PISA, 5-7 FEBBRAIO 2020

Matematica

il giornalino degli open days

Università di Pisa

notizie, giochi e pillole di matematica

Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Su indicazione della Commissione Orientamento.

Realizzato con la collaborazione degli studenti counselling:

Davide La Manna
Francesca Pistolato
Francesca Rizzo

Coordinamento: Alessandra Caraceni, Giovanni Gaiffi

Grafica: Alessandra Caraceni

Introduzione

Quella che state leggendo è l'edizione numero dieci del **Giornalino degli Open Days** (ebbene sì, è giunto il momento di fare spazio a una seconda cifra!).

Questa pubblicazione a cura di professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, prodotta contestualmente alle attività di orientamento, si rivolge principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

Ogni numero (e questo non fa eccezione) contiene una prima sezione dedicata in particolare a chi stia considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario di sapore matematico, che presenta il Corso di Laurea in Matematica così come declinato presso l'Università di Pisa. Troverete una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica, integrate da dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in Matematica.

Il cuore di questo numero è come sempre un articolo con lo scopo di avvicinare il lettore al mondo della matematica, ai suoi metodi e alle sue variegate sfaccettature. **Luca Bruni**, studente del nostro dipartimento, ci racconta la storia di un problema dall'enunciato sorprendentemente semplice, la cui soluzione ingegnosa ad opera del matematico Paul Monsky offrirà l'occasione di parlare del Lemma di Sperner, della norma 2-adica e di alcune delle sue proprietà fondamentali.

Nella rubrica dedicata ai giochi matematici tratteremo un "solitario" la cui invenzione risalirebbe al XVII secolo e sarebbe opera di un prigioniero del famoso carcere della Bastiglia: il Peg solitaire.

Segue la rubrica "i problemi del giornalino": una piccola raccolta di problemi matematici con i quali confrontarvi, di cui vi invitiamo ad inviarci le vostre soluzioni (assieme ai vostri eventuali dubbi!) all'indirizzo

`LezioniAperteMatematica@gmail.com`.

SCAN ME

Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo `https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days`!

Se voleste cimentarvi con altri problemi matematici, visitate la pagina del giornalino tramite il QR qui sopra: vi troverete una raccolta con i problemi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni!

E se dopo tutto questo non siete ancora sazi di matematica, niente paura: la nostra ultima rubrica contiene un ampio assortimento di consigli di lettura, nonché una lista di film e una di link a siti web che potrebbero fare al caso vostro.

Indice

Il corso di laurea in Matematica

Se ti stai avvicinando alla fine del tuo percorso scolastico e devi scegliere cosa fare all'università, probabilmente passerai la giornate a cercare informazioni sul mondo universitario, analizzando e confrontando i vari corsi di laurea, per offerta formativa, rapporto laureati-occupati, esperienze e sbocchi professionali, alla ricerca di quello che fa per te.

Beh, se fra le opzioni che stai considerando c'è anche matematica, sei nel posto giusto. In questa sezione proveremo a presentarti il nostro Dipartimento, con le numerose opportunità che offre.

1 Il corso di laurea a Pisa

Di preciso cosa ti aspetta se studierai matematica a Pisa? Il Corso di Laurea in Matematica si divide formalmente in Laurea Triennale e Laurea Magistrale. La prima corrisponde al titolo internazionale *Bachelor's degree* e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici; la seconda, invece, è internazionalmente identificata con la *Master's degree*, e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

La triennale a Pisa offre una solida preparazione di base, cercando di offrire un ampio ventaglio di corsi sui vari ambiti di ricerca in matematica: troverete corsi di algebra, analisi e geometria, ma anche di analisi numerica, meccanica razionale, probabilità e molto altro! L'unica scelta (non restrittiva) che viene chiesta all'inizio del secondo anno è fra due curricula, uno più teorico, che prevede anche una solida preparazione fisica, e un secondo più applicativo-modellistico. Più precisamente:

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

SCAN ME

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

Entrambi i curricula sono molto validi, grazie alla collaborazione con i Dipartimenti di Fisica e di Informatica, i cui docenti si occupano della gestione dei corsi di tali indirizzi anche per noi studenti di matematica. In entrambi i casi i piani di studio sono da completare con alcuni "esami a scelta", corsi che ognuno può scegliere a piacere fra i numerosi offerti dal Dipartimento, così da poter integrare il proprio percorso in base ai propri gusti.

Nella maggior parte dei casi, i laureati triennali scelgono di proseguire gli studi con la magistrale in matematica restando a Pisa. Il percorso in magistrale è fatto su misura per lo studente, dal momento che durante il biennio c'è la necessità di specializzare il proprio piano di studi in un preciso settore di ricerca. I curricula offerti sono i seguenti: didattico, modellistico, applicativo, generale e teorico.

Un altro punto di forza del nostro dipartimento è la possibilità di fare esperienze di studio all'estero, grazie ad alcuni accordi internazionali. In particolare l'università ha preso degli accordi particolarmente prestigiosi con l'École Polytechnique di Parigi e la Hokkaido University, che consentono il conseguimento di titoli congiunti. Insieme a questi ci sono anche gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio presso un'altra università europea, per dare esami particolari o lavorare alla tesi. In particolare un accordo di questo tipo è stato stipulato di recente con l'ETH di Zurigo. Potete trovare altre informazioni e rimanere aggiornati sugli accordi più recenti sulla pagina dell'Internazionalizzazione

`http://people.cs.dm.unipi.it/boito/international.html`

Nella Tabella 1 trovate l'elenco degli esami da sostenere durante la laurea triennale, molti dei quali riguardano argomenti non trattati a scuola. Per iniziare a capire cosa studiano queste discipline, quali problemi cer-

Fondamentale	**Computazionale**
I anno	
Aritmetica (9 CFU)	
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)	
Laboratorio di comunicazione mediante calcolatore (3 CFU)	
Analisi matematica 1 (15 CFU)	
Geometria 1 (15 CFU)	
Fisica I con laboratorio (9 CFU)	
II anno	
Algebra 1 (6 CFU)	
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)	
Inglese scientifico (6 CFU)	
Analisi matematica 2 (12 CFU)	
Geometria 2 (12 CFU)	
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)	
Laboratorio didattico di matematica computazionale (3 CFU)	
Esame a scelta (6 CFU)	Algoritmi e strutture dati (6 CFU)
III anno	
Meccanica razionale (6 CFU)	
Fisica II (9 CFU)	Calcolo scientifico (6 CFU)
Fisica III (6 CFU)	Laboratorio computazionale (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)	Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
	Ricerca operativa (6 CFU)
4 Esami a scelta (24 CFU)	*3 Esami a scelta* (18 CFU)
Prova finale (9 CFU)	

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2019-2020 (vedi [8]).

cano di risolvere e quali sono alcune delle tecniche usate, consigliamo il libro:

R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri.

Si tratta di uno dei migliori libri introduttivi alla matematica, dal carattere divulgativo ma contenente vari teoremi con dimostrazioni vere e proprie che costituiscono dei primi esempi di "vera" matematica.

2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? La pagina de "I Mestieri dei Matematici"

`https://www.mestierideimatematici.it`

cerca di rispondere a questa domande, e magari vi stupirà!

Per chi non fosse ancora convinto, vi presento i risultati di un paio di indagini svolte a livello sia internazionale sia locale. In generale risulta che i laureati in matematica siano soddisfatti della scelta fatta e godano di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare:

- Secondo l'Occupational Information Network (sito patrocinato dal ministero del lavoro americano, vedi [3]) i matematici si meritano la medaglia d'argento per il lavoro in cui "si guadagna tanto e ci si stressa poco" (vedi [4]); infatti sia che lavorino nei centri di ricerca sia che prestino servizio nelle grandi aziende, la media salariale dei matematici è di 88mila euro all'anno, con un indice di stress di 57/100. Da considerare che sono indicati come lavori differenti gli statistici (5° posto, quindi comunque molto alto), i sistemisti (17°) e gli sviluppatori informatici (18°), tutti lavori accessibili dal CdL in matematica.

- I dati di Almalaurea (vedi [1], [6]) riportano che il tasso di occupazione dei laureati magistrali in matematica all'Università di Pisa a tre anni dalla laurea è del 93,9%.

- Sempre dal sito di Almalaurea [5] si possono trarre i seguenti dati che riguardano in particolare l'ateneo pisano, vedi [6]:
  - Fra i laureati magistrali in matematica a Pisa nel 2018, il 92,9% si iscriverebbe nuovamente allo stesso corso nello stesso ateneo.
  - In media il tempo necessario per completare la laurea triennale in matematica a Pisa è di 3,7 anni.
  - Il 98,2% di coloro che hanno conseguito la laurea triennale in matematica a Pisa nel 2018 desidera proseguire gli studi.

Da un paio di anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo nasce il progetto "Matematici al Lavoro", sul quale potete scoprire tutti i dettagli visitando la pagina web

`https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0`

3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge in diverse sedi in Italia (una è proprio Pisa) all'inizio di settembre.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (30 nell'anno 2019/2020), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i primi tre anni di studi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Per maggiori informazioni, visita `https://www.altamatematica.it`.

Bibliografia

[1] https://www2.almalaurea.it/cgi-php/universita/statistiche/framescheda.php?anno=2018&corstipo=LS&ateneo=tutti&facolta=tutti&gruppo=1&pa=tutti&classe=11045&postcorso=tutti&isstella=0&annolau=tutti&condocc=tutti&iscrls=tutti&disaggregazione=&LANG=it&CONFIG=occupazione

[2] http://scuola24.ilsole24ore.com/art/universita-e-ricerca/2017-08-18/-statistica-chimica-lauree-che-danno-lavoro-9-studenti-10-181043.php?uuid=AEBLghEC

[3] https://www.onetonline.org

[4] http://www.alleyoop.ilsole24ore.com/2017/10/25/ecco-24-lavori-perfetti-ad-alto-tasso-di-guadagno-e-a-basso-tasso-di-stress/

[5] https://www2.almalaurea.it

[6] https://www.dm.unipi.it/webnew/it/qualita/situazione-occupazionale-dei-laureati

[7] https://www.almalaurea.it/sites/almalaurea.it/files/comunicati/2019/rapporto_almalaurea2019_profilo_condizioneoccupazionale_0.pdf

[8] http://www.dm.unipi.it/webnew/sites/default/files/Reg_LT_1920.pdf

Il Lemma di Sperner e il Teorema di Monsky

di ***Luca Bruni***, *studente del Corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Pisa*

1 Introduzione

Cominciamo con l'enunciare un problema geometrico:

Problema 1. Suddividere un quadrato in un numero pari di triangoli di uguale area.

Una semplice soluzione del problema potrebbe essere la seguente: supponiamo di voler dividere il quadrato in $2n$ triangoli della stessa area; allora dividiamo i lati orizzontali del quadrato in n segmenti di lunghezza uguale, tracciamo gli n rettangoli individuati dai punti e suddividiamo ogni rettangolo in due triangoli mediante la diagonale.

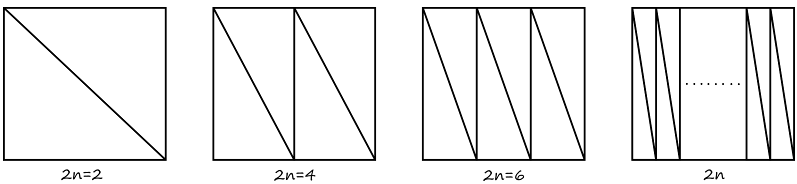


Figura 1: Suddivisione di un quadrato in un numero pari di triangoli con la stessa area.

Proviamo adesso a risolvere il seguente problema il cui enunciato è molto simile:

Problema 2. Suddividere un quadrato in un numero dispari di triangoli di uguale area.

Dopo alcuni tentativi ci rendiamo conto che il problema è notevolmente più complicato del precedente e sembra molto difficile trovarne una soluzione.

Il primo a pensare a questo problema fu, nel 1965, il matematico Fred Richman[1], il quale avrebbe voluto includere questo quesito nel testo di un esame, ma, non riuscendo a risolverlo e non trovando alcuna referenza al riguardo, decise invece di proporlo pubblicamente nella rivista *American Mathematical Monthly*[2]. Pur nella sua semplicissima formulazione, il problema rimase irrisolto per ben cinque anni: il primo a fornire una risposta al riguardo fu il matematico Paul Monsky[3] nel 1970. Il problema non ha soluzione: Monsky dimostrò l'impossibilità di suddividere un quadrato in un numero dispari di triangoli di ugual area combinando alcune tecniche combinatorie e algebriche. Quello che cercheremo di fare in questo articolo è ripercorrere la brillante dimostrazione di Monsky illustrandone i seguenti passi:

- Triangolazioni di poligoni, colorazioni e lemma di Sperner.

- Colorazione del piano cartesiano e in particolare del quadrato I di coordinate $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ con l'ausilio della *norma* 2*-adica*.

- L'"area" di un opportuno triangolo all'interno del quadrato è "troppo grande".

2 Il Lemma di Sperner

Lo scopo di questa sezione è enunciare e dimostrare il Lemma di Sperner e dare qualche informazione sulle sue applicazioni; anche se a prima vista sembra solamente un fatto curioso, esistono risultati matematici (e non solo) di notevole interesse basati su questo simpatico lemma.

---

[1] Fred Richman, matematico americano, ha ricoperto il ruolo di docente presso la "New Mexico State University" e in seguito presso la "Florida Atlantic University".

[2] Rivista di matematica fondata da Benjamin Finkel nel 1894. Attualmente viene pubblicata 10 volte all'anno dalla Mathematical Association of America. Contiene numerosi articoli di ampio interesse rivolti a tutta la comunità matematica.

[3] Paul Monsky, nato il 17 giugno 1936. Matematico americano, ha ricoperto il ruolo di docente alla "Brandeis University" presso Boston, Massachusetts.

2.1 Il Lemma di Sperner

Cominciamo con qualche definizione introduttiva; d'ora in avanti assumeremo sempre che i poligoni siano *semplici*, ovvero che i lati del poligono non si intersechino tra di loro.

Dato un poligono P una *triangolazione di* P è una suddivisione di P in un numero finito di triangoli in modo che ogni due triangoli della suddivisione si intersechino o esattamente in un lato o esattamente in un vertice.

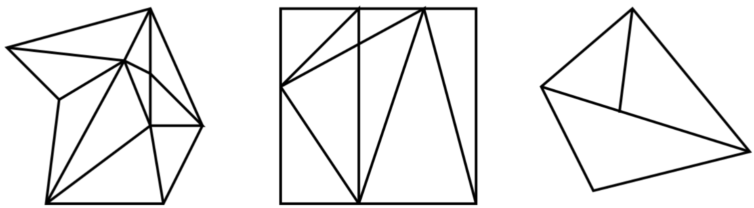


Figura 2: Le prime due figure da sinistra sono esempi di triangolazioni. La terza figura **non** è una triangolazione.

Una triangolazione è detta *colorata* se ogni vertice della triangolazione è colorato con il numero 1, 2 o 3; in questo caso chiameremo un lato della triangolazione 12-*lato*, 23-*lato* o 31-*lato* se i vertici del lato che stiamo considerando sono colorati rispettivamente di (1-2), (2-3), (3-1). Infine, data una triangolazione, diremo che un triangolo è *completo* se ha tutti i vertici di colore diverso (si veda la Figura 3).

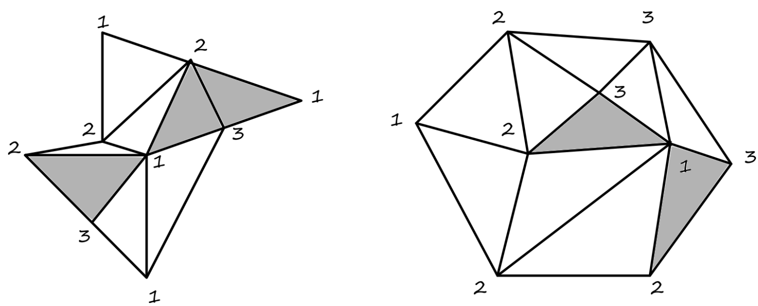


Figura 3: Esempi di colorazioni e di triangoli completi (in grigio).

Dopo queste piccole nozioni preliminari siamo pronti per enunciare il lemma di Sperner:

Lemma 1 (Sperner, 1928)**.** *Sia P un poligono e sia data una sua triangolazione colorata. Allora il numero di triangoli completi ha la stessa parità del numero di 12-lati sul bordo del poligono.*

Prima di inoltrarci nella dimostrazione vera e propria osserviamo questa curiosa conseguenza: se nella triangolazione colorata c'è un numero dispari di 12-lati nel bordo, allora **c'è almeno un triangolo completo**. Pertanto nelle tre figure qui sotto, anche se non conosciamo come sono colorati i vertici centrali, siamo comunque certi di trovare da qualche parte un triangolo completo!

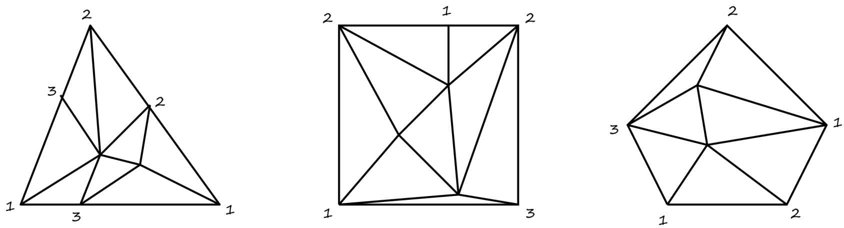


Figura 4: In qualsiasi modo completiamo la colorazione dei poligoni in figura, siamo sicuri che ci sarà almeno un triangolo completo.

Dimostrazione. Si tratta di un doppio conteggio: mettiamo un punto da ogni parte di un 12-segmento (si veda la Figura 5). Quello che vogliamo fare è contare il numero di punti nella parte interna del triangolo e mostrare che la sua parità è uguale sia a quella del numero dei triangoli completi, sia a quella del numero di 12-lati sul bordo. Notiamo che ogni segmento che **non** si trova sul bordo del poligono contribuisce o per 0 punti (se non è un 12-lato) o per 2 punti (se è un 12-lato); invece un segmento che si trova sul bordo contribuisce per 0 punti o per 1 punto a seconda che non sia un 12-lato o che lo sia. Abbiamo in pratica dimostrato che *il numero di punti nell'interno del poligono ha la stessa parità del numero di 12-lati che si trova sul bordo*. Adesso contiamo il numero di punti che si trova all'interno di ogni triangolo della triangolazione. I triangoli completi hanno per costruzione un solo 12-lato e di conseguenza al loro interno avranno soltanto un punto. Un qualsiasi altro triangolo della triangolazione, invece, avrà un numero pari di punti al proprio interno come si può facilmente osservare considerando i pochi casi possibili (si veda anche la Figura 5).

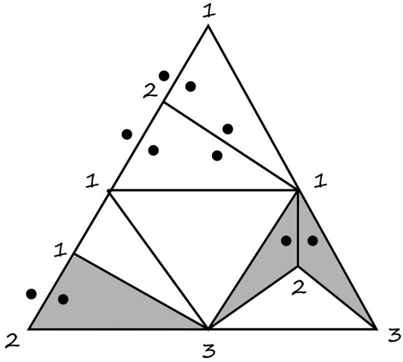


Figura 5: Il procedimento dimostrativo di double-counting nel caso di un triangolo.

Ma allora abbiamo anche mostrato che *il numero di triangoli completi ha la stessa parità nel numero di punti interni del poligono*. Combinando l'informazione appena trovata con quella precedente si ottiene la tesi. □

Basandoci sulla dimostrazione del Lemma di Sperner, è possibile fornire il seguente metodo per "scovare" dove sono i triangoli completi nel caso in cui questi siano in numero dispari: prendiamo un poligono qualunque e facciamone una triangolazione. Coloriamo i vertici in modo che ci sia un numero dispari di 12-lati sul bordo. Grazie all'osservazione fatta sopra siamo sicuri che da qualche parte ci sia un triangolo completo. Immaginiamoci che i triangoli della triangolazione siano isole e costruiamo un *ponte* tra due isole se e solo se il lato che le separa è un 12-lato. Allo stesso modo costruiamo un ponte tra un'isola e l'esterno del poligono se e solo se il lato che li separa è un 12-lato. Se adesso proviamo a percorrere i sentieri formati dai ponti che partono dall'esterno del poligono siamo sicuri di trovare almeno un triangolo completo (lasciamo al lettore il piacere di spiegare perché questo accada).

Prima di andare oltre, vogliamo soffermarci su un altro fatto che sarà cruciale nella dimostrazione del teorema di Monsky: grazie al seguente risultato (e a una opportuna colorazione che vedremo nella prossima sezione) saremo infatti in grado di utilizzare il Lemma di Sperner su una generica triangolazione del quadrato I del piano cartesiano trovando al suo interno un triangolo completo. Anche in questo caso, la dimostrazione è dovuta a Sperner ed è interpretabile come una versione uno-dimensionale del lemma che abbiamo già analizzato.

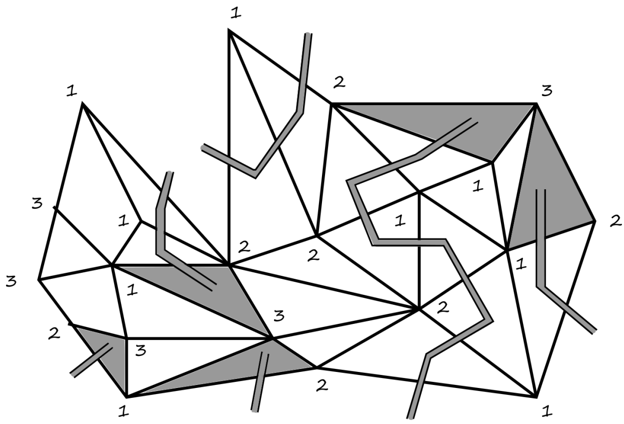


Figura 6: Il metodo dei *ponti* per la ricerca dei triangoli completi.

Lemma 2 (Lemma di Sperner unidimensionale)**.** *Sia S un 12-segmento. Suddividiamo S in lati più piccoli colorando i vertici della suddivisione con i colori 1 e 2; allora il numero di 12-lati della suddivisione è dispari.*

Dimostrazione. Si può mostrare questo risultato per induzione sul numero di punti della suddivisione: se il segmento è suddiviso da 0 punti, allora ho esattamente un 12-lato (coincide con S stesso) e dunque la tesi è vera. Supponiamo adesso che la tesi sia vera per ogni suddivisione di n punti e mostriamo che è vera per una di $n+1$. Qualsiasi suddivisione con $n+1$ punti possiamo ottenerla da una suddivisione con n punti aggiungendone semplicemente uno da qualche parte. Analizziamo cosa succede alla parità nei vari casi (si veda la Figura 7):

- *Aggiungiamo un punto di colore 1 tra due di colore 1:* si formano due 11-segmenti e si cancella un 11-lato e dunque il numero di 12-lati non cambia.

- *Aggiungiamo un punto di colore 2 tra due punti di colore 2:* analogo al precedente.

- *Aggiungiamo un punto di colore 1 tra due di colore 2 (o viceversa):* si formano due 12-lati e si cancella un 11-lato. Dunque non si altera la parità del numero degli 12-lati.

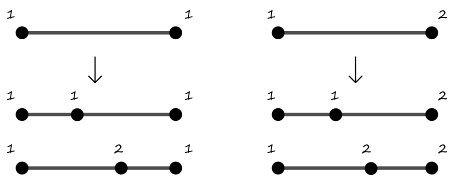


Figura 7: I possibili scenari sopo aver aggiunto un punto alla suddivisione.

- *Aggiungiamo un punto di colore* 1 *tra uno di colore* 1 *e uno di colore* 2 *(o viceversa):* si forma un 12-lato e un 11-lato e si cancella un 12-lato. Dunque il numero di 12-lati non cambia.

Dunque aggiungendo un punto colorato la parità non cambia e possiamo concludere grazie all'ipotesi induttiva. □

2.2 Possibili applicazioni

Il risultato enunciato è soltanto la versione bidimensionale del lemma, ma esistono delle generalizzazioni nel caso multidimensionale[4].

Anche se a prima vista sembra solamente un bizzarro risultato, si può dimostrare che il lemma di Sperner è equivalente a un importante risultato di topologia algebrica noto come *Teorema del punto fisso di Brouwer*[5].

Oltre che nell'applicazione che vedremo di seguito, il lemma di Sperner è stato utilizzato anche per implementare alcuni algoritmi per il calcolo di *zeri di funzioni*[6]. Ma non solo: lo si usa anche per la risoluzione di alcuni problemi di *"divisione equa delle risorse"*. Supponiamo che le nostre risorse siano modellizzate da una torta; quello che vogliamo fare è suddividere la torta in tanti pezzi quante sono le persone tra cui vogliamo distribuire le risorse e che ogni persona ritenga che il proprio pezzo sia "migliore" (in base alle proprie valutazioni) di quello di tutti gli altri. Grazie al lemma di Sperner sono stati implementati dei metodi per risolvere questo problema[7].

Un'ultima applicazione è in ambito economico: si può utilizzare tale risultato per trovare situazioni di *"equilibrio"* in transazioni finanziarie.

[4] Wikipedia, Sperner's Lemma.
[5] Wikipedia, Brouwer fixed-point theorem.
[6] Wikipedia, Simmons-Su protocols.
[7] Wikipedia, Competitive equilibrium.

3 Coloriamo il piano

Scopo di questa sezione è riuscire a colorare tutto il piano cartesiano in modo accorto per applicare il lemma di Sperner al quadrato $I = [0,1] \times [0,1]$. Per farlo abbiamo bisogno questa volta di qualche risultato algebrico:

3.1 La norma 2-adica

La prima cosa che facciamo è dire che cosa sia la norma 2-adica per l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Sia $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Osserviamo che è possibile scrivere x in modo unico come $x = 2^n \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{N}$ e $b, n \in \mathbb{Z}$ tali che a, b siano primi tra loro e non divisibili per 2. Definiamo la *valutazione* 2*-adica di* x come

$$v_2(x) = v_2\left(2^n \frac{a}{b}\right) = n.$$

Se $x = 0$ poniamo $v_2(0) = \infty$. Definiamo inoltre la *norma* 2*-adica di* x come:

$$|x|_2 = 2^{-v_2(x)}$$

Nel caso in cui $x = 0$ poniamo $|x|_2 = 0$.

La definizione sembra molto astratta, ma facciamo alcuni esempi per capire meglio cosa succede:

$$\left|\frac{37}{12}\right|_2 = 2^{-v_2(2^{-2}\frac{37}{3})} = 2^2 = 4$$
$$\left|\frac{3}{5}\right|_2 = 2^{-v_2(2^{0}\frac{3}{39})} = 2^{-0} = 1$$
$$|1024|_2 = 2^{-v_2(2^{10}\cdot 1)} = 2^{-10} = \frac{1}{1024}$$

Facciamo inoltre un'osservazione cruciale che ci servirà più avanti: *la norma* 2*-adica di un qualsiasi numero intero dispari* d *è uguale a* 1. Infatti un numero intero dispari è della forma $2^0 \frac{d}{1}$ e dunque la sua norma 2-adica vale 1.

La norma 2-adica gode di alcune proprietà algebriche interessanti; ne vediamo alcune che saranno utili più avanti:

1. $|x|_2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $|0|_2 = 0$.
   Infatti la norma 2-adica è una potenza di 2 e dunque sempre maggiore di zero. Il fatto che $|0|_2 = 0$ segue direttamente dalle definizioni.

2. $|x|_2|y|_2 = |xy|_2$.
   Infatti siano $x = 2^n \dfrac{a}{b}$ e $y = 2^m \dfrac{a'}{b'}$ con a, b, a', b' come sopra, allora, poiché $xy = 2^{n+m}\dfrac{aa'}{bb'}$,
   $$|xy|_2 = 2^{-v_2(xy)} = 2^{-(n+m)} = 2^{-n} \cdot 2^{-m} = 2^{-v_2(x)}2^{-v_2(y)} = |x|_2|y|_2.$$

3. $|x + y|_2 \leq \max\{|x|_2, |y|_2\}$. Inoltre se $|x|_2 < |y|_2$ allora $|x + y|_2 = |y|_2$.
   Infatti siano $x = 2^n \dfrac{a}{b}$ e $y = 2^m \dfrac{a'}{b'}$, allora $x + y = 2^n \big(\dfrac{a}{b} + 2^{m-n}\dfrac{a'}{b'}\big)$. Dato che stiamo supponendo $n \leq m$, allora la quantità tra parentesi può contenere fattori 2 solo al numeratore. Di conseguenza,
   $$|x + y|_2 = 2^{-v_2(x+y)} \leq 2^{-n} = \max\{|x|_2, |y|_2\}.$$
   In particolare se vale la disuguaglianza stretta tra le norme, allora il minore uguale diventa un uguale e si ha la tesi.

Concludiamo facendo notare che le proprietà dimostrate possono essere enunciate in un ambito molto più generale: il numero primo 2 non ha nessuna caratteristica speciale rispetto agli altri primi p in questo contesto; è infatti possibile definire una valutazione e una norma p-adica nel medesimo modo e le proprietà sarebbero comunque verificate.

3.2 Il teorema di Chevalley

Come già annunciato più volte, il nostro scopo è colorare il piano: lo vogliamo fare mediante la norma 2-adica delle coordinate dei punti del piano. Sorge però un problema: abbiamo definito la norma solamente sui punti del piano che hanno entrambe coordinate le razionali; quello che vorremmo fare è estendere tale valutazione a tutti i punti con coordinate reali e vorremmo che tale estensione continuasse a verificare le proprietà $(1), (2), (3)$. In alcuni casi questa estensione è naturale: se vogliamo definire $|\sqrt{2}|_2$ osserviamo che deve valere che $|\sqrt{2}|_2|\sqrt{2}|_2 = |2|_2 = \frac{1}{2}$; ne ricaviamo che $|\sqrt{2}|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Con questo semplice sistema possiamo estendere la norma 2-adica a tutte le radici, ma come ben sappiamo i numeri reali non sono solamente radici; come facciamo dunque ad estendere la norma 2-adica a numeri come π? Per fare questo ci viene in aiuto un importante teorema dovuto al matematico Claude Chevalley[8]. Enunciare e dimostrare il teorema nella sua forma generale necessita di strumenti matematici piuttosto avanzanti e pertanto enunciamo, senza dimostrarlo, soltanto il corollario di cui abbiamo bisogno:

Teorema 1 (Chevalley)**.** *E' possibile estendere la norma 2-adica definita sui numeri razionali a tutti i numeri reali $\mathbb{R}$ in modo che le proprietà $(1), (2), (3)$ siano ancora verificate.*

3.3 La colorazione

Grazie alla norma 2-adica siamo finalmente pronti a colorare tutto il piano. Prendiamo un'estensione della norma 2-adica a tutti i numeri reali e partizioniamo il piano in 3 parti che coloriamo rispettivamente di 1, 2 e 3:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x, y) \ : |x|_2 < 1, |y|_2 < 1\} \\ S_2 &:= \{(x, y) \ : |x|_2 \geq 1, |x|_2 \geq |y|_2\} \\ S_3 &:= \{(x, y) \ : |y|_2 \geq 1, |y|_2 > |x|_2\} \end{aligned}$$

Il quadrato che vogliamo analizzare è $I = [0, 1] \times [0, 1]$ che ha vertici nei punti $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (1, 1), D = (0, 1)$; cominciamo col chiederci di che colore sono questi punti; come già osservato $|0|_2 = 0$ e $|1|_2 = 1$ e dunque otteniamo:

$$\begin{aligned} A &= (0, 0) \in S_1 & \qquad B &= (1, 0) \in S_2 \\ C &= (1, 1) \in S_2 & \qquad D &= (0, 1) \in S_3 \end{aligned}$$

Osserviamo che è impossibile realizzare un immagine raffigurante la colorazione in quanto la norma 2-adica si comporta in maniera strana rispetto al numero di cui stiamo facendo la norma: un numero molto grande come 2^{100} ha infatti una norma 2-adica molto piccola e, viceversa, ci sono numeri molto piccoli con norma 2-adica molto grande. Quello che vogliamo fare è però capire di che colore potrebbero essere i punti che stanno nei vari lati del quadrato. I punti del lato $\overline{AB}$ sono caratterizzati dal fatto che la coordinata y è uguale a 0; di conseguenza $|y|_2 = 0$ e dunque sicuramente tali punti **non** possono stare in S_3. Dunque il lato $\overline{AB}$ è formato solo

[8] Claude Chevalley, 11 febbraio 1909 – 28 giugno 1984. Matematico francese; diede importanti contributi alla teoria dei numeri, alla geometria algebrica, alla teoria dei campi di classi, alla teoria dei gruppi finiti e alla teoria dei gruppi algebrici.

da punti di colore 1 o 2. Con ragionamenti del tutto analoghi si osserva facilmente che:

Segmento	Colori possibili
AB	1 o 2
BC	2 o 3
CD	2 o 3
DA	3 o 1

Prima di inoltrarci nella dimostrazione vera e propria del teorema di Monsky, abbiamo bisogno di qualche altra proprietà della colorazione che abbiamo creato. In particolare vogliamo trovare una stima della norma 2-adica dell'area di un triangolo completo nel piano colorato. Per cominciare osserviamo che la colorazione 2-adica è invariante per traslazione rispetto a punti di colore 1 (cioè il colore di un punto non cambia se lo traslo per un vettore che identifica un punto di colore 1). La dimostrazione di questo fatto segue dalle proprietà della norma 2-adica che abbiamo già mostrato: sia $(a, b) \in S_1$, allora $|a|_2 = |-a|_2 < 1$ e $|b|_2 = |-b|_2 < 1$. Verifichiamo ora che se $(x, y) \in S_i$, allora $(x - a, y - b) \in S_i$.

$i = 1$) Per ipotesi $|x|_2 < 1$ e $|y|_2 < 1$. Allora $|x - a|_2 = |x + (-a)|_2$ è uguale alla norma maggiore fra $|x|_2$ e $|a|_2$ per le proprietà della norma. In ogni caso $|x - a|_2 < 1$. In maniera analoga si mostra $|y - b|_2 < 1$.

$i = 2$) Per ipotesi $|x|_2 \geq 1$ e $|x|_2 \geq |y|_2$. Allora $|x|_2 > |a|_2$ e dunque $|x + (-a)|_2 = |x|_2 \geq 1$. Inoltre $|y + (-b)|_2$ è uguale o a $|y|_2$ o a $|b|_2$; dunque in ogni caso $|x - a|_2 \geq |y - b|_2$.

$i = 3$) Per ipotesi $|y|_2 \geq 1$ e $|y|_2 > |x|_2$. Allora $|y|_2 > |b|_2$ e dunque $|y + (-b)|_2 = |y|_2 \geq 1$. Inoltre $|x + (-a)|_2$ è uguale o a $|x|_2$ o a $|a|_2$; dunque in ogni caso $|y - b|_2 > |x - a|_2$.

Un altro utile fatto di cui abbiamo bisogno è che l'area di un triangolo nel piano cartesiano con un vertice nell'origine si calcola con una comoda formula a partire dalle coordinate dei 3 punti: sia T un triangolo nel piano cartesiano con vertici $O = (0, 0)$, $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$, allora:

$$Area(T) = \frac{1}{2}|x_P y_Q - x_Q y_P|.$$

Per convincercene osserviamo il disegno in Figura 8 (a meno di rinominare i punti possiamo supporre di avere proprio questa rappresentazione).

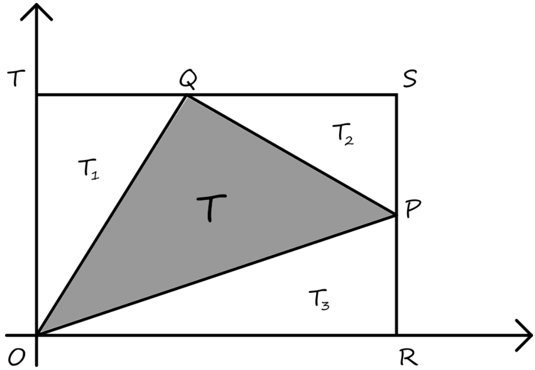


Figura 8: Area del triangolo nel piano cartesiano

Possiamo calcolare l'area del triangolo OPQ come differenza tra l'area del rettangolo $ORST$ e l'area dei triangoli rettangoli T_1, T_2, T_3:

$$Area(T) = Area(ORST) - Area(T_1) - Area(T_2) - Area(T_3) =$$

$$= x_P y_Q - \frac{1}{2}(x_Q y_Q + (y_Q - y_P)(x_P - x_Q) + x_P y_P) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_P y_Q - x_Q y_P).$$

4 Il teorema di Monsky

4.1 Il teorema

Prima di arrivare al teorema vero e proprio osserviamo quest'ultimo interessante fatto preliminare:

Proposizione 1. *Sia T un triangolo completo in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla colorazione 2-adica. Allora $|Area(T)|_2 > 1$.*

Dimostrazione. Grazie al fatto che la colorazione è invariante per traslazione rispetto ai punti di colore 1, possiamo supporre che il triangolo T abbia il vertice di colore 1 nell'origine, P di colore 2 e Q di colore 3 (o viceversa: dato che prendiamo il valore assoluto il risultato non cambierà). Per la formula dell'area che abbiamo ricavato si ha che $Area(T) = \frac{1}{2}|x_P y_Q - x_Q y_P|$. Passando dunque alla norma 2-adica si ha:

$$|Area(T)|_2 = \left|\frac{1}{2}\right|_2 |x_P y_Q - x_Q y_P|_2 = 2|x_P y_Q + (-x_Q y_P)|_2 =$$
$$= 2|x_P y_Q|_2 = 2|x_P|_2|y_Q|_2 \geq 2 > 1$$

Nel passaggio dalla prima alla seconda riga abbiamo usato il fatto che, per la colorazione, $|x_P|_2 \geq |y_P|_2$ e $|y_Q|_2 > |x_Q|_2$ e dunque $|x_P y_Q|_2 > |x_Q y_P|_2$. □

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per poter dimostrare che il problema posto all'inizio dell'articolo non ha effettivamente soluzione:

Teorema 2 (Monsky, 1970)**.** *Sia S un quadrato; è possibile triangolare S in m triangoli di area uguale se e solo se m è pari.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che se m è pari, allora è possibile suddividere il quadrato.

Viceversa senza perdita di generalità possiamo assumere che il nostro quadrato sia il effettivamente il quadrato I già considerato nel piano cartesiano. A questo punto supponiamo di avere una suddivisione del quadrato in m triangoli di uguale area con m dispari: vogliamo trovare un assurdo. Coloriamo i vertici della triangolazione mediante la colorazione 2-adica del piano. Come già osservato nel paragrafo 3.3, gli unici 12-lati nel bordo della triangolazione si possono trovare nel lato $\overline{AB}$: dato che $\overline{AB}$ ha i vertici colorati in modo diverso, per il lemma di Sperner unidimensionale sappiamo che c'è un numero dispari di 12-lati su $\overline{AB}$ e dunque su tutto il bordo. Dunque per il lemma di Sperner applicato al quadrato sappiamo che deve esistere almeno un triangolo completo nella triangolazione scelta! Chiamiamo T tale triangolo.

Adesso l'area totale del quadrato sarà pari a $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 1 \cdot 1 = 1 = m \cdot Area(T)$ in quanto ogni triangolo ha area uguale a quella di T per ipotesi. Ma passando alla norma 2-adica ($|m|_2 = 1$ poiché m è dispari) si ottiene:

$$1 = |1|_2 = |m \cdot Area(T)|_2 = |m|_2 |Area(T)|_2 > 1$$

che è assurdo. □

4.2 Un piccolo problema

Il lettore più attento avrà notato che, in quanto sopra esposto, abbiamo considerato solamente le triangolazioni e non le *suddivisioni*; in particolare abbiamo considerato non valide le suddivisioni come in Figura 9.

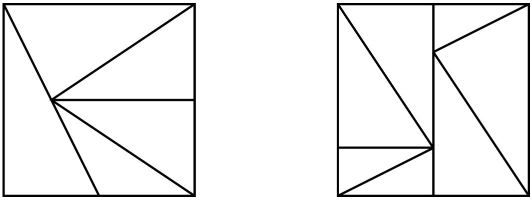


Figura 9: Suddivisioni di un quadrato.

L'argomento che abbiamo utilizzato si può generalizzare anche a queste situazioni, ma la dimostrazione risulta essere un po' più tecnica. Lasciamo ai più temerari una traccia di quello che dobbiamo dimostrare:

1. Ogni retta nel piano colorato non interseca una tra le 3 regioni S_1, S_2, S_3;
2. In una qualsiasi suddivisione in triangoli del quadrato I, esiste sempre un triangolo completo;
3. Conclusione come nel teorema di Monsky.

Per quanto riguarda il punto 1 si tratta di giocare con le proprietà della norma 2-adica; il punto 2 è quello un po' più delicato: data una suddivisione, si deve spezzare il quadrato in più poligoni semplici (in maniera opportuna grazie al punto 1) in cui è possibile applicare il lemma di Sperner; a quel punto, con un argomento di parità simile a quelli già visti, si può concludere che esiste un triangolo colorato.

Bibliografia

[1] F. Su, *Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division*, The American Mathematical Monthly, Vol. 106, (1999), 930–942.

[2] P. Monsky, *On Dividing a Square into Triangles*, The American Mathematical Monthly, Vol. 77, No. 2, (1970), 161–164.

[3] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Fifth Edition, Springer, 2014, 151–158.

Peg solitaire, il solitario della Bastiglia

di ***Francesca Pistolato***, *studentessa del Corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Pisa*

Immaginate di essere incarcerati per un lungo periodo di tempo senza poter parlare né vedere nessuno. Cosa fareste? Sicuramente inventereste un avvincente gioco solitario per ammazzare la noia e le lunghe ore di prigionia!

Questa è la presunta origine del Peg solitaire, o solitario della Bastiglia, attribuito ad un prigioniero del famoso carcere nel XVII secolo. Per giocare serve una scacchiera a forma di croce con 33 buche e 32 pedine.

Figura 1: Questa è la configurazione iniziale del gioco. Osserviamo che tutte le posizioni sono occupate da pedine, tranne quella centrale. Lo scopo del gioco è ribaltare la situazione, ovvero eliminare dalla scacchiera tutte le pedine tranne una che andrà collocata nel buco centrale.

L'unica mossa consentita è muovere orizzontalmente o verticalmente (non in diagonale) una pedina dalla sua posizione in un buco libero posto immediatamente oltre una pedina adiacente, saltandola. Tale pedina verrà eliminata dal gioco e considerata "mangiata". Come nella dama, è possibile mangiare in successione più di una pedina e considerare questa sequenza di mosse come una sola mossa.

Oltre alla configurazione descritta in Figura 1, ci sono molte altre varianti di gioco, tante quante le coppie di configurazioni iniziale e finale che riusciamo a immaginare! In ogni variante lo scopo è produrre una sequenza di mosse che colleghi le due configurazioni. Può anche succedere che alcune di queste varianti non abbiano soluzione...

	a	b	c	d	e	f	g
1			c1	d1	e1		
2			c2	d2	e2		
3	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3
4	a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4
5	a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5
6			c6	d6	e6		
7			c7	d7	e7		

Figura 2: Ogni posizione sulla scacchiera è univocamente determinata dall'indice di riga, un numero da 1 a 7, e dall'indice di colonna, una lettera da *a* a *g*.

Ci riferiremo alle posizioni sulla scacchiera come nella Figura 2. Osserviamo che una pedina può compiere solo mosse di lunghezza 2, pertanto per tutta la durata della partita occuperà righe sempre pari o sempre dispari e colonne *a*, *c*, *e*, *g*, oppure *b*, *d*, *f*. Possiamo perciò dividere le pedine in 4 classi, in base alla posizione che occupano all'inizio del gioco: le 5 pedine mediane, ovvero le uniche che possono arrivare ad essere posizionate in d4 (sono le pedine inizialmente posizionate in b4, f4, d2, d6); le 12 pedine angolari, in prossimità degli angoli della scacchiera, ovvero c1, e1, e3, g3, g5, e5, e7, c7, c5, a5, a3, c3; le restanti 16 pedine laterali. Fra queste ultime dobbiamo fare una distinzione fra quelle poste sopra o sotto le pedine angolari (le chiameremo di tipo t), cioè c2, e2, a4, c4, e4, g4, c6, e6, e quelle poste a destra o sinistra (di tipo s), ovvero d1, b3, d3, f3, b5, d5, f5, d7.

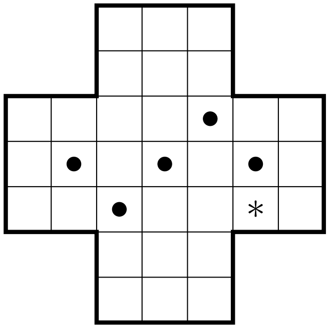


Figura 3: Dalla configurazione in figura, muovendo solo la pedina ∗, è possibile concludere il gioco con una sola pedina in posizione b3, ma anche finire in una situazione di stallo, se si fa una mossa sbagliata!

Vi sono due rischi in cui un giocatore alle prime armi può incorrere. Il primo è quello accennato in Figura 3, ovvero una situazione in cui non vi sono più mosse ammissibili. Un secondo rischio è quello di mangiare tutte le pedine mediane prima di essere riusciti a portarne una in posizione centrale, dopo aver mangiato tutte le altre. A questo punto non sarà più possibile vincere! Un rischio simile è quello di restare con le pedine angolari "bloccate", ovvero prive di pedine laterali adiacenti da poter saltare. Con questi soli suggerimenti riuscite a vincere? Riuscite inoltre a dare una stima sul numero di mosse necessarie?

La strategia del "palo"

Il gioco che vi abbiamo presentato è anche noto come "d4-complement", dal momento che la configurazione vincente è quella con una sola pedina in posizione d4 e quella iniziale è il complementare, ovvero la scacchiera piena con la sola posizione d4 libera. A meno di simmetrie, ogni casella della scacchiera offre una variante diversa di questo solitario. Tuttavia, queste varianti hanno una strategia risolutiva comune, che è quella del "palo".

Supponiamo di star giocando a c3-complement, allora:

1. si decide a priori la pedina che alla fine del gioco si troverà nella posizione c3;

2. la pedina prescelta resterà ferma, a "fare il palo", fino alla fine della partita, cioè il momento in cui mangerà una dopo l'altra tutte le pedine rimaste in una sola mossa.

Questa seconda fase è ottima se giochiamo con un secondo obiettivo oltre alla vittoria, cioè minimizzare il numero di mosse con cui vincere.

Che cosa fare se vogliamo attuare questa strategia? Come prima cosa vanno risolti due problemi: il primo è scegliere il palo, il secondo è la fase preparatoria all'azione del palo, cioè arrivare alla configurazione in cui il palo può muoversi e portarci alla vittoria in una sola mossa. Quello su cui vogliamo soffermarci è il primo problema. Quali sono le caratteristiche di un buon palo? Deve essere della stessa classe della pedina vacante: mediana, angolare, una delle due laterali. Inoltre, se vogliamo anche cercare di minimizzare il numero di mosse con cui arrivare alla vittoria, è utile studiare il cammino finale della pedina e far sì che sia il più lungo possibile, così da eliminare con una sola mossa molte altre pedine. Osserviamo che se il palo si trova a esattamente due posizioni di distanza dall'unica posizione libera all'inizio della partita, allora il suo cammino finale potrebbe essere composto da un solo salto!

Cominciamo con una serie di osservazioni sulla lunghezza dei cammini delle pedine. Per vedere meglio cosa sta succedendo guardate la Figura 4.

Preliminarmente osserviamo che la lunghezza di un cammino di una pedina mediana o angolare è al più pari alla somma delle pedine laterali presenti sulla scacchiera, e viceversa. Questo è vero poiché una pedina può muovere solo se una casella adiacente è occupata.

Guardiamo ancora la Figura 4. Consideriamo il caso in cui la pedina in c1 deve muovere mangiando il maggior numero possibile di pedine t senza mangiare nessuna s. In tal caso la pedina è obbligata a restare nella colonna *c*, dal momento che mangiare una pedina s comporterebbe spostarsi nella colonna *a* o *e*. Nel caso in cui volessimo rimuovere solo una s, per lo stesso motivo la pedina sarebbe bloccata nella colonna *a* o nella colonna *e*. Iterando il ragionamento, concludiamo che mangiare un numero pari di pedine s comporta uno spostamento di $4n$ colonne (per qualche $n = 0, 1, 2, \ldots$); mentre se il numero è dispari si ha uno spostamento di $4n + 2$ colonne. Lo stesso vale se volessimo mangiare un numero pari o dispari di pedine t. Quello che possiamo concludere è che, una volta fissate la casella di partenza e la casella di arrivo, la parità o la disparità elle pedine di tipo s o t mangiate non dipende dal cammino percorso. Questo

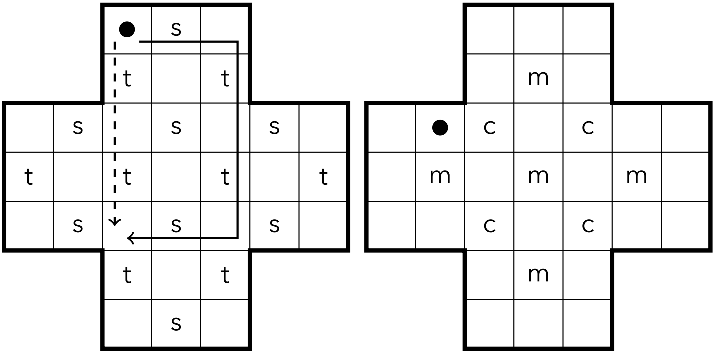


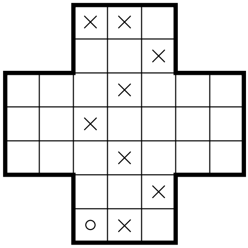
Figura 4: In figura sono indicate alcune posizioni della scacchiera in base al tipo di pedine che le possono occupare: se sono mediane con la lettera m, se angolari con la lettera c e con la lettera s o t per quelle laterali. Osserviamo che pedine mediane e angolari sono adiacenti solo a pedine laterali e viceversa. Osserviamo anche che per spostare una pedina da c1 a c5 è necessario mangiare un numero pari di pedine t e pari di tipo s.

continua a valere se con una pedina in posizione b3 vogliamo mangiare un numero pari di pedine mediane o angolari.

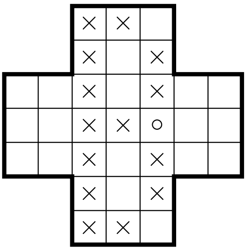
Applichiamo questo ragionamento alla variante c1-complement. Dal momento che vogliamo concludere il gioco con una pedina vicino ad un angolo, gli unici candidati per fare il palo sono le 11 pedine angolari presenti sulla scacchiera all'inizio del gioco. Dei pali "banali", ovvero che risolverebbero il gioco con un solo salto, sono e1 e c1. Studiamo meglio la situazione in cui il palo è e1. Per quanto osservato sopra sull'invarianza della disparità e parità del numero di pedine laterali di tipo s o t mangiate, sappiamo che ogni altro cammino finale della pedina in e1 che fa il palo sarà composto da un numero pari di salti per magiare pedine di tipo t e un numero dispari di salti in cui mangiamo pedine di tipo s. Avrà pertanto lunghezza dispari. Con queste informazioni, cerchiamo di dare una stima sulla lunghezza del cammino finale del palo. Nella fase preparatoria, affinché e1 possa muoversi dobbiamo aver liberato le altre 7 posizioni angolari (le uniche ammissibili per una pedina angolare) e questo comporta aver mangiato altrettante pedine in posizione laterale. Dal momento che la prima mossa è obbligatoriamente c3-c1, viene mangiata un'ulteriore pedina laterale. Pertanto le pedine laterali rimaste alla fine della fase preparatoria sono al più 8. Dato che la lunghezza deve essere dispari, possiamo concludere che il cammino finale del palo sarà al massimo lungo 7. Riuscite a creare una configurazione di gioco in cui questo accade davvero?

Alcuni quesiti

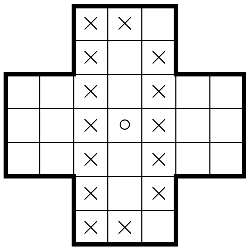
Concludiamo proponendovi tre piccoli schemi. Lo scopo è mangiare tutte le pedine $\times$ fino ad averne una sola in posizione $\circ$.



(a) Serpente.



(b) Lettera B.



(c) Lettera D.

Bibliografia

[1] John D. Beasley, *The Ins and Outs of Peg Solitaire*, Recreations in Mathematics.

I problemi del giornalino

una rubrica a cura di ***Davide Lombardo****,*
ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

Mandateci le vostre soluzioni all'indirizzo `LezioniAperteMatematica@gmail.com`

1 Divertissement

1.1 Vladimir e Arnold

Vladimir e Arnold partono contemporaneamente, al sorgere del sole, dalle loro rispettive abitazioni, poste nei punti A e B. Entrambi camminano a velocità costante (ma diversa per i due protagonisti) per tutto il giorno, lungo la medesima strada, l'uno da A a B, e l'altro da B ad A. A mezzogiorno in punto si incrociano, si salutano, e continuano per la loro strada senza mai fermarsi né cambiare velocità. Vladimir arriva a destinazione, ovvero al punto B, alle 4 di pomeriggio, mentre Arnold, più lento, raggiunge A alle 9 di sera. A che ora è sorto il sole?

Nota. Vuole la tradizione che il grande matematico Vladimir Igorevič Arnol'd abbia risolto questo problema all'età di 12 anni, e ne sia rimasto talmente impressionato da citarlo spesso come uno dei suoi problemi preferiti. Arnol'd impiegò un'intera giornata a risolverlo, quindi non demoralizzatevi se impiegate qualche tempo!

1.2 Un esagono speciale

Esiste un esagono con tutti gli angoli uguali e lati di lunghezze 1, 2, 3, 4, 5, 6 (non necessariamente in quest'ordine)?

1.3 16 cifre e un quadrato

Sia n un numero intero positivo di almeno 16 cifre (in base 10). Dimostrare che possiamo scegliere un insieme di una o più cifre consecutive il cui prodotto è un quadrato perfetto (ovvero il quadrato di un numero intero).

1.4 Se 100 cerchi non bastano, prova con 400

Un rettangolo R nel piano contiene 100 cerchi di raggio 1, a due a due disgiunti, con la proprietà che non è possibile disegnare un ulteriore cerchio con centro contenuto nel rettangolo e disgiunto da quelli già presenti. Dimostrare che è possibile disegnare 100 cerchi di raggio 2, non necessariamente disgiunti, che coprano completamente la superficie del rettangolo. Dimostrare anche che è possibile ricoprire il rettangolo con 400 cerchi di raggio 1 (non disgiunti).

2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

2.1 Origami

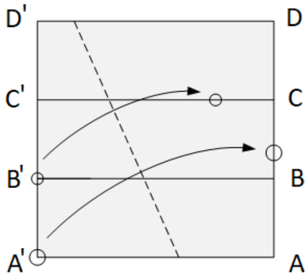
Potreste aver sentito dire che i tre problemi classici dell'antichità – quadratura del cerchio, trisezione dell'angolo e duplicazione del cubo – sono irresolubili usando solo riga e compasso. Quello che è molto meno noto è che due di questi tre problemi (trisezione dell'angolo e duplicazione del cubo) sono risolubili... con gli origami! Per esempio, supponiamo di avere un cubo di lato 1, e di voler costruire un cubo di volume doppio. Chiaramente il lato di questo nuovo cubo dovrà essere $\sqrt[3]{2}$: quello che vogliamo mostrare è che – usando gli origami – è possibile partire da un segmento di lunghezza 1 (il lato del cubo originale) e costruire un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$. Per semplicità, ci autorizziamo ad utilizzare *anche* una riga, che non sarebbe necessaria, ma semplifica la discussione. Supponiamo allora di partire con un foglio di carta quadrato di lato 1; la costruzione prevede due passi:

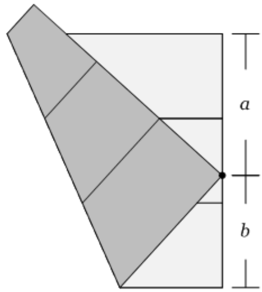
1. Come prima cosa dividiamo il foglio in tre strisce orizzontali della medesima altezza (sapete farlo con la riga[1]? Sapete farlo con un

[1] Se serve, potete immaginare che il quadrato 1×1 sia solo parte di un foglio di carta più grande: non vi preoccupate se la vostra costruzione esce dal foglio.

origami?).

2. In secondo luogo pieghiamo il foglio in modo da portare l'angolo in basso a sinistra A' a coincidere con un punto sul lato destro *e contemporaneamente* il punto B' a coincidere con un punto sul segmento $C'C$:





A questo punto il lato AD si trova ad essere diviso in due parti, di lunghezze a e b.

1. Dimostrare che $a/b = \sqrt[3]{2}$

2. Trovare una costruzione (con riga e compasso) che, dato un segmento di lunghezza 1 (per esempio il lato $A'D'$) e un segmento parallelo diviso in due parti con rapporto $\sqrt[3]{2}$ (per esempio il lato AD), produca un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$.


MARIO LIVIO
LA SEZIONE AUREA
Storia della Matematica
MARCUS DU SAUTOY
L'ENIGMA DEI NUMERI PRIMI
L'ipotesi di Riemann, il più grande mistero della matematica
CHE COS'È LA MATEMATICA?

Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una breve lista di libri, pagine web e film che possono essere uno spunto per ulteriori approfondimenti. Alcuni contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti “più leggeri”.

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos’è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi.

- M. du Sautoy, *L’enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull’ipotesi di Riemann.

- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell’intrattenimento matematico.

- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan.

- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore.

- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l’intelletto umano.

- G. Lolli, *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.

- A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo.

- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.

- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni.

- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Per non confondere le idee ci siamo limitati a proporre una bibliografia essenziale. Di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- D. Aronofsky, Π – *Il teorema del delirio*, 1998.

- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.

- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001.

- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.

- M. Tyldum, *The imitation game*, 2014.

- G. Van Sant, *Will Hunting – Genio ribelle*, 1997.

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:
  `http://maddmaths.simai.eu/`
- Versione on-line del giornalino:
  `https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days`
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
  `http://www.dm.unipi.it/webnew/`
- Sito delle olimpiadi di matematica:
  `http://olimpiadi.dm.unibo.it/`
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
  `http://www.sns.it/`
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:
  `https://poisson.phc.dm.unipi.it/`

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito:

`http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento`