tipo (kq, kp) con k intero (e solo in questi punti, se p e q sono primi fra loro). Osserviamo inoltre che la stringa compresa tra due blocchi XX consecutivi è palindroma, per evidenti ragioni di simmetria; ciò ha come conseguenza il fatto che le due stringhe $(\xi_1^{\pm}, ..., \xi_q^{\pm})$ contenenti i primi q elementi delle due sequenze di taglio di una retta degenere si ottengono una dall'altra semplicemente invertendo l'usuale verso di lettura. Questo fatto può essere interpretato in relazione alla seguente proprietà geometrica: invertendo il verso di lettura della sequenza di taglio di una retta non degenere r si ottiene la sequenza di taglio della retta in posizione simmetrica ad r rispetto all'origine.

Per brevità nel seguito chiameremo *retta razionale* una retta con coefficiente angolare razionale; la sequenza di taglio di una retta razionale è particolarmente semplice, infatti è periodica. Si noti che è facile risalire al coefficiente angolare p/q di una retta razionale a partire dal periodo della sua sequenza di taglio: infatti q è la lunghezza del periodo, mentre p è il numero di volte che la cifra 1 appare nel periodo.

Al variare del parametro reale c, le rette razionali $y = \frac{p}{q}x + c$ hanno sequenze di taglio che differiscono solo per una traslazione, di conseguenza hanno tutte lo stesso periodo (a meno di permutazioni cicliche). Anzi, nella famiglia $y = \frac{p}{q}x + c$ le rette degeneri sono tutte e sole quelle per cui $c = k/q$ con k intero, e tutte le rette che sono comprese tra due rette degeneri consecutive hanno sequenza di taglio identica.

Per una retta razionale di coefficiente p/q si può quindi provare un'altra curiosa relazione tra le sequenze di taglio (ξ_k^+) e (ξ_k^-) definite dalle equazioni (3.1) e (3.2): esse si ottengono una dall'altra mediante una traslazione, ovvero esiste un intero $q_1 \in (0, q)$ tale che $\xi_k^- = \xi_{k+q_1}^+$. Non è difficile rendersi conto che q_1 deve essere il denominatore di un genitore p_1/q_1 di p/q: infatti la sequenza di taglio superiore (ξ_k^+) è la sequenza di taglio di ogni retta del tipo $y = \frac{p}{q}x + c$ per $0 < c < 1/q$, e il nodo di coordinate intere (q_1, p_1) sta proprio sulla retta degenere $y = \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}$.

Se (ξ_k^+) è la sequenza di taglio superiore della retta degenere r di coefficiente angolare $\alpha = p/q < 1$ allora $(\xi_1^+, ..., \xi_q^+)$ è minimo, nell'ordine lessicografico, rispetto ad ogni sua permutazione ciclica. Infatti basta confrontare $(\xi_1^+, ..., \xi_q^+)$ con i primi elementi $(\xi_1', ..., \xi_q')$ della sequenza di taglio di una retta non degenere $y = \frac{p}{q}x + c'$ con $c' \in (0, 1)$: se i due periodi non coincidono, chiamiamo k_0 il primo indice per cui $\xi_{k_0}' \neq \xi_{k_0}^+$, avremo che in corrispondenza delle linee verticale $\{x = k\}$ con $k < k_0$ le due rette tagliano il lato dello stesso tassello della quadrettatura mentre per $k = k_0$ tagliano il lato di tasselli differenti, e dato che r' sta sopra r avremo $\xi_{k_0}' = 1$ e $\xi_{k_0}^+ = 0$, il che dimostra la tesi. Un argomento del tutto analogo mostra che $(\xi_1^-, ..., \xi_q^-)$ è più grande (nell'ordine lessicografico) di qualunque sua permutazione ciclica.

Chiameremo *periodo standard* della retta di coefficiente angolare p/q la stringa $W_{p/q} := (\xi_1^+, ..., \xi_q^+)$. Osserviamo che se $mq - np = 1$ allora

$$W_{\frac{p}{q} \oplus \frac{m}{n}} = W_{\frac{p}{q}} W_{\frac{m}{n}} \tag{3.3}$$

dove al membro destro abbiamo semplicemente la concatenazione di due stringhe. Il motivo per cui vale questa proprietà è il seguente: nel

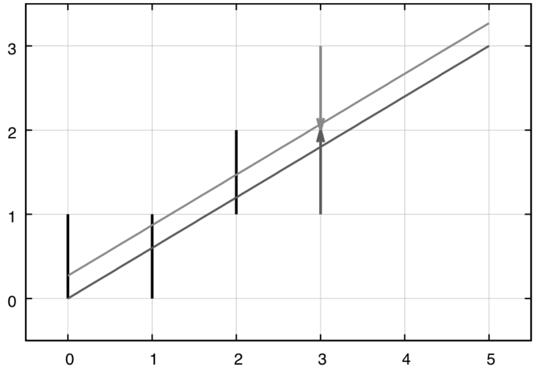

Figura 7: In questo caso le due sequenze di taglio coincidono prima di $k_0 = 3$, mentre $\xi'_3 = 1$ e $\xi^+_3 = 0$.

triangolo di vertici $(0,0)$, (q,p) e $(q+n, p+m)$ non ci sono nodi a coordinate intere, di conseguenza la sequenza di taglio superiore del segmento che va dall'origine a $(q+n, p+m)$ è la concatenazione della sequenza di taglio superiore del segmento che va dall'origine a (q,p) con quella del segmento che va da (q,p) a $(q+n, p+m)$.

Possiamo quindi partire da una lista contenente i periodi $W_{0/1} = 0$ e $W_{1/1} = 1$ per generare liste sempre più complete, aggiungendo i periodi corrispondenti alle frazioni medianti (in modo del tutto analogo a quanto fatto nella sezione 1.2):

$$\begin{array}{lc} F_1 & [0,\ 1] \\ F_2 & [0,\ 01,\ 1] \\ F_3 & [0,\ 001,\ 01,\ 011,\ 1] \\ F_4 & [0,\ 0001,\ 001,\ 00101,\ 01,\ 01011,\ 011,\ 0111,\ 1] \\ & \dots \end{array}$$

L'unica differenza rispetto alla costruzione della sezione 1.2 è che prendiamo in considerazione solo periodi relativi a frazioni $p/q \leq 1$ (p.es. le frazioni corrispondenti ai periodi di F_4 sono

$$\left[\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right],$$

che è la prima metà della lista L_4). Possiamo anche ordinare i periodi corrispondenti alle frazioni tra 0 ed 1 mediante una struttura ad albero che riflette quella della metà sinistra dell'albero di Stern-Brocot.

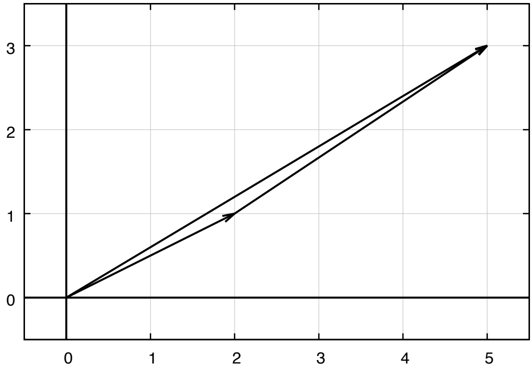

Figura 8: Abbiamo $p/q = 1/2$ e $m/n = 2/3$; si verifica quindi che $W_{3/5} = 01011$ è concatenazione di $W_{1/2} = 01$ con $W_{2/3} = 011$.

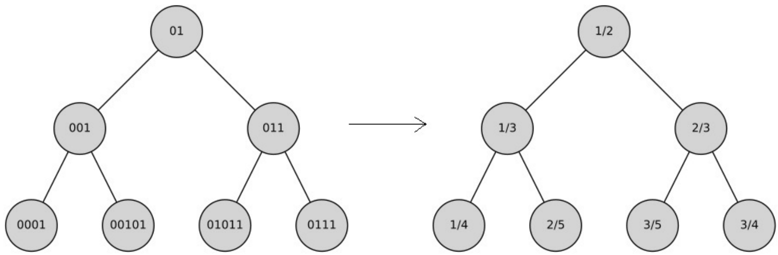

Figura 9: Prime ramificazioni dell'albero delle frazioni e dell'albero dei periodi.

L'equazione (3.3) mostra anche che ogni periodo standard ammette una fattorizzazione "canonica" (p.es. il periodo standard 0010101 è concatenazione dei due periodi standard 00101 e 01, e questo è l'unico modo di scrivere 0010101 come concatenazione dei due periodi standard).

C'è anche un altro modo per descrivere l'albero dei periodi, ovvero mediante gli operatori di sostituzione U_0 ed U_1 definiti da

$$U_0 : \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 01 \end{cases} \qquad U_1 : \begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

Applicando U_0 alle stringhe che compaiono nell'albero dei periodi tutti i blocchi di zeri compresi tra due 1 consecutivi si allungano di una unità (in particolare non ci sono più blocchi 11), e l'intero albero viene mandato nel sottoalbero di sinistra (p.es. $U_0(01) = 001$, $U_0(01011) = 00100101$) mentre applicando U_1 si allungano i blocchi di 1 tra due zeri consecutivi (in particolare spariscono i blocchi del tipo 00) e l'intero albero viene mandato nel sottoalbero di destra. Questo fatto si verifica facilmente sui primi elementi dell'albero, ed utilizzando l'induzione possiamo mostrare che questo vale a tutti i livelli dell'albero dei periodi.

Osserviamo che sul sottoalbero di sinistra, che contiene sequenze dove la cifra 1 è isolata, possiamo applicare l'inverso dell'operatore U_0, accorciando di un carattere i blocchi di 0 consecutivi; simmetricamente, sul sottoalbero di destra possiamo applicare l'inverso dell'operatore U_1, accorciando di un carattere i blocchi di 1 consecutivi. Pertanto possiamo facilmente individuare la posizione di qualunque periodo all'interno dell'albero procedendo a ritroso, fino ad arrivare alla radice 01:

$$00010010001001001 \overset{U_0^{-1}}{\mapsto} 001010010101 \overset{U_0^{-1}}{\mapsto} 0110111 \overset{U_1^{-1}}{\mapsto} 01011 \overset{U_1^{-1}}{\mapsto} 001 \overset{U_0^{-1}}{\mapsto} 01$$

Da questo deduciamo che $00010010001001001 \in F_6$ e per raggiungerlo partendo da 01 devo scendere due volte verso sinistra, poi due volte verso destra, ed infine una volta verso sinistra.

Conoscere la posizione di un periodo nell'albero è utile anche per dare un algoritmo per determinare la sua fattorizzazione canonica. Per esempio, utilizzando le informazioni che abbiamo ottenuto sopra possiamo dedurre la fattorizzazione canonica di 00010010001001001 da quella di 01:

$$00010010001001001 = U_0U_0U_1U_1U_0(01) = U_0U_0U_1U_1U_0(0)\; U_0U_0U_1U_1U_0(1)$$

da cui si ricavano i fattori

$$U_0U_0U_1U_1U_0(0) = 0001001 \qquad \text{e} \qquad U_0U_0U_1U_1U_0(1) = 0001001001.$$

Fin qui abbiamo parlato prevalentemente di rette con coefficiente angolare razionale, ma quanto detto sopra ha conseguenze interessanti anche per rette con coefficiente angolare α qualunque. Non è difficile dimostrare che se $qm - pn = 1$ allora $\alpha \in (p/q, m/n)$ se e solo se la sequenza di taglio di una retta di coefficiente angolare α si può esprimere come una concatenazione infinita (non necessariamente periodica, se α è irrazionale) delle stringhe $W(p/q)$ e $W(m/n)$. Questo fatto può essere utilizzato per dare una stima dall'alto e dal basso di α qualora sia noto un segmento della sequenza di taglio della retta.

Le sequenze di taglio di rette di coefficente $\alpha \notin \mathbb{Q}$ si chiamano *sequenze sturmiane*; esse non sono periodiche, ma rappresentano le sequenze binarie infinite di complessità minima (dopo le periodiche). Infatti, data una sequenza binaria infinita (ξ_k), per ogni intero naturale N possiamo considerare l'insieme $\mathcal{L}_N$ di tutti i blocchi di N caratteri consecutivi che compaiono all'interno della sequenza data. Per una generica sequenza binaria l'insieme $\mathcal{L}_N$ ha certamente un numero finito di elementi (può avere al massimo 2^N elementi), tuttavia per la sequenza di taglio di una retta non razionale siamo molto lontani da questo limite teorico. Infatti una sequenza è sturmiana se e solo se $\mathcal{L}_N$ ha esattamente $N+1$ elementi per ogni N intero positivo.

4 Ancora domande!

Spesso lo sforzo per sviscerare un argomento produce più domande che risposte. Non è necessariamente un male, pertanto ne elenchiamo alcune.

1. Partendo da $1/2$ e scendendo a zig-zag lungo l'albero di Stern-Brocot troviamo:

$$\frac{1}{2} \searrow \frac{1}{3} \nearrow \frac{2}{5} \searrow \frac{3}{8} \nearrow \frac{5}{13} \searrow \frac{8}{21} \nearrow \frac{13}{34} \searrow \dots$$

   Ogni coppia di elementi consecutivi di questa successione è irriducibile; tali coppie determinano una successione di intervalli incapsulati che si stringono attorno ad un valore non razionale. Determinarlo.

2. Mostrare che qualunque cammino con infiniti zig-zag determina una successione di intervalli incapsulati che individua univocamente un numero reale.

3. Dire se la stringa 000101 può apparire nella sequenza di taglio di una retta.

4. Il paradosso della sezione 1.1 era legato alla presenza del parallelogramma fantasma generato dai vettori $(8,3)$ e $(5,2)$. Questi vettori corrispondono a due frazioni nel cammino a zig-zag dell'esercizio 1. Utilizzare questo fatto per riprodurre lo stesso paradosso in tassellazioni di dimensione maggiore (p.es. ricomponendo opportuni tasselli di un quadrato 13×13 nel rettangolo 21×8 – in questo caso è l'area del quadrato ad essere leggermente maggiore...).

5. Per ogni intero positivo chiamiamo F_n la lista (ordinata in maniera crescente) di tutte le frazioni p/q che, scritte in forma ridotta, hanno

denominatore $q \le n$. Per esempio

$$F_5 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right].$$

Mostrare che ogni coppia di elementi adiacenti in F_n è irriducibile.

6. Proponiamo un algoritmo per trovare i genitori di una frazione $p/q \in [0,1]$. Una possibile strategia si basa sugli sviluppi in frazione continua; ne diamo un esempio nel caso di $7/10$.

   Quozienti parziali. Determiniamo lo sviluppo in frazione continua di $7/10$ applicando ripetutamente l'algoritmo di divisione con resto:

   $$\begin{cases} 10 = 7 \times \mathbf{1} + 3, \\ 7 = 3 \times \mathbf{2} + 1, \\ 3 = 1 \times \mathbf{3} + 0. \end{cases} \qquad \text{Di conseguenza:} \quad \frac{7}{10} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}.$$

   Genitore 1. Il primo genitore è ottenuto dalla frazione continua di $7/10$ privata dell'ultimo termine:

   $$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

   Genitore 2. Si ottiene "per differenza": $\frac{7-2}{10-3} = \frac{5}{7}$. Si noti che $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{7}$ sono una coppia irriducibile: $5 \times 3 - 2 \times 7 = 1$.

   Mostrare che questo algoritmo permette di trovare i genitori di qualsiasi numero razionale.

7. Si consideri l'albero dei razionali diadici, associato alle liste

   $$\begin{aligned} &D_1 = [0,1], \quad D_2 = [0,1/2,1], \quad D_3 = [0,1/4,1/2,3/4,1], \\ &D_4 = [0,1/8,1/4,3/8,1/2,5/8,3/4,7/8,1], \ldots \end{aligned}$$

   Per ogni elemento dell'albero disegniamo nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$ il punto che ha come ordinata l'elemento considerato e come ascissa il corrispondente elemento nel sottoalbero sinistro dell'albero di Stern-Brocot (p.es. alcuni punti saranno dati da $(1/2,1/2)$, $(1/3,1/4)$,

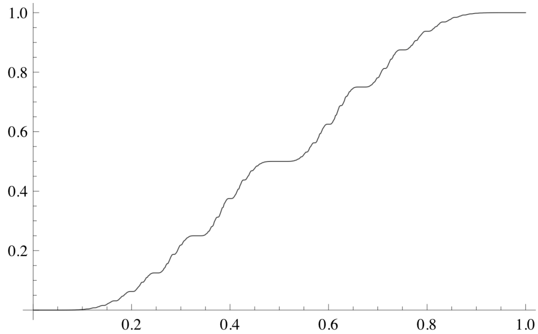

Figura 10: Unendo i puntini si ottiene il grafico della funzione "punto di domanda" di Minkowski, anche conosciuta come "slippery devil's staircase".

$(3/5, 5/8)$,...). Mostrare che i punti così ottenuti stanno sul grafico di una funzione continua e strettamente crescente (grafico che può essere visto come "completamento" dei punti così generati).

8. Giovanni gioca a tirare tiri liberi a basket: fallisce il primo tiro, ma dopo un certo numero di tiri la percentuale di successi supera l' 80%. (a) Esiste un momento intermedio in cui la percentuale di successi è esattamente pari a 80% ? (b) Stesso problema, sostituendo 80% con 60%.

9. Un noto teorema del matematico Georg Alexander Pick esprime l'area A di un poligono con vertici a coordinate intere con la formula

$$A = N_i + \frac{N_b}{2} - 1$$

dove N_i del numero di nodi interni e N_b quello dei nodi che stanno sul bordo del poligono. Per esempio se $np - mq = 1$ il triangolo generato di vertici $(0,0)$, (q,p) e (n,m) contiene punti nodali solo in corrispondenza dei vertici, infatti ha area $A = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Provare quest'ultima formula e dedurne il teorema di Pick per un generale poligono con vertici interi.

Donna o tigre?

*di **Alessandro Pinzi**, studente presso il Dipartimento di Matematica di Pisa*

In questa sezione racconteremo una storia di 3 ragazzi, studenti di matematica, che si divertono a proporsi indovinelli a vicenda. Starà a voi però cercare di risolverli! Alla fine della rubrica sono descritte tutte le soluzioni degli indovinelli proposti: l'ideale sarebbe, però, che le consultaste solo dopo averli risolti, o comunque dopo averci pensato un po' su.
Buon divertimento!

Francesca, Donald e Alessandro sono tre studenti di matematica, che si sono riuniti una sera in un luogo segreto per potersi proporre degli indovinelli senza essere disturbati (un po' come la setta dei poeti estinti in 'L'attimo fuggente', però senza fare niente contro le regole: semplicemente questa idea li stimolava).
Parte Alessandro con le sue proposte di indovinelli:

Una volta approdai in un'isola, detta *isola dei domandanti* perché tutti gli abitanti comunicavano solo ponendo delle domande. Scoprii che c'erano due tipi di persone: quelle di tipo A che ponevano solo domande la cui risposta fosse sì, e quelle di tipo B che ponevano solo domande la cui risposta fosse no. Ad esempio: un abitante di tipo A potrebbe chiedere "2+2 fa 4?", ma non "2+2 fa 5?". Ecco gli indovinelli che vi propongo:

1. *Incontrai una persona di nome Bob che mi chiese: "sono di tipo B?" Cosa si può concludere? E se avesse chiesto "sono di tipo A?"?*

2. *Un abitante di nome Carl mi chiese: "sono del tipo che potrebbe fare la domanda che sto facendo?" Cosa sappiamo sul tipo di Carl?*

3. *Un abitante di nome John mi chiese: "sono del tipo che potrebbe chiedere se sono di tipo B?" Riusciamo a dire di che tipo è John?*

4. *Mi imbattei in una piacevole coppia, i signori Smith. Mrs. Smith chiese a Mr. Smith: "sei del tipo che potrebbe chiedermi se sono di tipo A?" Cosa riusciamo a dire sul tipo dei due amanti?*

Adesso è il turno di Francesca:

Una volta, mentre dormivo, sognai dell'esistenza di una città, detta *città dei sogni*, i cui cittadini potevano essere di due tipi: diurni o notturni. Inoltre, lì nessuno dormiva nel senso in cui lo intendiamo noi, semplicemente ogni persona era sveglia in certi momenti e addormentata in altri, ma visivamente non si poteva notare la differenza. Si ha però questa caratterizzazione: i diurni credono solo in cose vere quando sono svegli e solo in cose false quando sono addormentati, mentre i notturni credono solo in cose false quando sono svegli e solo in cose vere quando sono addormentati. Veniamo alla parte divertente:

5. *In un certo momento un cittadino crede di essere diurno. Cosa sappiamo dire su questa persona?*

6. *È vero che l'opinione di un abitante non cambia mai sul fatto che egli stesso sia diurno o notturno?*

7. *Due amici, Tim e Tom, sono entrambi cittadini. In un certo momento Tim crede che entrambi siano notturni, mentre Tom crede che non siano entrambi notturni. Sappiamo che uno era sveglio e uno era addormentato; chi dei due era sveglio?*

8. *Un cittadino di nome Ned, in un certo momento, crede che lui e sua sorella, Bibi, siano entrambi notturni, ma al tempo stesso crede di non essere notturno. Cosa possiamo dire su di loro?*

9. *Supponiamo che questa città esista davvero, e che io ne sia un'abitante. Di che tipo sono?*

A questo punto prende la parola Donald, che è senz'altro il più introverso fra i tre, e propone questo problema:

Ho costruito una macchina che lavora con gli interi positivi $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e con dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}_+$ che possiamo enumerare: la macchina riconosce i numeri $1, 2, 3, \ldots$ e i sottoinsiemi $A_1, A_2, A_3, \ldots$ di $\mathbb{N}_+$. Notate che

$\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ non potrà mai coincidere l'insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$, poiché il teorema di Cantor ci assicura che non esiste una funzione bigettiva tra X e $\mathcal{P}(X)$ per nessun insieme X (vedi capitoli 1 e 2 di [1] oppure vedi [2]). Ora, lasciatemi definire $n \star m$ come una sequenza di uni lunga n seguita da una sequenza di zeri lunga m (ad esempio $2 \star 3 = 11000$). La macchina stampa solo numeri di questo tipo, cioè una sequenza di 1 seguita da una sequenza di 0, ed ogni volta che stampa un numero di questa forma, che può essere riconosciuto come $n \star m$ per qualche $n, m \in \mathbb{N}_+$, significa che la macchina ha dimostrato che $n \in A_m$ (si legge n appartiene ad A_m). Sono certo al 100% che la macchina è sicura, cioè se stampa, ad esempio, 1110, significa che davvero $3 \in A_1$. Chiameremo *dimostrabili* le proposizioni del tipo $n \in A_m$ che possono effettivamente essere dimostrate dalla macchina (cioè tali che la macchina sia in grado di stampare $n \star m$). Notare che c'è una bella differenza tra dimostrabile e vera: una proposizione dimostrabile è senz'altro vera per quanto detto prima, ma non sappiamo se tutte le proposizioni vere sono dimostrabili dalla macchina. Definiamo infine per ogni $n > 0$ l'insieme $A_n^\star = \{m > 0 \text{ tale che } m \star m \in A_n\}$.

Sappiamo le seguenti cose sugli insiemi A_i:

a) A_8 è l'insieme di tutti i numeri stampabili dalla macchina

b) per ogni intero positivo n, A_{3n} è il complementare di A_n, cioè $A_{3n} = \mathbb{N}_+ \setminus A_n$

c) per ogni intero positivo n, A_{3n+1} è l'insieme $A_n^\star$

Arriviamo quindi alle domande:

10. *da queste proprietà degli insiemi si può dedurre che la macchina non può dimostrare ogni proposizione vera. Allora vi chiedo di trovare una proposizione del tipo $n \in A_m$ che sia vera, ma che non possa essere dimostrata dalla macchina.*

11. *Quante sono le proposizioni del tipo $n \in A_m$ che sono vere ma che la macchina non può dimostrare?*

Facciamo una riflessione su quest'ultimo indovinello: esso racchiude tutto il senso della matematica. Noi matematici, che tramite i nostri studi cerchiamo di dimostrare teoremi, siamo la macchina; ciò con cui lavoriamo non sono i numeri interi positivi, bensì tutte le strutture matematiche che siamo riusciti a definire nella nostra storia, con le quali sappiamo come lavorare grazie a degli assiomi definiti agli inizi del '900 da Zermelo e Fraenkel, che hanno appunto cercato di assiomatizzare la matematica così come la conosciamo e pensiamo (nel nostro indovinello gli assiomi sarebbero le proprietà che conosciamo degli insiemi).

Abbiamo però alcuni problemi, così come la macchina dell'indovinello: siamo davvero in grado di dimostrare vere o false tutte le proposizioni che ci vengono in mente?

Come detto prima, sono universalmente accettati gli assiomi di Zermelo-Fraenkel per descrivere la matematica. Prendiamo come proposizione l'ipotesi del continuo: essa afferma che non esistono insiemi A tali che $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$, cioè che ogni insieme che può essere immerso in $\mathbb{R}$ (cioè ogni insieme A tale che esista una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ iniettiva) può essere messo in bigezione o con $\mathbb{R}$ o con $\mathbb{N}$. Questo fatto è stato dimostrato indecidibile a partire dagli assiomi: infatti Gödel e Cohen hanno dimostrato che non si può dimostrare né che la proposizione sia vera né che sia falsa. Questo, per Gödel, significava che il sistema di assiomi assunto era incompleto per descrivere il nostro mondo, infatti esistono più 'universi matematici' diversi tra loro che soddisfano tali assiomi, e in certi di questi l'ipotesi del continuo è vera, in altri è falsa, ma non sappiamo dire in quale di questi universi noi viviamo. (Fonte: `https://it.wikipedia.org/wiki/Ipotesi_del_continuo`)

Soluzioni

1. Nel primo caso è facile dire che la persona che abbiamo incontrato non può essere un abitante dell'isola, mentre nel secondo caso potrebbe essere di tipo A o di tipo B.

2. Poiché ha effettivamente pronunciato la domanda, la risposta è sì, quindi Carl è di tipo A.

3. Ricordandoci la risposta al primo indovinello, se la risposta fosse sì, allora lui potrebbe chiedere se è di tipo B, e quindi non sarebbe un abitante. Quindi la risposta è no e quindi è di tipo B.

4. Sulla signora Smith non sappiamo nulla, sul signor Smith sappiamo che è di tipo A. Infatti: supponiamo che la signora sia di tipo A, allora lui potrebbe chiedere se lei è di tipo A, quindi lui sarebbe di tipo A perché la risposta sarebbe sì. Se lei fosse di tipo B, allora lui non può chiedere se lei è di tipo A, quindi lui non può fare una domanda la cui risposta sarebbe no, quindi deve essere di tipo A.

5. Se fosse stato diurno, allora doveva essere sveglio perché credeva una cosa vera. Se fosse stato notturno, allora doveva essere sveglio perché stava credendo una cosa falsa. Quindi non sappiamo dire di che tipo era, ma sappiamo per certo che era sveglio.

6. Se un abitante è diurno, allora da sveglio crederà di essere diurno, ma da addormentato deve credere una cosa falsa, quindi crederà di essere notturno. La stessa cosa, invertita per quanto riguarda lo stato della persona, vale per i notturni.

7. Se si volessero analizzare tutti i casi, si dovrebbero considerare 4 casi per Tim e 4 per Tom, quindi 16 in totale. Ma esiste un approccio più intelligente. Osserviamo che devono essere dello stesso tipo: se fossero di tipi diversi, allora le due frasi dovrebbero essere o entrambe vere o entrambe false, poiché sappiamo che uno era sveglio e l'altro addormentato, ma se fossero entrambe vere allora dovrebbero essere entrambi diurni (assurdo!), se fossero entrambe false allora dovrebbero essere entrambi notturni (assurdo!). Ora ci sono rimasti due casi: se fossero entrambi notturni, allora Tom crederebbe una cosa falsa, quindi dovrebbe essere sveglio; se fossero entrambi diurni, allora Tom crederebbe una cosa vera, e quindi dovrebbe essere sveglio. In ogni caso quello sveglio è Tom.

8. Poiché Ned crede quelle cose nello stesso momento, devono essere entrambe false, perché incompatibili tra loro. Quindi lui è notturno e sveglio (perché crede qualcosa di falso), e poiché non sono entrambi notturni, Bibi è diurna.

9. All'inizio Francesca dice di aver sognato l'esistenza di questa città, quindi se esistesse veramente Francesca dovrebbe essere notturna, perché ha creduto dell'esistenza di questa città mentre dormiva.

10. Una soluzione possibile è la proposizione $75 \in A_{75}$. Vediamo intanto che è vera: se fosse falsa significherebbe che $75 \in A_{25}$, quindi $75 \star 75 \in A_8$, quindi la macchina dimostrerebbe il falso dicendo che $75 \in A_{75}$, e questo è assurdo. Quindi la proposizione è vera. Quindi $75 \notin A_{25}$, e quindi $75 \star 75 \notin A_8$, sennò 75 apparterrebbe ad A_{25}. Quindi la proposzione è vera ma siamo sicuri che la macchina non può essere in grado di dimostrarlo perché $75 \star 75 \notin A_8$.

Un'altra risposta possibile è, per esempio, $73 \in A_{73}$. Supponiamo sia falsa, allora $73 \star 73 \notin A_{24}$, quindi $73 \star 73 \in A_8$, assurdo. Quindi è vera, quindi $73 \star 73 \in A_{24}$ e quindi $73 \star 73 \notin A_8$.

11. Si noti che, per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, si ha che $A_n = A_{9n}$; quindi $A_{75} = A_{675}$, e a partire dalla soluzione $75 \in A_{75}$ al punto precedente si trova che un'altra soluzione è $675 \in A_{675}$. Ma quindi si hanno infinite proposizioni vere che la macchina non può dimostrare, in particolare quelle della forma $9^k \cdot 75 \in A_{9^k \cdot 75}$ (o anche quelle della forma $9^k \cdot 73 \in A_{9^k \cdot 73}$) per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Arrivati a questo punto, spero che tutti quanti si siano chiesti perché questo pezzo si intitoli 'Donna o tigre?'. Il motivo è che tutti gli indovinelli esposti sono tratti da un libro intitolato appunto 'Donna o tigre?' (vedi [3]). Voglio quindi lasciarvi un ultimo indovinello (senza soluzione!):

Un re imprigionò un suo nemico. Dopo giorni di prigionia, lo mise in una stanza con 9 porte numerate 1, 2, . . . , 9 e gli disse: "dietro ad una sola di queste porte c'è una bellissima donna (e se la troverai sarai libero di andartene e di sposarla), mentre le stanze dietro le altre 8 porte o sono vuote o contengono una tigre. Se aprirai una porta con la tigre sarai probabilmente sbranato vivo, mentre se apri una porta vuota dovrai rimanere lì dentro per il resto dei tuoi giorni".

Sulle porte c'erano dei cartelli con degli indizi, che potevano essere veri o falsi. Sappiamo per certo che l'indizio sulla porta della donna è vero, gli indizi sulle porte dove ci sono delle tigri sono falsi, mentre gli indizi sulle porte di stanze vuote possono essere veri o falsi. Gli indizi sono i seguenti:

1. la donna è in una stanza dispari
2. questa stanza è vuota
3. il cartello 5 è vero o il cartello 7 è falso
4. il cartello 1 è falso
5. uno dei due cartelli 2 e 4 è vero
6. il cartello 3 è falso
7. la donna non è nella stanza 1
8. questa stanza contiene una tigre e la stanza 9 è vuota
9. questa stanza contiene una tigre e il cartello 6 è falso

Il prigioniero ci pensò su e alla fine disse: "Il problema non è risolvibile. Non è leale." Allora il re rispose: "Lo so", scoppiando a ridere. Allora il prigioniero replicò: "Non è divertente, permettetemi di chiedere un indizio. La stanza 8 è vuota o no?" Allora il re gli rispose, e così il prigioniero fu in grado di trovare la donna e di fuggire.

In quale stanza si trova la donna?

Bibliografia

[1] M. Manetti, *Topologia*, 2014, Springer.

[2] K. Hrbacek, T. Jech, *Introduction to set theory, revised and expanded*, 1999, CRC Press.

[3] R. M. Smullyan, *Donna o tigre? e altri indovinelli logici, compreso un racconto matematico sul teorema di Gödel*, 1985, Zanichelli.

I problemi del giornalino

*una rubrica a cura di **Davide Lombardo**,*
ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

Mandateci le vostre soluzioni all'indirizzo `LezioniAperteMatematica@gmail.com`!

1 Divertissement

1.1 Ci sarà un primo?

Sia $n = 2019!$, ovvero il prodotto dei numeri interi positivi fra 1 e 2019. Consideriamo i 2018 interi compresi fra $n + 2$ e $n + 2019$: è vero o no che uno di questi 2018 numeri è primo?

1.2 Pianificazione stradale

Nello stato di Francuvia ci sono 2020 città, ognuna delle quali è collegata con una strada diretta ad almeno 1010 altre città. Dimostrare che per ogni coppia di città, chiamiamole A e B, o sono collegate direttamente da una strada, oppure esiste una terza città, diciamo C, che è collegata ad entrambe (in altri termini, è possibile raggiungere ogni città da ogni altra città passando per al massimo una terza città).

1.3 Una sequenza esplosiva

Consideriamo la sequenza di interi positivi il cui primo termine è $a_0 = 3$ e in cui l'$(n + 1)$-esimo termine a_{n+1} è dato da $2a_n^2 - 1$ (la sequenza inizia quindi $a_0 = 3, a_1 = 17, a_2 = 577, a_3 = 665857, \ldots$). Trovare una "formula chiusa" per a_n (cioè una una espressione per a_n che non coinvolga i termini intermedi $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$).

1.4 Excentri

Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta; chiamiamo M il punto medio dell'arco di Γ di estremi B, C che non contiene il punto A. Indichiamo con I l'incentro di ABC e con I_a l'excentro opposto al vertice A (ovvero il punto d'incontro della bisettrice dell'angolo interno in A e degli angoli tra BC e i prolungamenti di AB e AC dalla parte di B e C rispettivamente). Dimostrare che M è il punto medio di II_a.

2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

2.1 Una curiosa proprietà aritmetica

Sia n un intero positivo e a un intero coprimo con $2n$ (due interi positivi a e b si dicono *coprimi* se non hanno divisori comuni). Consideriamo l'insieme

$$S_a = \{ai \bmod 2n : i = 1, \dots, n\},$$

dove $k \bmod 2n$ indica il resto di k nella divisione per $2n$, preso nell'intervallo $[0, 2n-1]$ (quindi, per esempio, $135 \bmod 12 = 3$). Sia poi b un intero tale che $ab \bmod 2n = 1$ e sia $S_b = \{bj \bmod 2n : j = 1, \dots, n\}$.

1. Sia N_a il numero di elementi di S_a compresi fra 0 e $n-1$, e sia Σ_a la somma degli elementi di S_a. Dimostrare che
$$\Sigma_a = \frac{3n^2 - n}{2} - nN_a.$$

2. Sia Σ_b la somma degli elementi di S_b. Dimostrare che $\Sigma_a = \Sigma_b$.

Se volete conoscere problemi e soluzioni delle edizioni passate – nonché in futuro le soluzioni dei problemi qui sopra – tenete d'occhio la pagina `https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days`, sulla quale verrà rilasciata la raccolta aggiornata de *I problemi del giornalino*!

Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una breve lista di libri, pagine web e film che possono essere uno spunto per ulteriori approfondimenti. Alcuni contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti "più leggeri".

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi.

- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann.

- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico.

- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan.

- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore.

- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.

- G. Lolli, *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.

- A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo.

- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.

- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni.

- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Per non confondere le idee ci siamo limitati a proporre una bibliografia essenziale. Di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- D. Aronofsky, Π – *Il teorema del delirio*, 1998.

- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.

- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001.

- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.

- M. Tyldum, *The imitation game*, 2014.

- G. Van Sant, *Will Hunting – Genio ribelle*, 1997.

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:
  `http://maddmaths.simai.eu/`
- Versione on-line del giornalino:
  `https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days`
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
  `http://www.dm.unipi.it/webnew/`
- Sito delle olimpiadi di matematica:
  `http://olimpiadi.dm.unibo.it/`
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
  `http://www.sns.it/`
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:
  `https://poisson.phc.dm.unipi.it/`

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito:

`http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento`

Le prossime iniziative

Vi aspettiamo alla **Settimana Matematica**, il nostro principale evento di orientamento, che si svolgerà intorno alla **prima settimana di febbraio 2020**: visitate la pagina

`http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento`

per aggiornamenti sulle date e sulle modalità di iscrizione!

Insieme a circa 150 studenti da tutta Italia, avrete la possibilità di confrontarvi con la vita del Dipartimento di Matematica di Pisa, partecipare a laboratori tematici, assistere a conferenze, interagire con docenti e studenti, e molto altro ancora...