



notizie, giochi
e pillole
di matematica

Su indicazione della Commissione Terza Missione.

Realizzato con la collaborazione degli studenti counselling:

Davide La Manna

Alice Lotti

Lucio Tanzini

Cristofer Villani

Coordinamento: Alessandra Caraceni, Giovanni Gaiffi

Grafica: Alessandra Caraceni

Introduzione

Ecco a voi l'edizione numero 12 del **Giornalino degli Open Days**, una pubblicazione a cura di professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa rivolta principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

Come sempre, la prima sezione è dedicata a chi stia considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario di sapore matematico: contiene una presentazione del Corso di Laurea in Matematica (così come declinato presso l'Università di Pisa). Oltre a una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica, troverete dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in Matematica.

Seguono due articoli divulgativi che speriamo possano interessarvi e incuriosirvi.

Il primo, proposto dai nostri studenti **Lucio Tanzini** e **Cristofer Villani**, ci racconta un sorprendente risultato matematico di impossibilità che riguarda i sistemi di voto. Dover armonizzare le preferenze di un gruppo per effettuare una scelta all'interno di una gamma finita di possibilità è questione di tutti i giorni, che si tratti di decidere cosa ordinare per cena, quale serie guardare, o quale candidato eleggere. Ma come farlo nel modo più "giusto" possibile? La domanda è ancor più ingannevole di quanto non sembri: scopriremo che nessun metodo, nel caso in cui le opzioni siano più di due, gode delle proprietà che ci aspetteremmo da un sistema logico ed equo!

Il secondo articolo è il primo contributo al nostro giornalino che provenga dal mondo della scuola anziché da quello dell'università. Il Professor **Alessandro Cordelli**, docente presso il Liceo Classico-Linguistico Carducci di Viareggio, ci parla del principio di induzione e dei numeri di Fibonacci; ci propone una riflessione sul ragionamento induttivo in Matematica e sul ruolo fondamentale e spesso sottovalutato dei casi particolari.

Nella nostra rubrica dedicata ai giochi matematici presentiamo poi *Prato*



SCAN ME

Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo <https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days!>

Fiorito: vi è mai capitato, per passare il tempo o magari per battere un record, di lanciare una partita a questo classico gioco? Quali strategie sapreste applicare? Se siete giocatori esperti, non mancate di cimentarvi nei piccoli rompicapi presenti all'interno dell'articolo!

Segue la rubrica "i problemi del giornalino": come sempre vi proponiamo una piccola raccolta di problemi matematici con i quali confrontarvi, di cui vi rinnoviamo l'invito ad inviarci le vostre soluzioni (assieme ai vostri eventuali dubbi!) all'indirizzo

LezioniAperteMatematica@gmail.com.

Se voleste cimentarvi con altri problemi matematici, visitate la pagina web del giornalino tramite il QR qui sopra: vi troverete una raccolta con i problemi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni.

E se dopo tutto questo non siete ancora sazi di matematica, niente paura: la nostra ultima rubrica contiene un ampio assortimento di consigli di lettura, nonché una lista di film e una di link a siti web che potrebbero fare al caso vostro, e di canali youtube in attesa della vostra iscrizione!

Indice

Introduzione	3
Il corso di laurea in Matematica	7
1 Il corso di laurea a Pisa	7
2 Sbocchi occupazionali	10
3 Borse di studio	10
Bibliografia	11
I Teoremi di Impossibilità di Arrow-Gibbard-Satterthwaite	13
1 Il teorema di Gibbard-Satterthwaite	14
1.1 L'enunciato del teorema	14
1.2 Un sistema (in apparenza) democratico	15
1.3 Un tipo sospetto: il pivot	18
1.4 Il dittatore	22
2 Il teorema di Gibbard	23
3 Esercizi	25
3.1 Un'elezione, più turni	25
3.2 A pari merito	25
3.3 Il teorema di Arrow	25
Bibliografia	26
Il principio di induzione e i numeri di Fibonacci	27
1 Introduzione	27
2 Induzione per scoprire, induzione matematica per dimostrare	29
3 Giocando con la serie di Fibonacci	31
4 Una dimostrazione per induzione	33
5 Il ruolo del caso particolare	35
6 Conclusioni	36
Bibliografia	37

Prato Fiorito	39
1 Regole del gioco	39
2 Strategie di gioco	40
3 Casi non banali	43
4 Esercizi	45
Bibliografia	45
I problemi del giornalino	47
1 Divertissement	47
1.1 Interi consecutivi	47
1.2 Un gioco da bambini	47
1.3 Una lunga lista di numeri	48
1.4 Somma infinita	48
2 Qualche apertura verso la matematica non elementare . . .	48
Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media	51

Il corso di laurea in Matematica

Stai scegliendo che cosa fare all'università e sei incuriosito da matematica, ma non sai bene a cosa ti potrà portare?

Proveremo ad aiutarti a chiarire un po' le idee mostrandoti in cosa consiste il corso di Laurea in Matematica qui a Pisa e le numerose opportunità che ha da offrirti sia per quanto riguarda il percorso universitario che per le prospettive future.

1 Il corso di laurea a Pisa

Il Corso di Laurea in Matematica si divide in Laurea Triennale e Laurea Magistrale. La prima corrisponde al titolo internazionale *Bachelor's degree* e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici; la seconda, invece, è internazionalmente identificata con il *Master's degree*, e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

Il corso di laurea triennale a Pisa offre una solida preparazione di base nei vari settori della matematica, attraverso una serie di esami obbligatori. Tuttavia, al secondo e (soprattutto) al terzo anno sono previsti esami a scelta: in questo modo, grazie alla gran quantità di corsi a scelta attivati, ognuno può approfondire gli argomenti che ha trovato di maggior interesse. Il corso di laurea triennale è ulteriormente distinto in due curricula (tra cui bisogna scegliere subito, con la possibilità di cambiare in seguito):

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

Il primo, più teorico, prevede anche una più approfondita preparazione in Fisica, mentre il secondo è più applicativo ed integra lo studio della Matematica con quello dell'Informatica. Nella Tabella 1 sono riportati i due piani di studi.

Fondamentale	Computazionale
I anno	
Aritmetica (9 CFU)	
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)	
Laboratorio di introduzione alla matematica computazionale (6 CFU)	
Analisi matematica 1 (15 CFU)	
Geometria 1 (15 CFU)	
Fisica I con laboratorio (9 CFU)	
II anno	
Algebra 1 (6 CFU)	
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)	
Inglese scientifico (6 CFU)	
Analisi matematica 2 (12 CFU)	
Geometria 2 (12 CFU)	
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)	
Esame a scelta (6 CFU)	Algoritmi e strutture dati (6 CFU)
III anno	
Meccanica razionale (6 CFU)	
Fisica II (9 CFU)	Calcolo scientifico (6 CFU)
Fisica III (6 CFU)	Laboratorio computazionale (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)	Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
	Ricerca operativa (6 CFU)
4 Esami a scelta (24 CFU)	3 Esami a scelta (18 CFU)
	Prova finale (9 CFU)

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2021-2022 (vedi [7]).

La maggior parte dei laureati triennali sceglie di proseguire gli studi con la magistrale restando a Pisa. I curricula in cui è diviso il corso di laurea magistrale sono cinque: didattico, modellistico, applicativo, generale e teorico. In questo modo, offre la possibilità ad ogni studente di specializzare il proprio piano di studi nel ramo che più lo ha interessato e appassionato durante i precedenti anni.

Il nostro dipartimento collabora inoltre con alcune università estere grazie ad accordi internazionali. Sono particolarmente prestigiosi gli accordi presi con l'École Polytechnique di Parigi e la Hokkaido University, che consentono il conseguimento di titoli congiunti (*double degrees*). Insieme a questi ci sono anche gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio oppure lavorare alla tesi presso un'altra università europea. Attualmente sono attivi accordi con questo tipo con 36 corsi di studio in Matematica europei.

**SCAN ME**

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

Simili agli accordi Erasmus sono gli accordi SEMP (Swiss European Mobility Program); abbiamo accordi attivi con le Università di Friburgo e Losanna e con l'ETH di Zurigo.

Puoi trovare altre informazioni e rimanere aggiornato sui nuovi accordi sulla pagina dell'Internazionalizzazione

<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/internazionalizzazione/internazionalizzazione>

Durante lo stato di emergenza sanitaria, le lezioni e gli esami del nostro corso di laurea sono tenute in modalità telematica su Google Meet o Microsoft Teams. Su queste piattaforme sono organizzati anche le lezioni di tutoraggio quando non è possibile tenerle in presenza. Il nostro ateneo si sta adoperando per tenere, quando possibile, le lezioni anche in presenza cosa che attualmente è stata resa possibile solo per un numero limitato di corsi della laurea magistrale. Maggiori informazioni riguardo i corsi online possono essere trovate al seguente link: <https://www.unipi.it/index.php/docenti2/item/17671-corsi-online>



2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? La pagina de "I Mestieri dei Matematici"

<https://www.mestierideimatematici.it>

cerca di rispondere a questa domande, e magari ti stupirà!

In generale risulta che i laureati in matematica sono soddisfatti della scelta fatta e godono di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare:

- I dati di Almalaurea (vedi [1], [6]) riportano che il tasso di occupazione dei laureati magistrali in matematica all'Università di Pisa a un anno dalla laurea è del 96,6% (questa percentuale include coloro, circa la metà, che sono impegnati in un dottorato di ricerca).
- Sempre dal sito di Almalaurea [5] si possono trarre i seguenti dati che riguardano in particolare l'ateneo pisano, vedi [6]:
 - In media il tempo necessario per completare la laurea triennale in matematica a Pisa è di 3,9 anni.
 - Il 93,6% dei laureati triennali si dichiara soddisfatto degli studi.
 - Il 100% dei laureati magistrali si dichiara soddisfatto dei rapporti con i docenti.

Da alcuni anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo nasce il progetto "Matematici al Lavoro", del quale potete scoprire tutti i dettagli visitando la pagina web

<https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0>

3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica)

"Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge di solito all'inizio di settembre in diverse sedi in Italia tra cui una è proprio Pisa.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (erano 30 + 2 aggiuntive nell'anno 2020/2021), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i due anni successivi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Puoi trovare tutte le informazioni sul sito <https://www.altamatematica.it>.

Gli studenti che si iscrivono qui a Pisa possono richiedere anche una borsa di studio del DSU (Azienda della Regione Toscana per il Diritto allo Studio Universitario) sulla base del reddito familiare. I vincitori di questa borsa ottengono l'esonero dalle tasse universitarie, un contributo per le spese e in alcuni casi anche vitto e alloggio gratuiti. Per avere maggiori informazioni, puoi visitare il sito <https://www.dsu.toscana.it/>.

Bibliografia

- [1] <https://www2.almalaurea.it/cgi-php/universita/statistiche/framescheda.php?anno=2019&corstipo=LS&ateneo=tutti&facolta=tutti&gruppo=1&pa=tutti&classe=11045&postcorso=tutti&isstella=0&annolau=tutti&condocc=tutti&iscrls=tutti&disaggregazione=&LANG=it&CONFIG=occupazione>
- [2] <http://scuola24.ilsole24ore.com/art/universita-e-ricerca/2017-08-18/-statistica-chimica-lauree-che-danno-lavoro-9-studenti-10-181043.php?uuid=AEBLghEC>
- [3] <https://www.onetonline.org>
- [4] <http://www.alleyoop.ilsole24ore.com/2017/10/25/ecco-24-lavori-perfetti-ad-alto-tasso-di-guadagno-e-a-basso-tasso-di-stress/>
- [5] <https://www2.almalaurea.it>
- [6] <https://www.dm.unipi.it/webnew/it/qualita/situazione-occupazionale-dei-laureati>
- [7] http://www.dm.unipi.it/webnew/sites/default/files/Reg_LT_2122.pdf



I Teoremi di Impossibilità di Arrow-Gibbard-Satterthwaite

di **Lucio Tanzini** e **Cristofer Villani**, studenti del Corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Pisa

Supponiamo di avere a cena un gruppo di amici, e dover scegliere velocemente che cosa ordinare da mangiare. Decidiamo, allora, di metterla ai voti. A prima vista, il problema è risolto. In effetti, se abbiamo due sole possibilità, e ne preferiamo una, la votazione sarà rapida: a tutti è chiaro cosa votare.

Supponiamo però di averne varie: se pensiamo di essere gli unici a voler ordinare una pizza, ma il giapponese non ci va poi tanto male, potrebbe darsi che sia meglio votare sushi al posto di pizza, in modo che, almeno, si decida per la nostra seconda scelta. O magari, se votiamo indiano, potremmo almeno evitarci di ordinare il cibo che ci piace meno.

In altre parole, potremmo dover *strategizzare*, non votando quello che è effettivamente il nostro cibo preferito, per ottenere, alla fine dei conti, un miglior risultato.

Il problema sarebbe risolto se esistesse un sistema elettorale che non sfavorisca mai un elettore quando esprime onestamente la sua preferenza.

Mostreremo però che, purtroppo per noi, un tale sistema in generale non esiste.

Più nello specifico,

- (*) *un qualsiasi sistema con almeno tre candidati che permetta la vittoria a ciascuno di essi e per il quale ad ogni elettore convenga votare seguendo onestamente le proprie preferenze è una dittatura,*

nel senso che c'è un elettore che determina interamente l'esito dell'elezione. Nel seguito, vedremo come arrivare a questo risultato, dovuto al filoso-



fo Allan Gibbard (1973), che generalizzò una versione precedente, più debole: il celebre *Teorema di impossibilità di Arrow*, provato nel 1950 dall'economista Kenneth Arrow.

1 Il teorema di Gibbard-Satterthwaite

Vediamo prima un caso particolare: supponiamo che ogni elettore esprima il suo voto stilando la propria classifica dei candidati.

1.1 L'enunciato del teorema

Come tradurre questa situazione in un contesto matematico? Supponiamo di avere n elettori e m candidati, dove n, m sono numeri naturali: possiamo indicare gli elettori coi numeri da 1 a n , e i candidati con le lettere dell'alfabeto $A, B, C, \dots$. Chiamiamo $\mathcal{C} = \{A, B, C, \dots\}$ l'insieme degli m candidati.

Ogni *preferenza* di voto è una sequenza $P = (X_1, \dots, X_m)$, che rappresenta il fatto che il candidato X_i occupi l' i -esimo posto in classifica.

Quando tutti avranno votato, otterremo un *profilo* di voti, cioè una sequenza

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n),$$

dove P_i è la preferenza di voto dell'elettore i . Ad esempio, con tre elettori 1, 2, 3 e quattro candidati A, B, C, D potremmo avere il profilo (P_1, P_2, P_3) , dove $P_1 = (A, B, C, D)$, $P_2 = (B, A, C, D)$, $P_3 = (C, A, D, B)$, che possiamo visualizzare con la tabella sotto.

1	2	3
A	B	C
B	A	A
C	C	D
D	D	B

Con tali informazioni, il sistema elettorale deve proclamare un vincitore tra gli elementi di $\mathcal{C}$. Pertanto possiamo dire che un sistema elettorale è una funzione

$$f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C},$$

dove $\mathcal{P}$ è l'insieme di tutti i profili possibili, che associa ad ogni profilo $\mathbf{P}$ un vincitore $f(\mathbf{P})$.



Dato un sistema elettorale f , diremo che

1. f è *dittatoriale* se esiste un elettore i , che chiamiamo un *dittatore*, tale che, comunque dato un profilo di voto $(P_1, \dots, P_n)$, il vincitore è il candidato preferito da i in P_i .
2. f è *manipolabile* se esiste un profilo $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ in cui un elettore i , sostituendo P_i con un'altra preferenza P'_i , ottenga un vincitore che preferisce (in P_i) a $f(\mathbf{P})$. (In altre parole, se ogni elettore votasse in maniera onesta ci sarebbe un profilo in cui ad un elettore sarebbe invece convenuto mentire).

Vogliamo allora dimostrare il

Teorema 1 (Gibbard-Satterthwaite). *Se $\mathcal{C}$ ha almeno tre candidati, un sistema elettorale $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ non manipolabile che permette a tutti i candidati di vincere è dittatoriale.*

Procederemo in tre passi consecutivi:

- i) prima, otterremo alcune proprietà "ragionevoli" di f , che ci aspettiamo da un sistema democratico;
- ii) poi, vedremo che queste proprietà implicano l'esistenza di un elettore sospetto, il *pivot*;
- iii) infine, dedurremo che il pivot è proprio il dittatore che stavamo cercando.

1.2 Un sistema (in apparenza) democratico

Iniziamo deducendo, dalle ipotesi, le seguenti proprietà.

Monotonia. Supponiamo che in un fissato profilo $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ vinca il candidato A . Supponiamo poi che un elettore i cambi la sua preferenza *scalando in alto* un candidato B , cioè scambiandolo con il candidato immediatamente sopra di lui un certo numero di volte. In altre parole, se P'_i



è la nuova preferenza di i , il passaggio $P_i \rightsquigarrow P'_i$ può ad esempio essere

i		i
$\vdots$		$\vdots$
C		B
A	$\rightsquigarrow$	C
D		A
B		D
$\vdots$		$\vdots$

Se $P' = (P_1, \dots, P_{i-1}, P'_i, P_{i+1}, \dots, P_n)$, chi ci aspettiamo vinca in P' ? Dato che l'unica preferenza a essere cambiata è quella di i , e in essa sono conservate le posizioni relative tra i candidati diversi da B , che è salito in classifica, è ragionevole che vinca A (come in P) oppure B .

Proposizione. Sia f non manipolabile. Se due profili P, P' differiscono solo per la preferenza P_i, P'_i di un unico elettore, e P'_i è ottenuta da P_i scalando verso l'alto un candidato B , $f(P')$ è $f(P)$ oppure B .

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che per il profilo P' vinca un candidato C diverso da A e B . Osserviamo che allora o i preferisce A a C sia in P_i che in P'_i oppure i preferisce C ad A sia in P_i che in P'_i .

Nel primo caso, in P' , i converrebbe cambiare la propria preferenza in P_i così da far vincere A (dato che preferisce A a C). Nel secondo caso, in P , gli converrebbe cambiare la propria preferenza in P'_i così da far vincere C .

In entrambi i casi, f è manipolabile. □

Unanimità. Supponiamo che tutti gli elettori preferiscano, tra tutti, lo stesso candidato A , come in

1	2	3	...	n
A	A	A	...	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ricordiamo che, nelle ipotesi sul sistema elettorale f , abbiamo supposto che ogni candidato possa effettivamente vincere.



Proposizione. Se un candidato A è la prima scelta di ogni elettore, A vince.

Dimostrazione. Prendiamo un profilo Q in cui vince A . Possiamo allora modificare una per volta le preferenze di ogni elettore $1, \dots, n$ scalando A in prima posizione: chiamiamo P il nuovo profilo così ottenuto. Applicando n volte la proprietà di monotonia, abbiamo che, in P , vince ancora A .

Sia ora R un profilo in cui A è la prima scelta di tutti gli elettori. Costruiamo profili intermedi

$$P \rightsquigarrow P^{(1)} \rightsquigarrow P^{(2)} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow P^{(n-1)} \rightsquigarrow R$$

modificando, una dopo l'altra, le preferenze di P , in modo che nel profilo $P^{(i)}$ le prime i siano come in R (e le altre come in P). In ognuno dei $P^{(i)}$, A continua a essere il candidato preferito da tutti. Se quindi in $P^{(1)}$ A non vincessse, a 1 converrebbe dichiarare la preferenza che aveva in P per far vincere A ; perciò, A vince anche in $P^{(1)}$. Analogamente, si ottiene che A vince in ognuno dei $P^{(i)}$, e infine in R . $\square$

Ostracismo. Vale anche la versione speculare di unanimità.

Proposizione. Se un candidato B è l'ultima scelta di ogni elettore, B non vince.

Dimostrazione. Ragioniamo come prima. Sia P un profilo della forma

1	2	3	...	n
A	A	A	...	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B	B	B	...	B

in cui la prima scelta di ogni elettore è A e l'ultima scelta di ogni elettore è B : per unanimità, B non vince. Se R è un qualsiasi profilo in cui B è per tutti l'ultima scelta, costruiamo profili

$$P \rightsquigarrow P^{(1)} \rightsquigarrow P^{(2)} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow P^{(n-1)} \rightsquigarrow R$$

come sopra. A ogni passo, B è l'ultima scelta di ogni elettore, e continua a non vincere (perché?), quindi non vince nemmeno in R . $\square$

1.3 Un tipo sospetto: il pivot

Troviamo il pivot. Finora, le nostre ipotesi su f non hanno avuto conseguenze strane. Vediamo però che succede se applichiamo quelle trovate a un fissato candidato, diciamo B . Partiamo da un profilo $\mathbf{P}^{(0)}$ della forma

1	2	3	...	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B	B	B	...	B

in cui ogni elettore ha B come ultima scelta. Per ostracismo, sappiamo che B non vince: supponiamo allora vinca $K \neq B$.

Se ora 1 cambia la sua preferenza scalando B al primo posto, otteniamo un profilo $\mathbf{P}^{(1)}$

1	2	3	...	n
B	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	B	B	...	B

in cui, per monotonia, la vittoria va a K o a B . Continuando a cambiare, in successione, le preferenze di $2, \dots, n$ allo stesso modo, otteniamo una sequenza di profili

$$\mathbf{P}^{(0)} \rightsquigarrow \mathbf{P}^{(1)} \rightsquigarrow \mathbf{P}^{(2)} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \mathbf{P}^{(n-1)} \rightsquigarrow \mathbf{P}^{(n)}$$

per cui, in $\mathbf{P}^{(n)}$, ogni elettore preferisce B agli altri candidati. In ognuno dei $\mathbf{P}^{(i)}$, per monotonia, continua a vincere o K o B ; d'altra parte, per unanimità, nel profilo $\mathbf{P}^{(n)}$ è necessariamente B a vincere. Inoltre, se in un certo profilo $\mathbf{P}^{(k)}$ sappiamo che vince B , ancora per monotonia B dovrà vincere in ogni profilo successivo al k -esimo. Esisterà quindi un elettore r , che chiameremo *pivot* per B , tale che

- i) in ogni profilo $\mathbf{P}^{(j)}$ con $0 \leq j < r$, vince K ;
- ii) in ogni profilo $\mathbf{P}^{(j)}$ con $r \leq j \leq n$, vince B .

I primi sospetti. Indagiamo ora i poteri di r .



Consideriamo i profili

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\
 \hline
 \mathbf{P}^{(r-1)} : & B & B & \dots & B & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & B & B & \dots & B
 \end{array}
 \xrightarrow{f} K \\
 \\
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\
 \hline
 \mathbf{P}^{(r)} : & B & B & \dots & B & B & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & B & \dots & B
 \end{array}
 \xrightarrow{f} B
 \end{array}$$

e vediamo che cosa riusciamo a dire grazie alla non manipolabilità di f .

- i) In $\mathbf{P}^{(r-1)}$, se uno degli elettori tra 1 e $r-1$, diciamo i , cambia la sua preferenza, B deve continuare a perdere: altrimenti, in $\mathbf{P}^{(r-1)}$, a converrebbe dichiarare la nuova preferenza per far vincere B .

Se invece un elettore j tra $r+1$ e n cambia la sua preferenza lasciando B in fondo, B deve ancora perdere: altrimenti, nel nuovo profilo, a j converrebbe usare la sua preferenza in $\mathbf{P}^{(r-1)}$ perché B non vinca.

- ii) In $\mathbf{P}^{(r)}$, analogamente, comunque un elettore j compreso tra $r+1$ e n cambi la sua preferenza, B dovrà continuare a vincere; viceversa, se i è compreso tra 1 e $r-1$ e cambia la sua preferenza lasciando B in testa, B continua a vincere.

Se ne deduce che

Proposizione. Se r è un pivot per B , valgono i seguenti fatti.

MB. In un qualsiasi profilo in cui $r, \dots, n$ votano B per ultimo, B non vince.

WB. In un qualsiasi profilo in cui $1, \dots, r$ votano B per primo, B vince.

La prova schiacciante. Per quanto curiose, le proprietà **MB**, **WB** ora trovate non sono eclatanti. Vedremo però ora che, da esse, possiamo dedurre un fatto ben più grave.

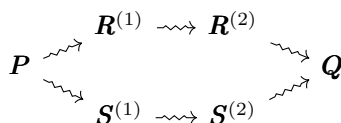
Proposizione. Se r è un pivot per B , r ha il seguente potere.

OB. Se tutti votano B per ultimo, vince il candidato preferito da r .

Dimostrazione. Consideriamo un profilo

	1	2	...	$r-1$	r	$r+1$	...	n
P :	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	K	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	B	B	...	B	B	B	...	B

in cui ogni candidato mette B all'ultimo posto, e r preferisce un certo $K \in \mathcal{C}$ a tutti gli altri candidati, e supponiamo che, in P , vinca un candidato $G \neq K$: vogliamo vedere che questo è impossibile. Per farlo, costruiremo un profilo Q e due sequenze di profili



in modo che, seguendo la prima, si deduca che in Q vince K e, seguendo la seconda, si ottenga invece che in Q vince B : dato che questo è assurdo, dev'essere $K = G$.

Partiamo allora da P : se tutti gli elettori $i \neq r$ scalano, uno dopo l'altro, K in cima, otteniamo il profilo

	1	2	...	$r-1$	r	$r+1$	...	n
	K	K	...	K	K	K	...	K
$R^{(1)}$:	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	B	B	...	B	B	B	...	B

Per unanimità, sappiamo che in $R^{(1)}$ vince K . Ora, supponiamo che gli elettori $1, \dots, r-1$ scalino B in cima, in modo che il profilo diventi

	1	2	...	$r-1$	r	$r+1$	...	n
	B	B	...	B	K	K	...	K
$R^{(2)}$:	K	K	...	K	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	B	B	...	B

Per monotonia, in $\mathbf{R}^{(2)}$ vince B o K ; ma, per $\mathbf{MB}$, è necessariamente K a vincere. Se, infine, anche r mette B al secondo posto, cioè il profilo diventa

	1	2	...	$r-1$	r	$r+1$	...	n
	B	B	...	B	K	K	...	K
Q :	K	K	...	K	B	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	B	...	B

continua a vincere K ; altrimenti, a r converrebbe non dichiarare il cambiamento, dato che continua a preferire K a B .

Ripartiamo adesso da $\mathbf{P}$: se $1, \dots, r-1$ scalano, in sequenza, B in cima, otteniamo

	1	2	...	$r-1$	r	$r+1$	...	n
	B	B	...	B	K	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{S}^{(1)}$:	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	B	B	...	B

in cui, per monotonia, possono vincere G o B ; ma, per $\mathbf{MB}$, vince G . Se, poi, r scala B in seconda posizione, si ha

	1	2	...	$r-1$	r	$r+1$	...	n
	B	B	...	B	K	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{S}^{(2)}$:	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	B	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	B	...	B

Ancora per monotonia, possono vincere G o B . D'altra parte, se r sposta B in testa, sappiamo che vince B ($\mathbf{WB}$); ma r , in $\mathbf{S}^{(2)}$, preferisce sicuramente B a G . Se quindi vincessero G , a r converrebbe dichiarare di volere B al primo posto.

Infine, se gli elettori $1, \dots, r-1$ scalano K al secondo posto, e $r+1, \dots, r$ scalano K in cima, riotteniamo

	1	2	...	$r-1$	r	$r+1$	...	n
	B	B	...	B	K	K	...	K
Q :	K	K	...	K	B	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	B	...	B

Tuttavia, in entrambi $S^{(2)}$ e Q ,

1. $1, \dots, r-1$ preferiscono B a K ;
2. $r+1, \dots, n$ preferiscono K a B .

Pertanto, a ogni cambio di preferenza di $1, \dots, r-1$, deve continuare a vincere B , altrimenti a uno di questi elettori converrebbe non cambiare preferenza per veder vincere B ; analogamente, a ogni cambio di preferenza di $r+1, \dots, n$, B continua a vincere (perché?). In definitiva, in Q vince B , e ciò conclude. $\square$

La nuova proprietà **OB** smaschera definitivamente r : ha decisamente troppo potere. Per concludere resta solo da vedere che, in effetti, r è proprio un dittatore.

1.4 Il dittatore

Prendiamo un profilo P in cui r preferisce un candidato K a tutti gli altri. Vogliamo vedere che, in P , vince K .

Supponiamo prima che $K \neq B$. Sappiamo, dalle ipotesi su f , che esiste un candidato C distinto da K e B : se ripetiamo il ragionamento che abbiamo fatto con r , troveremo un elettore s pivot per C , quindi tale che

- MC**. In un profilo in cui $s, \dots, n$ votano C per ultimo, C non vince.
- WC**. In un profilo in cui $1, \dots, s$ votano C per primo, C vince.
- OC**. Se tutti votano C per ultimo, vince il candidato preferito da s .



Che relazione c'è tra r e s ? Prendiamo un profilo

1	2	...	$r-1$	r	$r+1$	...	n
B	B	...	B	B	K	K	K
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C	C	...	C	C	C	...	C

Per $\mathbf{WB}$, vince B ; d'altra parte, per $\mathbf{OC}$, vince il candidato preferito da s , che deve allora essere B . Di conseguenza, $s \leq r$. Viceversa, guardando

1	2	...	$s-1$	s	$s+1$	...	n
C	C	...	C	C	K	K	K
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B	B	...	B	B	B	...	B

otteniamo che $r \leq s$. Quindi, r e s sono la stessa persona, e r è un *pivot* sia che B che per C ! Se allora prendiamo un *qualsiasi* profilo $\mathbf{P}$ in cui r preferisce $K \neq B$, possiamo, mantenendo le posizioni relative tra i candidati,

- i) spostare B in fondo per tutti gli elettori, poi riportarlo dov'era;
- ii) spostare C in fondo per tutti gli elettori, poi riportarlo dov'era.

Nel primo caso, per $\mathbf{OB}$ e monotonia, vince B o K ; nel secondo, per $\mathbf{OC}$ e monotonia, vince C o K . Ma B, C, K sono distinti, e il vincitore è uno solo: in conclusione, è proprio K .

Resta il caso in cui r , che era un *pivot* per B , preferisce proprio B . Allora, esisteranno altri due candidati distinti A, C : è facile adattare il ragionamento per mostrare che r è anche un *pivot* per A ; otterremo, come sopra, che l'unico caso possibile è che vinca B . Questo dimostra il teorema 1. $\square$

2 Il teorema di Gibbard

Per ottenere una dimostrazione di quanto annunciato in $(\star)$, dobbiamo ora eliminare l'ipotesi che il sistema sia *ordinale*, cioè che gli elettori si esprimano fornendo una classifica dei candidati.

Pensiamo allora a un sistema elettorale in questi termini. Abbiamo ancora il nostro insieme $\{1, \dots, n\}$ di elettori, con le loro personali preferenze sui candidati nell'insieme $\mathcal{C} = \{A, B, C, \dots\}$.

Stavolta, però, il loro voto non consiste *direttamente* in una preferenza P_i , ma più in generale ogni candidato i ha un insieme (finito) di *strategie* possibili per esprimere la propria preferenza: volutamente, non chiariamo *che cosa* effettivamente siano queste strategie, e pensiamo quindi ad esse come agli elementi di un insieme $\mathcal{S}_i$, l'insieme delle strategie dell'elettore i .

Dopo che gli elettori avranno votato, avremo quindi davanti un *profilo di strategie* $\mathcal{S}$, cioè una sequenza $(s_1, \dots, s_n)$ in cui ogni s_i è un elemento di $\mathcal{S}_i$, cioè è una strategia per l'elettore i . Il sistema elettorale sarà allora una funzione $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ dall'insieme di tutti i profili di strategie $\mathcal{S}$ possibili a quello dei candidati.

In questo contesto, che cosa vogliono dire le parole in $(\star)$? Se f è un sistema elettorale (nella nuova formulazione), diciamo che

1. f è *non manipolabile* se, ogni volta che un elettore i ha una preferenza P_i sui candidati, i ha a disposizione una *strategia dominante* $s_i^*(P_i)$, cioè una strategia per cui, comunque gli altri elettori scelgano strategie

$$s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n,$$

e comunque i cambi $s_i^*(P_i)$ con un'altra strategia $s_i \in \mathcal{S}_i$, il candidato $f(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ non è preferito, in P_i , a $f(s_1, \dots, s_i^*(P_i), \dots, s_n)$;

2. f è *dittatoriale* se esiste un *dittatore* r , cioè un elettore tale che, per ogni candidato $A \in \mathcal{C}$, ha una strategia $s_A \in \mathcal{S}_r$ che, comunque gli altri elettori scelgano la propria strategia, assicura la vittoria ad A .

Teorema 2 (Gibbard). *Se $\mathcal{C}$ ha almeno tre candidati, un sistema $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ non manipolabile che permette a tutti i candidati di vincere è dittatoriale.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista una funzione $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ che permetta la vittoria a ogni candidato e sia non manipolabile e non dittatoriale.

Possiamo allora costruire una funzione

$$g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C},$$

dove $\mathcal{P}$ è l'insieme dei profili di preferenze degli elettori, in questo modo. Dato un profilo di preferenze $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$, poniamo

$$g(\mathbf{P}) = f((s_1^*(P_1), \dots, s_m^*(P_m))),$$

dove $s_i^*(P_i)$ è una strategia dominante per i rispetto alla preferenza P_i . Questa nuova funzione g rappresenta, in effetti, un sistema elettorale or-



dinale, come l'abbiamo definito sopra. Potete allora facilmente verificare che g viola il teorema di Gibbard-Satterthwaite, e pertanto f non può esistere. $\square$

3 Esercizi

Per chi volesse cimentarsi, proponiamo qualche variante del teorema di Gibbard.

3.1 Un'elezione, più turni

Che succede ammettendo che le elezioni si possano svolgere in vari turni (come, ad esempio, nel caso in cui siano previsti ballottaggi)?

3.2 A pari merito

Ammettiamo che nelle preferenze due o più candidati possano essere a pari merito. Dimostrate che, se il sistema permette la vittoria a tutti i candidati, che sono almeno tre, e non è manipolabile, allora esistono un modo di ordinare gli elettori, diciamo $i_1, \dots, i_n$, e uno di ordinare i candidati, diciamo $X_1, \dots, X_m$ con la seguente proprietà.

Se associamo ad ogni candidato X una $(n+1)$ -upla $(X^{(1)}, \dots, X^{(n+1)})$ tale che, per $i \leq n$, $X^{(i)}$ indica la posizione del candidato X nella preferenza dell'elettore i , e $X^{(n+1)}$ è la posizione di X nell'ordine dei candidati, allora la prima di queste $(n+1)$ -uple in ordine lessicografico è quella associata al candidato vincente.

3.3 Il teorema di Arrow

Si può richiedere che un sistema elettorale, invece di stabilire un vincitore, restituisca una classifica dei candidati. In tal caso vale il seguente risultato.

Teorema 3. *Consideriamo un sistema elettorale con le proprietà seguenti.*

- i) (Unanimità) *Dato un profilo $\mathbf{P}$ e due candidati A e B , se in $\mathbf{P}$ ogni elettore preferisce A a B , allora A è preferito a B per $\mathbf{P}$.*
- ii) (Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti) *Supponiamo di avere due profili $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ e due candidati A, B , tali che ogni elettore preferisce A a B in $\mathbf{P}$ se e solo se preferisce A a B in $\mathbf{Q}$; allora, A è preferito a B per $\mathbf{P}$ se e solo se A è preferito a B per $\mathbf{Q}$.*



Allora, tale sistema è dittatoriale, nel senso che esiste un elettore i tale che, presi due candidati A e B e un profilo $\mathbf{P}$, A è preferito a B per $\mathbf{P}$ se e solo se A è preferito a B in P_i .

Questo è il teorema di Arrow (in una versione del 1963). Dimostratelo, usando il teorema di Gibbard.

Bibliografia

- [1] K. J. ARROW, *A difficulty in the concept of social welfare*, Journal of Political Economy Vol. 58 (1950).
- [2] J.-P. BENOÎT, *The Gibbard-Satterthwaite theorem: a simple proof*, Economics Letters Vol. 69 (2000).
- [3] A. GIBBARD, *Manipulation of voting schemes: a general result*, Econometrica Vol. 41 (1973).
- [4] M. A. SATTERTHWAITE, *Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions*, Journal of Economic Theory Vol. 10 (1975).

Il principio di induzione e i numeri di Fibonacci

di **Alessandro Cordelli**,

docente presso il Liceo Classico – Linguistico “G. Carducci” di Viareggio

Nelle dimostrazioni per induzione quasi sempre la maggior parte del lavoro consiste nel ricavare la validità della proposizione al passo successivo assumendo la sua validità a quello precedente; molto più semplice (spesso quasi banale) è il riconoscimento della validità della relazione in un caso particolare. Delle due condizioni comprese nel principio di induzione cioè, è la seconda quella su cui ci si concentra di più. Di fatto, non è facile trovare esempi significativi e non banali di proprietà estendibili da un intero al successivo che non sono tuttavia valide perché non verificate nemmeno in un caso particolare. Inoltre, l'analisi dei casi particolari è un momento fondamentale nel percorso di scoperta delle relazioni matematiche. Il presente articolo si concentra proprio sull'importanza del caso particolare – sia nel processo di scoperta di una relazione che come condizione necessaria per la sua dimostrazione – con un esempio in cui gli strumenti di calcolo richiesti non vanno oltre l'applicazione di semplici relazioni algebriche.

1 Introduzione

La successione di Fibonacci possiede un fascino difficilmente eguagliato da altri argomenti in matematica. Malgrado una definizione tutto sommato semplice, innumerevoli sono le sue applicazioni¹ all'algebra, alla geometria, all'analisi. Il presente contributo tratta proprio di una delle innumerevoli proprietà della successione di Fibonacci. Nella prima parte si va

¹ Per una rassegna esaustiva sui numeri di Fibonacci, vedi [1].

alla scoperta di tale proprietà, che poi però deve essere dimostrata e lo strumento adatto a questo scopo è il principio di induzione.²

Ora, come è noto, le dimostrazioni per induzione si basano su due passaggi logici: in primo luogo si verifica la proprietà in un caso particolare e poi si dimostra che se è valida all'ordine n allora è valida anche all'ordine $n + 1$. Tanto nei casi più semplici come nelle dimostrazioni più complicate il grosso del lavoro consiste nel mostrare l'estensione della proprietà da n a $n + 1$, mentre la verifica di un caso particolare è un compito quasi sempre banale.

Il termine "induzione" richiama il passaggio dal particolare all'universale, e in quanto tale non è solo uno strumento per la dimostrazione ma, prima ancora, per la scoperta di relazioni matematiche. In questo senso è particolarmente significativa la distinzione che fa George Polya [3] tra *induzione* (il riconoscimento della validità di una certa relazione) e *induzione matematica* (la sua dimostrazione). E poiché la scoperta di una relazione avviene (non sempre, ma molto spesso) osservando alcuni casi e riconoscendo una regolarità che si ripete senza eccezioni, quando si mette mano al processo dimostrativo il caso particolare di solito c'è già.

La relazione qui discussa è una proprietà della successione di Fibonacci che viene "scoperta" osservando alcuni casi particolari e dimostrata per induzione. Poiché i calcoli necessari per la dimostrazione si basano solo sulla relazione che definisce i numeri di Fibonacci (cioè che ogni elemento della successione è dato dalla somma dei due precedenti), sembrerebbe ragionevole aspettarsi che tale proprietà valga anche per qualsiasi altra successione generata con la stessa legge di quella di Fibonacci, anche se i valori iniziali non sono 1 e 1. Questo però non accade. Si dà cioè il caso notevole di una proprietà per la quale l'estensione da n a $n + 1$ si può dimostrare utilizzando la relazione ricorsiva che definisce una qualsiasi successione analoga a quella di Fibonacci, ma la cui validità dipende in maniera stringente dai valori iniziali della successione stessa.

Il presente articolo è così strutturato: il prossimo paragrafo è dedicato ad alcune considerazioni sul principio di induzione, mentre il successivo descrive il processo euristico di scoperta di una relazione tra i numeri di Fibonacci la cui dimostrazione viene sviluppata e discussa nelle sezioni 4 e 5; il sesto paragrafo contiene le conclusioni.

²Sul principio di induzione vedi ad esempio [2].

2 Induzione per scoprire, induzione matematica per dimostrare

"840 è un numero molto particolare. Esso gode infatti di una notevolissima proprietà: è divisibile per qualsiasi numero. Non ci credete? Proviamo. Come tutti i numeri è ovviamente divisibile per 1. È un numero pari e quindi è divisibile per 2. La somma delle sue cifre è 12, un multiplo di 3, quindi è divisibile per 3. La sua metà è ancora un numero pari, quindi è divisibile per 4. Finisce per zero, quindi è divisibile per 5. Essendo divisibile per 2 e per 3 è anche divisibile per 6. E poi per 7, e anche per 8... Insomma, sappiamo che le coincidenze in matematica non esistono, e qui sembra proprio che questa proprietà abbia un po' troppe conferme per essere un caso...". Ecco quale potrebbe essere l'inizio di una lezione un po' teatrale sul principio di induzione matematica.

Induzione e deduzione sono schemi di ragionamento complementari sia per quel che riguarda gli ambiti che gli obiettivi. L'induzione è il metodo di indagine principe nelle scienze della natura, secondo cui da un insieme di casi particolari che presentano tutti la stessa caratteristica si estrapola la presunta universalità di tale caratteristica sotto le medesime condizioni. Tuttavia tale universalità non potrà mai essere confermata (ciò richiederebbe la verifica sperimentale di un'infinità di casi particolari), cosicché una teoria fisica non può essere verificata, mentre può sempre essere falsificata [4]. Viceversa la deduzione, fondata sulla discesa dall'universale al particolare secondo lo schema del sillogismo aristotelico [5], garantisce l'assoluta certezza della tesi dimostrata a partire dalle ipotesi fatte. Ma anche qui c'è un prezzo da pagare, il fatto cioè che il punto di partenza di ogni ragionamento soffre di una ineliminabile arbitrarietà, per cui la verità non è tanto da intendersi come corrispondenza alla realtà quanto piuttosto come coerenza delle conclusioni con le premesse. Per dirla con le parole di un grande filosofo e matematico [6], *la matematica è una scienza nella quale non si sa di cosa si parla e non si sa se le affermazioni che vi si fanno sono vere o false.*

Da queste considerazioni sembrerebbe emergere una rigida separazione dei metodi: induzione nelle scienze della natura, deduzione in matematica. E tuttavia, come la fisica non si può ridurre alla ricerca euristica di leggi scollegate da una teoria generale, così il processo di scoperta in matematica non può prescindere dall'osservazione dei casi particolari alla ricerca di regolarità, che dovranno comunque essere successivamente dimostrate. Molto spesso nelle aule scolastiche la matematica viene pre-

sentata come una collezione di applicazioni di un certo numero di regole stabilite sulla base di nozioni e principi introdotti senza alcuna giustificazione: ciò non rende ragione né dello sviluppo storico di questa scienza né del lavoro dei matematici. Il momento deduttivo è la parte finale di un processo che molto spesso inizia proprio dall'osservazione dei casi particolari.

Ovviamente i casi particolari non bastano per asserire una legge, tutt'al più sostanziano una congettura. L'uso dei calcolatori negli ultimi decenni ha solo aumentato la quantità di casi particolari che possono essere presi in considerazione in un tempo ragionevole, ma non ha certo cambiato questo fondamentale limite logico. Anche con il numero impressionante di conferme che si possono ottenere con l'uso del calcolatore, una congettura è destinata a rimanere tale fino a che non viene prodotta una dimostrazione vera e propria. Questa è stata ad esempio la storia dell'ultimo teorema di Fermat, enunciato nel 1637 ma dimostrato da Andrew Wiles³ solo nel 1994 (tra l'altro utilizzando concetti e metodi che non potevano assolutamente essere nella cassetta degli attrezzi di un matematico del XVII secolo, cosicché un certo mistero intorno a questo teorema rimane). Un caso a parte è invece quello del teorema dei quattro colori (che asserisce che per colorare una qualsiasi mappa in modo che due regioni confinanti siano colorate diversamente bastano quattro colori), dimostrato analizzando per mezzo di un software tutte le numerose ma finite (1476) topologie non equivalenti che può avere una qualsiasi mappa piana.

L'analisi dei casi particolari può invece avere un valore probante quando si tratta di falsificare una congettura, basta infatti un solo controesempio per invalidare una proposizione universale. Un caso notevole in tal senso è quello di un altro teorema anch'esso legato al nome di Fermat. Già in un manoscritto cinese del 500 a.C. è presente questa congettura: l'espressione $2^n - 2$ è divisibile per n se e solo se n è un numero primo. In effetti, se facciamo qualche prova ci rendiamo conto della plausibilità di tale affermazione. Fermat riuscì a dimostrare il teorema diretto, cioè che se n è un numero primo, allora $2^n - 2$ è divisibile per n . Il teorema inverso, se dimostrato, costituirebbe un test per verificare se un certo numero è primo senza dover provare le divisioni per tutti i numeri primi fino alla radice quadrata del numero stesso. Di fatto però il teorema inverso non vale, e questo viene stabilito portando un controesempio. Non è tuttavia facile trovare un controesempio, dato che il più piccolo valore di n per cui la congettura cade è 341. Infatti $341 = 31 \cdot 11$, mentre $2^{341} - 2$ è divisibile

³Sull'ultimo teorema di Fermat e la dimostrazione di Andrew Wiles vedi [7].

per 341. Ora, il valore di $2^{341} - 2$ è un numero mostruosamente grande, dell'ordine di 10^{102} . È però degno di nota il fatto che il test di divisibilità di $(2^{341} - 2) : 341$ non è stato realizzato negli ultimi anni utilizzando un supercomputer, ma nel 1819 applicando in maniera ingegnosa le classi di resto [8].

Se l'induzione può essere una valida guida nella formulazione di una congettura, *l'induzione matematica* (o *principio di induzione*) è una cosa sostanzialmente diversa che permette la dimostrazione di enunciati universali. L'idea – come è noto – è che se una certa proprietà vale nel caso particolare $n = 0$ e, assumendone la validità nel caso n se ne può dedurre la validità nel caso $n + 1$, la proprietà è valida per ogni intero. Il principio di induzione si trova utilizzato già nel XVI secolo da Francesco Maurolico e, successivamente, da Fermat (che gli diede il nome di *principio della discesa infinita*) e Pascal, ma la formulazione moderna è quella del quinto assioma di Peano [9]: *Ogni sottoinsieme di numeri naturali che contenga lo zero e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali*. Naturalmente, se il più piccolo valore per cui una certa proprietà vale non è zero ma un qualche $k > 0$, tramite il principio di induzione viene stabilito che tale proprietà vale per tutti gli interi maggiori o uguali a k .

3 Giocando con la serie di Fibonacci

L'idea di prendere in considerazione la proprietà descritta in questo articolo nasce dal titolo accattivante di un video sui numeri di Fibonacci complessi [10], nel quale mi ero imbattuto casualmente. In realtà il video tratta dell'estensione a valori non interi della formula di Binet (che fornisce un'espressione esplicita anziché ricorsiva dei numeri di Fibonacci⁴) ma, prima ancora di vederlo, mi ero domandato come potrebbero essere dei numeri di Fibonacci complessi, e la cosa più semplice venutami in mente era stata modificare i valori iniziali della serie: 1, i anziché 1, 1. La successione di Fibonacci così modificata diventa:

$$1, i, 1 + i, 1 + 2i, 2 + 3i, 3 + 5i, 5 + 8i, 8 + 13i, \dots$$

La prima cosa che colpisce di questa successione è che le parti reale e immaginaria di ogni termine sono a loro volta i numeri di Fibonacci. Questo non è difficile da capire, infatti i primi due valori reali che appaiono

⁴Sulla formula di Binet vedi ad esempio [11].

nella sequenza sono 1 e 1, mentre i primi due valori immaginari sono i e i , e l'algoritmo per la generazione della successione è lo stesso del caso reale, cioè ogni termine è dato dalla somma dei due precedenti. Indicando quindi con c_n l' n -esimo termine della successione complessa e con f_n l' n -esimo numero di Fibonacci, avremo per $n \geq 3$: $c_n = f_{n-2} + if_{n-1}$ con $c_1 = 1$ e $c_2 = i$. La successione c_n gode però di un'altra proprietà, non evidente a prima vista, che balza all'occhio prendendo in esame la successione dei moduli quadri $|c_n|^2$: 1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, ... vale a dire i termini della successione $|c_n|^2$ sono tutti numeri di Fibonacci, anche se non sono tutti i numeri di Fibonacci (per esempio mancano l'8, il 21, il 55...). Ricordando poi che la parte reale e quella immaginaria sono due f_n consecutivi e osservando che i termini della sequenza di Fibonacci che compaiono nella successione dei moduli quadri $|c_n|^2$ sono solo quelli di posto dispari, possiamo scrivere: $f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n-1}$.

Assumendo $f_0 = 0$ e facendo un po' di prove si constata che la relazione è verificata per $n \geq 1$ senza eccezioni, almeno per i primi valori di n . L'induzione ci ha così condotto a formulare una congettura, che però è destinata a rimanere tale fino a che non venga prodotta una dimostrazione.

Sembrerebbe quindi di essere giunti al momento di passare il testimone all'induzione matematica, ma a questo punto sorge un problema: nel passaggio $n \rightarrow n+1$ il secondo membro dell'uguaglianza diventa f_{2n+1} , che è uguale a $f_{2n} + f_{2n-1}$, cioè occorrerebbe anche il $2n$ -esimo elemento della successione, mentre la formula che stiamo cercando di dimostrare fornisce solo gli elementi di posto dispari. In altri termini, sfruttando la definizione dei numeri di Fibonacci, bisognerebbe dimostrare che $f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n-1}$ implica $f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_{2n+1}$, ma f_{2n+1} è a sua volta definito come $f_{2n-1} + f_{2n}$; ecco perché serve anche una relazione per i termini di posto pari. Apparentemente siamo finiti in un vicolo cieco, a meno che non si riesca a trovare una analoga formula per f_{2n} : il lavoro dell'induzione non è ancora terminato.

Facendo un po' di tentativi osserviamo che f_{2n} risulta sempre divisibile per f_n : $f_4 = 3$ è divisibile per $f_2 = 1$; $f_6 = 8$ è divisibile per $f_3 = 2$; $f_8 = 21$ è divisibile per $f_4 = 3$; $f_{10} = 55$ è divisibile per $f_5 = 5$; ecc... Inoltre il valore di $\frac{f_{2n}}{f_n}$ è esprimibile in maniera semplice in termini degli stessi numeri di Fibonacci. Infatti (a partire da $n = 3$):

$$\frac{f_6}{f_3} = 4 = 2 \cdot 2 + 0, \quad \frac{f_8}{f_4} = 7 = 2 \cdot 3 + 1, \quad \frac{f_{10}}{f_5} = 11 = 2 \cdot 5 + 1, \quad \dots$$

sembra quindi che sia: $\frac{f_{2n}}{f_n} = 2 \cdot f_n + f_{n-3}$. Siamo così arrivati alla seconda relazione richiesta, quella per gli elementi di posto pari che, scritta esplicitamente è: $f_{2n} = 2f_n^2 + f_n \cdot f_{n-3}$.

Osserviamo che - se confermate - queste due relazioni permetterebbero di ottenere il valore di un particolare elemento nella sequenza di Fibonacci senza dover calcolare tutti i precedenti. Così, ad esempio, il calcolo di f_{50} mediante $f_{50} = f_{49} + f_{48}$ richiede i 49 valori precedenti, mentre con $f_{50} = 2f_{25}^2 + f_{25} \cdot f_{22}$ ne occorrono soltanto 25. L'applicazione delle due formule può anche essere iterata riducendo ulteriormente il numero di calcoli richiesti. Nel nostro esempio: $f_{25} = f_{13}^2 + f_{12}^2$ e $f_{22} = 2f_{11}^2 + f_{11} \cdot f_8$. A questo punto si possono ancora applicare le due formule, oppure considerare che sotto $n = 15$ i valori di f_n sono sufficientemente piccoli da essere calcolati con la formula ricorsiva:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$$

Quindi $f_{22} = 2 \cdot 89^2 + 89 \cdot 21 = 17711$ e $f_{25} = 233^2 + 144^2 = 75025$, da cui: $f_{50} = 2 \cdot 75025^2 + 75025 \cdot 17711 = 12586269025$.

4 Una dimostrazione per induzione

Avendo trovato due relazioni che riguardano i numeri di Fibonacci osservando un certo numero di casi particolari, la dimostrazione attraverso il principio di induzione si riduce a verificare il passaggio da n a $n + 1$. Cioè, assumendo valide entrambe le relazioni della coppia:

$$\begin{cases} f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2 \\ f_{2n} = 2 \cdot f_n^2 + f_n \cdot f_{n-3} \end{cases}$$

bisognerà mostrare che valgono altresì entrambe le relazioni della nuova coppia:

$$\begin{cases} f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2 \\ f_{2n+2} = 2 \cdot f_{n+1}^2 + f_{n+1} \cdot f_{n-2} \end{cases}$$

Il punto di partenza, nonché ingrediente chiave della dimostrazione, è la regola che definisce i numeri di Fibonacci: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, che applicheremo anche all'elemento $n - 1$, cioè:

$$f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-3}.$$

Partiamo quindi dall'espressione $f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$, che può essere interpretata in due modi diversi a seconda dell'ordine in cui viene eseguita la somma:

$$(f_{n-1} + f_{n-2}) + f_{n-3} = f_n + f_{n-3},$$

ma anche:

$$f_{n-1} + (f_{n-2} + f_{n-3}) = 2f_{n-1}.$$

Quindi, uguagliando i secondi membri delle due precedenti uguaglianze:

$$f_n + f_{n-3} = 2f_{n-1}.$$

Moltiplichiamo adesso ambo i termini dell'uguaglianza per f_n e sommiamo f_n^2 ; in tal modo nel membro di sinistra rimane $2 \cdot f_n^2 + f_n \cdot f_{n-3}$ che per ipotesi è f_{2n} . Abbiamo quindi:

$$f_{2n} = 2f_n f_{n-1} + f_n^2.$$

A questo punto sommiamo ad ambo i termini l'espressione $f_n^2 + f_{n-1}^2$. In tal modo a sinistra rimane:

$$f_{2n} + (f_n^2 + f_{n-1}^2) = f_{2n} + f_{2n-1} = f_{2n+1}.$$

A destra, invece:

$$(f_{n-1}^2 + 2f_n f_{n-1} + f_n^2) + f_n^2 = f_{n+1}^2 + f_n^2.$$

Risulta così dimostrata la prima delle due relazioni: $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$.

Si passa adesso alla dimostrazione della relazione per i termini di posto pari. In questo caso si parte dall'espressione $2f_n f_{n+1}$ che svilupperemo in due modi diversi.

Primo sviluppo:

$$\begin{aligned} 2f_n f_{n+1} &= 2f_n \cdot (f_n + f_{n-1}) = f_n \cdot (2f_n + 2f_{n-1}) = \\ &= f_n \cdot (2f_n + f_{n-1} + f_{n-1}). \end{aligned}$$

Esprimiamo il secondo f_{n-1} come $f_{n-2} + f_{n-3}$. In tal modo:

$$\begin{aligned} 2f_n f_{n+1} &= f_n \cdot [2f_n + (f_{n-1} + f_{n-2}) + f_{n-3}] = \\ &= f_n \cdot (3f_n + f_{n-3}) = 3f_n^2 + f_n f_{n-3}. \end{aligned}$$

Si arriva così a scrivere:

$$2f_n f_{n+1} = f_n^2 + (2f_n^2 + f_n f_{n-3}) = f_n^2 + f_{2n}.$$

Secondo sviluppo:

$$\begin{aligned}
 2f_n f_{n+1} &= (f_n + f_{n-1} + f_{n-2}) f_{n+1} = \\
 &= (f_{n+1} + f_{n-2}) f_{n+1} = f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_{n-2}
 \end{aligned}$$

in cui si è posto $2f_n = (f_n + f_{n-1} + f_{n-2})$ e, nella parentesi, $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$.

Uguagliando i due sviluppi si ottiene:

$$f_n^2 + f_{2n} = f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_{n-2}$$

In questa equazione basta sommare f_{n+1}^2 ad entrambi i membri per ottenere:

$$f_{n+1}^2 + f_n^2 + f_{2n} = 2f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_{n-2}$$

Cioè $f_{2n+1} + f_{2n} = f_{2n+2} = 2f_{n+1}^2 + f_{n+1} f_{n-2}$, che è proprio la seconda relazione, quella che vale per i termini di posto pari.

5 Il ruolo del caso particolare

Se seguiamo in dettaglio tutti i passaggi della dimostrazione di entrambe le relazioni noteremo come l'unica proprietà utilizzata per trasformare una scrittura nell'altra sia stata - oltre all'ipotesi che le due relazioni valgano all'ordine n - la relazione che definisce i numeri di Fibonacci: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Sembrerebbe quindi ragionevole aspettarsi che tali relazioni valgano in qualsiasi sequenza definita con la stessa legge di ricorrenza dei numeri di Fibonacci. La celebre successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... non è infatti unica: utilizzando la stessa legge di ricorrenza ma cambiando i valori iniziali se ne possono ottenere quante se ne vogliono. Ad esempio, godono di un certo interesse i cosiddetti *numeri di Lucas* [12] L_n definiti esattamente mediante la stessa relazione di ricorrenza $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ ma con valori iniziali $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. La successione di Lucas è quindi: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ... Se si prova però ad applicare alla sequenza dei numeri di Lucas le relazioni dimostrate nella precedente sezione, si osserva che esse non valgono. Perché? Semplicemente, in questo caso è venuta meno una delle due condizioni della dimostrazione per induzione: il fatto cioè che la proprietà valga in un caso particolare.

Dal punto di vista strettamente logico, il fatto che le due relazioni dimostrate per i numeri di Fibonacci non valgano per *tutti* i numeri di Lucas non significa ancora che non valgano per *nessun* numero di Lucas. Potrebbe infatti darsi il caso che tali relazioni siano verificate per un certo valore

$n = \bar{n}$, magari anche molto grande. In tal caso la dimostrazione sviluppata per i numeri di Fibonacci ci garantirebbe la validità delle stesse relazioni per tutti i numeri di Lucas con $n \geq \bar{n}$. È però possibile dimostrare per altra strada⁵ che, di fatto, le due relazioni che abbiamo dimostrato per i numeri di Fibonacci non possono valere in nessun caso per i numeri di Lucas.

Infatti, tra le molte proprietà dei numeri di Lucas ce ne sono due che li legano direttamente alla sequenza di Fibonacci [12]: $L_n^2 = 5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n$ e $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$. Supponiamo quindi (per assurdo) che le due relazioni che abbiamo dimostrato per i numeri di Fibonacci valgano anche per quelli di Lucas, per esempio quella relativa ai termini di posto dispari, cioè che: $L_{2n-1} = L_n^2 + L_{n-1}^2$. Applicando le due relazioni viste sopra a entrambi i termini dell'uguaglianza otteniamo: $f_{2n} + f_{2n-2} = 5 \cdot (f_n^2 + f_{n-1}^2) = 5 \cdot f_{2n-1}$ (nell'ultimo passaggio si è sfruttata la proprietà dimostrata per la sequenza di Fibonacci). Otteniamo così una ulteriore relazione per i numeri di Fibonacci: $f_{2n} + f_{2n-2} = 5 \cdot f_{2n-1}$ da cui, sviluppando f_{2n} , si ha: $f_{2n-1} + 2 \cdot f_{2n-2} = 5 \cdot f_{2n-1}$, cioè: $f_{2n-2} = 2 \cdot f_{2n-1}$, che possiamo anche scrivere come $f_{2n-2} = 2 \cdot f_{2n-2} + 2 \cdot f_{2n-3}$, da cui infine: $f_{2n-2} + 2 \cdot f_{2n-3} = 0$, che è manifestamente assurdo in quanto i numeri di Fibonacci sono interi positivi.

6 Conclusioni

Una coppia di relazioni ricorsive che permette di ottenere l' n -esimo numero di Fibonacci senza dover preventivamente calcolare tutti i precedenti ma solo i primi $\frac{n}{2}$ è stata congetturata dall'osservazione di un certo numero di casi particolari e dimostrata utilizzando la tecnica dell'induzione matematica.

Analizzando la dimostrazione, si vede chiaramente che l'unico ingrediente utilizzato è stata la relazione di ricorrenza che definisce i numeri di Fibonacci, il che farebbe supporre che le relazioni trovate si possano ugualmente applicare a qualsiasi altra successione generata con la stessa regola. Se però prendiamo in esame i numeri di Lucas (o anche altre successioni generate con la stessa regola dei numeri di Fibonacci), vediamo che questo non accade. Il motivo è che in tutti questi casi viene a mancare la prima delle condizioni che una dimostrazione per induzione deve rispettare: la validità in un caso particolare.

⁵Sono debitore di questa dimostrazione all'amico prof. Giovanni Gaiffi.

Le implicazioni epistemologiche sono interessanti. Se ci venisse chiesto se preferiamo dormire su un mucchio di paglia secca in una stanza con pareti, pavimento e soffitto in legno, nella quale non ci sono però fiammiferi, scintille, ecc., oppure su un divano in materiale ignifugo in una stanza in muratura in cui un paio di candele sono accese sopra un tavolo di marmo, molto probabilmente ci sentiremmo più sicuri nella seconda situazione, eppure il rischio di incendio è nullo nel primo come nel secondo caso. È come se l'estendibilità da n a $n + 1$ denotasse in qualche modo la possibilità per la validità di una certa relazione e il caso particolare l'evento contingente che ne innesca l'esistenza. Ma in matematica esistono le contingenze?

Bibliografia

- [1] K. J. DEVLIN, D. DIDERO, *I numeri magici di Fibonacci. L'avventurosa scoperta che cambiò la storia della matematica*, BUR Rizzoli, Milano (2013).
- [2] A. CORDELLI, *I fondamenti della matematica, la logica e gli insiemi*, e-book Kindle (2013), URL: <http://www.amazon.it/gp/product/B00CKY2G1U>.
- [3] G. POLYA, *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, Milano (1967).
- [4] K. POPPER, *Logica della scoperta scientifica. Il carattere autocorrettivo della scienza*, Einaudi, Torino (2010).
- [5] ARISTOTELE, *Analitici Primi (a cura di Milena Bontempi) in Organon (coord. Maurizio Migliori)*, Bompiani, Milano (2016).
- [6] B. RUSSEL, *Misticismo e Logica*, Longanesi, Milano (1964).
- [7] S. SINGH, *L'ultimo teorema di Fermat*, Rizzoli, Milano (1999).
- [8] A. H. BEILER, *Recreations in the theory of numbers*, Dover Publications inc., New York (1966).
- [9] G. PEANO, *Arithmetices Principia (testo italiano e latino)*, Aragno, Torino (2001).
- [10] STAND-UP MATHS, *Complex Fibonacci Numbers?*, <https://youtu.be/ghxQA3vvhsk>.

- [11] E. W. WEISSTEIN, *Binet's Fibonacci Number Formula*, from MathWorld - A Wolfram Web Resource: <https://mathworld.wolfram.com/BinetsFibonacciNumberFormula.html>.
- [12] E. W. WEISSTEIN, *Lucas Number*, from MathWorld - A Wolfram Web Resource: <https://mathworld.wolfram.com/LucasNumber.html>.





Prato Fiorito

di **Alice Lotti**, studentessa del Corso di Laurea Triennale in Matematica dell'Università di Pisa

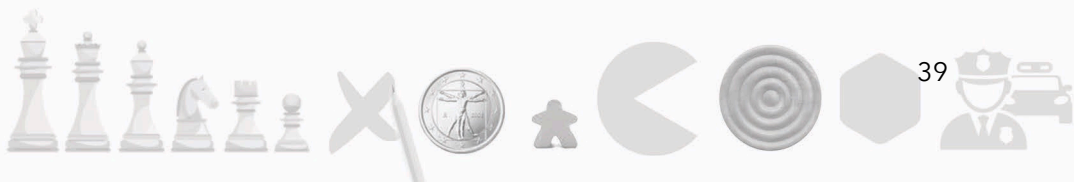
Un gioco iconico di Windows che tantissimi di voi conosceranno già... ma chi di voi sa davvero che strategia usare? Qui potrete trovare qualche consiglio e strategia che magari non conoscevat e che vi aiuteranno a migliorare i vostri tempi e battere il nostro record!

1 Regole del gioco

Prato Fiorito, o *Campo Minato*, è un gioco per computer per giocatore singolo. Il campo di gioco è una griglia rettangolare, le cui caselle sono inizialmente coperte, e alcune di esse contengono mine. Quando il giocatore clicca su una casella, questa viene scoperta e possono accadere 3 cose:

1. o la casella contiene una mina, e in tal caso la partita è persa;
2. o la casella contiene un numero (da 1 a 8), che indica il numero di mine presenti nelle caselle adiacenti a quella considerata (in orizzontale, verticale o diagonale);
3. o la casella è vuota, il che significa che non ci sono mine adiacenti; in tal caso le caselle circostanti vengono scoperte, fino ad arrivare a caselle numerate (con mine adiacenti).

Lo scopo del gioco è scoprire tutte le caselle senza mine. Per tenere a mente le posizioni delle mine, è possibile segnare le caselle con delle bandierine cliccandoci sopra con il tasto destro. In qualche versione, cliccando sopra una casella che contiene un numero che è uguale al numero di bandiere ad essa adiacenti, vengono rivelate tutte le caselle vicine non



segnate. Il giocatore sceglie la grandezza del campo e in base ad essa varia anche il numero di mine che contiene: si parte dal livello Principiante con il campo 9 x 9 e 10 mine ma si può anche giocare con un campo 100 x 100 e 2000 mine!

2 Strategie di gioco

Vediamo un esempio.

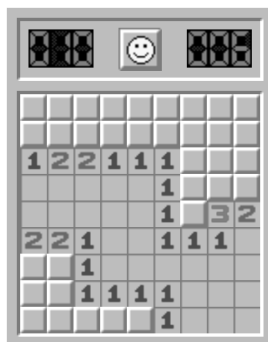


Figura 1

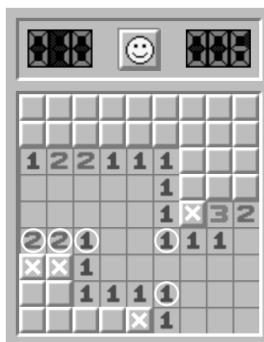


Figura 2

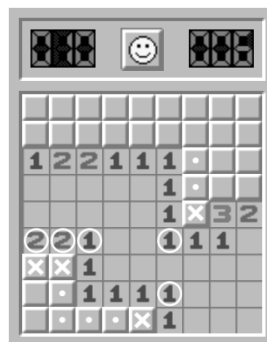


Figura 3

Se al primo clic ci troviamo davanti la configurazione in Figura 1 possiamo partire osservando che le tre caselle con l'1 cerchiata di giallo in Figura 2 toccano ciascuna una sola casella ancora coperta (segnata con una X) che è quindi sicuramente una mina. Analogamente entrambi i 2 cerchiati sono adiacenti solamente alle due caselle sottostanti, quindi abbiamo due mine certe. Adesso osserviamo gli 1 cerchiati in Figura 3: questi hanno già tutti vicino una delle mine che abbiamo appena segnato con le X quindi tutte le altre caselle adiacenti (marcate con un puntino) sono libere e possiamo cliccarle tranquillamente.

Da questo esempio sono emerse quindi due ovvie strategie:

1. Se una casella scoperta contiene un numero n , e ha esattamente n caselle adiacenti coperte, possiamo segnare tutte quelle caselle con una bandierina, dato che ognuna di esse conterrà sicuramente una mina;
2. Se, intorno a una casella che contiene un numero n , abbiamo già individuato n mine, possiamo liberare tutte le restanti caselle intorno.



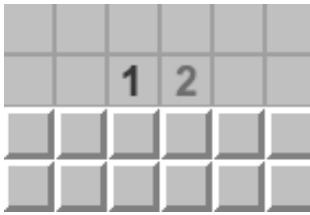


Figura 4



Figura 5

Per quanto immediate, queste due mosse sono spesso sufficienti a scoprire una gran quantità di caselle. D'altra parte, non si possono sempre applicare!

Cerchiamo allora di individuare dei *pattern* ricorrenti, cioè delle configurazioni della griglia che compaiono spesso e in cui è possibile, ragionando un po', concludere che alcune caselle sono libere e/o altre contengono mine.

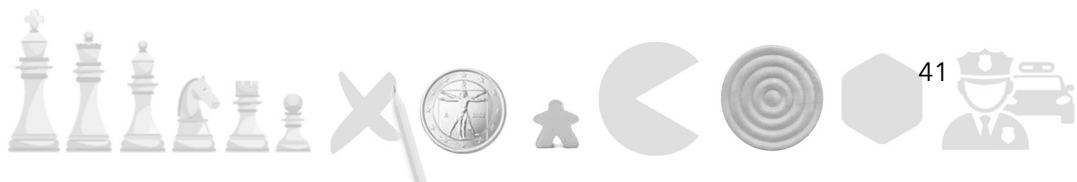
Il caso probabilmente più importante è l' **1-2**: non solo è un caso ricorrente di per sé, ma da esso si deduce una gran quantità di altri pattern.

Supponiamo di trovarci nella situazione della Figura 4. In questa figura, come in quelle che seguono, intendiamo che

- le caselle in rilievo sono *eventualmente* coperte, ma possono anche essere scoperte;
- le caselle scoperte sono caselle libere da mine, ma non necessariamente vuote (in particolare quelle sul bordo conteranno per forza un numero).

Nelle tre caselle ancora coperte toccate dal 2 ci dovranno essere due mine: se fossero nelle due sottostanti alla coppia di numeri, avremmo che la casella con l'1 ne toccherebbe due; quindi, una mina si trova sicuramente nella casella a destra contrassegnata dalla bandierina in Figura 5. Inoltre, sappiamo che la seconda mina toccata dal 2 sta in una delle altre due caselle, entrambe adiacenti anche all'1; perciò, le altre caselle ancora coperte vicine all' 1 (quella marcata con un puntino nella Figura 5) sono libere.

Per ottenere nuovi pattern dall'**1-2** notiamo il seguente fatto. Consideriamo una configurazione in cui abbiamo già individuato delle mine (segnandole con bandierine). Se ad ogni numero che compare nella griglia sottraiamo la quantità di bandierine ad esso adiacenti, e sostituiamo le



caselle contenenti una bandierina con caselle libere, otteniamo una versione *ridotta* della griglia di partenza: se troviamo mine o caselle libere nella versione ridotta, avremo mine/caselle libere negli stessi punti della versione di partenza, e viceversa.

Usando quest'osservazione, otteniamo ad esempio i pattern che seguono in Figura 6 e 7; il primo è la forma ridotta dell'**1-2**, e riducendo il secondo si ottiene di nuovo il primo. Possiamo anche applicare più volte l'**1-2**, ottenendo ad esempio la configurazione della Figura 8.



Figura 6



Figura 7

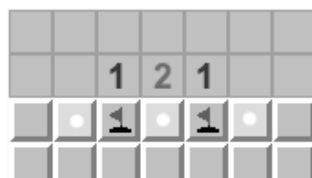


Figura 8

Ci sono molti altri pattern utili di cui vi riportiamo qui la soluzione, raffigurati di seguito nelle figure dalla 9 alla 19. Potete provare per esercizio a dimostrarne la correttezza.



Figura 9



Figura 10

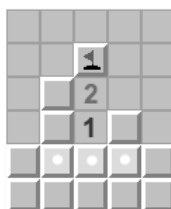


Figura 11



Figura 12

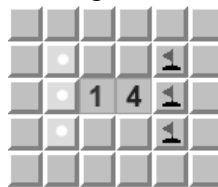


Figura 13

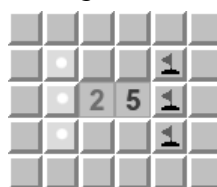


Figura 14

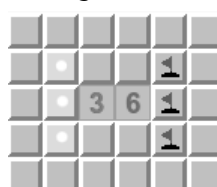


Figura 15

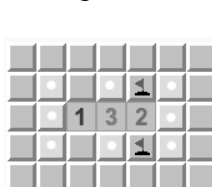


Figura 16



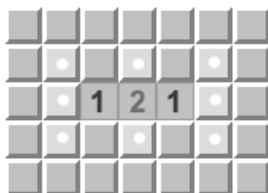


Figura 17



Figura 18



Figura 19

3 Casi non banali

Ci sono alcune combinazioni che non siamo in grado di risolvere utilizzando solo i pattern o le mosse descritte in precedenza. In alcuni casi infatti è necessario fare un conteggio delle mine che abbiamo già individuato per capire come sono posizionate le rimanenti in un determinato blocco, come nell'esempio di Figura 20:

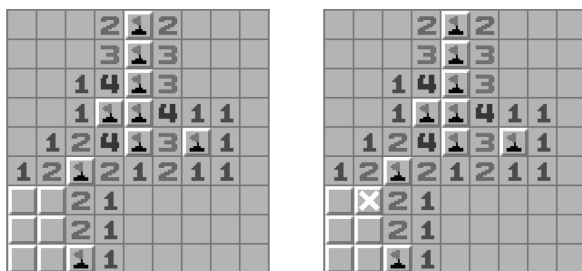
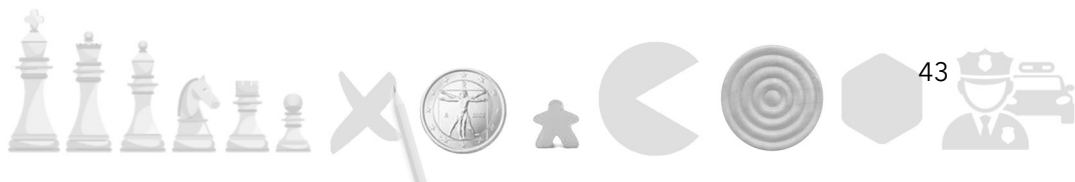


Figura 20

Qui infatti l'unico modo per risolvere il gioco è contare le mine già individuate che sono 9 e capire come posizionare la restante mina in modo coerente con i numeri dati. L'unica possibile posizione della mina è infatti nella casella segnata con la X.

In altri casi invece non basta utilizzare il ragionamento logico per determinare la giusta posizione delle mine. Infatti esistono configurazioni che non si possono risolvere se non tirando ad indovinare. Facciamo un esempio.

Supponiamo di trovarci in una situazione come quella rappresentata in Figura 21 a sinistra, in cui mancano da individuare 2 mine; in questo caso, come mostriamo nelle due figure a destra, abbiamo due possibilità



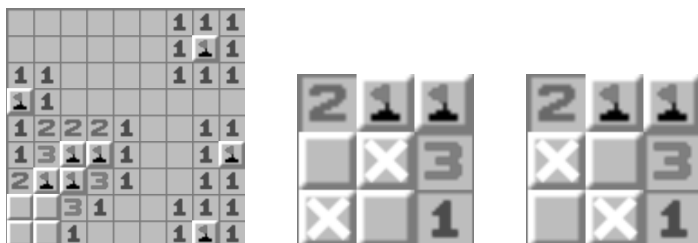


Figura 21

per posizionarle coerentemente con i numeri scoperti e nessun modo di capire quale delle due ci porterà alla vittoria.

Come gestire le configurazioni ambigue? Per quanto non possiamo evitarle, vorremmo non fare inutilmente mosse rischiose, ogni volta che c'è una casella che può essere scoperta senza pericoli.

Abbiamo già trovato dei pattern che ci consentono di risolvere molti casi concreti. Ma se volessimo una strategia generale? Per assicurarci che una fissata casella sia libera, potremmo ragionare così.

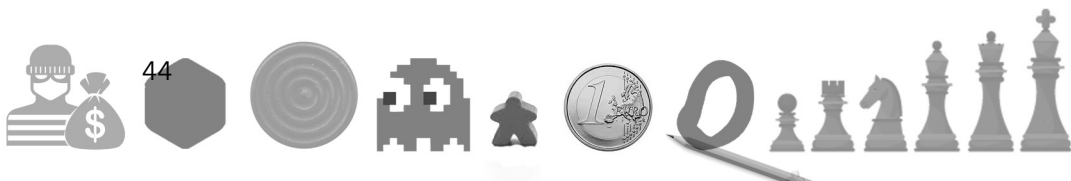
Se supponiamo che in tale casella ci sia una mina, ci chiediamo se esiste una *estensione coerente* della configurazione che abbiamo davanti, cioè un modo di disporre le mine restanti tra le caselle ancora coperte in maniera che le regole del gioco siano rispettate. Se la risposta è no, la casella di partenza è sicuramente libera.

Come potete immaginare, l'unico modo per applicare questa strategia è trovare un algoritmo efficiente che, presa in input una configurazione, controlli se esiste un'estensione coerente.

Il problema dell'esistenza di quest'algoritmo è stato effettivamente studiato: nel 2000, Richard Kaye ha dimostrato [3] che è *NP-completo* [5]. Senza voler dare una definizione precisa, questo vuol dire che

1. è possibile verificare in tempo polinomiale, rispetto alla dimensione della griglia, la correttezza di una soluzione proposta (questo è chiaro, basta controllare le condizioni casella per casella);
2. ogni problema con la proprietà (1) può essere ricondotto (in tempo polinomiale) al problema di completare una griglia di Prato Fiorito.

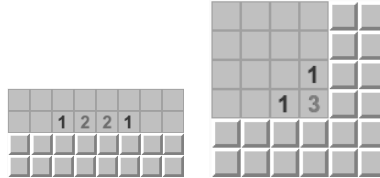
Per maggiori informazioni sull'NP-completezza di Prato Fiorito, vi consigliamo di visitare la pagina web di Richard Kaye stesso, in cui ha raccolto utili risorse per rendere il tema accessibile al grande pubblico [4].



4 Esercizi

In questa sezione vi lasciamo quale pattern da risolvere e qualche esercizio come spunto per riflettere sulle possibili situazioni. E poi... giocate!

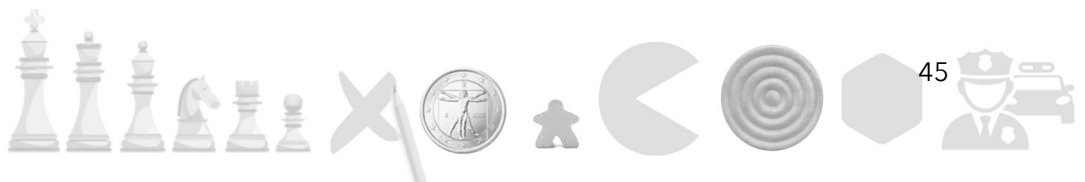
1. Cosa riuscite ad affermare sui seguenti pattern? Quali caselle sono mine sicuramente? Quali invece sono certamente libere?



2. Sia data una riga di caselle coperte, lunga n , tale che i numeri intorno ad esse siano tutti 1. Quando esiste una configurazione di mine coerente?
3. Supponiamo di avere un rettangolo di $m \times n$ caselle, tale che il rettangolo "interno" di taglia $(m - 2) \times (n - 2)$ è scoperto, e il bordo è invece coperto. Supponiamo anche che, sul bordo del rettangolo interno, siano presenti tutti 1. Per quali coppie di m, n esiste una disposizione di mine coerente?

Bibliografia

- [1] [https://it.wikipedia.org/wiki/Campo_minato_\(videogioco\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Campo_minato_(videogioco))
- [2] <http://computronium.org/minesweeper/basics.html>
- [3] R. KAYE, *Minesweeper is NP-complete*, Mathematical Intelligencer 22 (2000).
- [4] <http://web.mat.bham.ac.uk/R.W.Kaye/minesw/minesw.htm>
- [5] <https://it.wikipedia.org/wiki/NP-completo>



I problemi del giornalino

una rubrica a cura di **Davide Lombardo**,
ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

1 Divertissement

1.1 Interi consecutivi

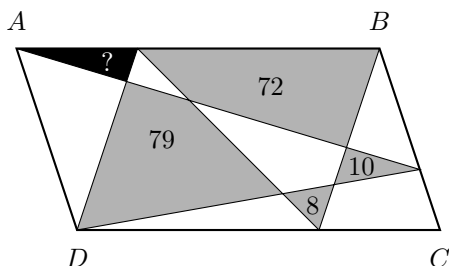
Trovare gli interi positivi n per cui vale la seguente proprietà: la somma di n interi positivi consecutivi è sempre divisibile per n .

Nota. Può essere utile ricordare che la somma dei primi n interi positivi è $\frac{n(n+1)}{2}$.

1.2 Un gioco da bambini

Secondo una storia ripresa da diversi siti internet, questo problema è stato proposto in Cina per identificare studenti delle elementari particolarmente portati per la matematica. Indipendentemente dall'origine del problema, sapete calcolare l'area della regione nera, sapendo che $ABCD$ è un parallelogramma e che le aree delle regioni grigie sono quelle indicate?

Nota. il disegno non è in scala.



1.3 Una lunga lista di numeri

Permutando in tutti i modi possibili le cifre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ si possono ottenere $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ numeri diversi. Elenchiamoli tutti in ordine crescente: quale numero occupa la posizione 2021 in questa lista?

1.4 Somma infinita

Consideriamo la successione $a_n = \frac{n}{2^n}$ e la successione $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Quando n diventa molto grande, b_n si avvicina arbitrariamente ad un certo valore, senza mai superarlo. Qual è questo valore?

(Per chi conosce questo linguaggio: qual è la somma della serie $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}$?)

2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

Molti di voi conosceranno i coefficienti binomiali: dati due interi m, n con $0 \leq m \leq n$, si definisce il *coefficiente binomiale* $\binom{n}{m}$ come il numero di modi di scegliere m oggetti in un insieme di n (o, più formalmente, come il numero di sottoinsiemi di cardinalità m di un insieme con n elementi). Il valore di $\binom{n}{m}$ è $\frac{n!}{m!(n-m)!}$, dove $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ è il prodotto dei primi n interi positivi (chiamato *n fattoriale*; per convenzione, $0! = 1$). Riscrivendo il coefficiente binomiale come

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{m!}$$

diventa chiaro che, per un valore di m fissato, $\binom{n}{m}$ è un polinomio nella variabile n . Estendiamo allora la definizione di coefficiente binomiale ponendo per definizione, per ogni x numero reale,

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)(x-2) \cdots (x-m+1)}{m!}.$$

Ad esempio, $\binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$ e $\binom{x}{4} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$; per convenzione si pone $\binom{x}{0} = 1$ per ogni x .

1. Dimostrare che la formula $\binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m}$ vale per ogni intero $m \geq 0$ e ogni numero reale x .
2. Sia $p(n)$ la somma dei quadrati dei primi n interi positivi. Osservando che $p(n+1) - p(n) = (n+1)^2$, trovare una formula per $p(n)$. E se considerassimo la somma dei cubi?
3. (★) Consideriamo un polinomio $q(x)$ a coefficienti reali con la seguente proprietà: per ogni intero n , il valore $q(n)$ è a sua volta intero. Scriviamo $q(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0$, in modo che a_d sia il coefficiente in $q(x)$ del monomio di grado massimo. Dimostrare che $d! \cdot a_d$ è un numero intero.

Indicazione per il punto 3. Si potrebbe considerare la differenza $q(x+1) - q(x)$...

Nota. I polinomi considerati in questo problema, chiamati a volte *funzioni binomiali*, si rivelano molto utili in varie aree della matematica, fondamentalmente in virtù della seguente proprietà (che volendo potreste provare a dimostrare): ogni polinomio che assume valori interi quando calcolato per valori interi della variabile si scrive come combinazione (a coefficienti interi) delle funzioni binomiali.



Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una lista di libri, pagine web, canali YouTube e film incentrati sulla matematica per stimolare ulteriormente la vostra curiosità.

Alcuni dei libri che vi consigliamo, contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti "più leggeri".

- 📖 C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.
- 📖 R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi.
- 📖 M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann.
- 📖 M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico.
- 📖 G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan.
- 📖 O. A. Ivanov, *Facile come π greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore.
- 📖 M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.



- 📖 G. Lolli, *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.
- 📖 A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo.
- 📖 S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.
- 📖 E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UML: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni.
- 📖 A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Per non confondere le idee ci siamo limitati a proporre una bibliografia essenziale. Di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Ecco-ne alcuni, dai classici alle perle poco note.

- 🎬 D. Aronofsky, *II - Il teorema del delirio*, 1998.
- 🎬 M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.
- 🎬 R. Howard, *A beautiful mind*, 2001.
- 🎬 M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.
- 🎬 M. Tyldum, *The imitation game*, 2014.
- 🎬 G. Van Sant, *Will Hunting - Genio ribelle*, 1997.





SCAN ME

Visita il canale youtube del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa all'indirizzo <https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw/>!

Adesso vi proponiamo una lista di canali YouTube legati alla matematica per scoprire un sacco di curiosità e perché no, trovare ottimi spunti per approfondimenti:

- ▶ <https://www.youtube.com/c/3blue1brown>
- ▶ <https://www.youtube.com/c/Mathologer>
- ▶ <https://www.youtube.com/user/numberphile>
- ▶ <https://www.youtube.com/c/ThinkTwiceLtu>
- ▶ <https://www.youtube.com/user/blackpenredpen>
- ▶ <https://www.youtube.com/c/DrPeyam>

A proposito, potete trovare su YouTube il canale del nostro dipartimento! Fateci visita (e, perché no, iscrivetevi!) all'indirizzo

<https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw>

seguendo il link o inquadrando il QR presente in alto su questa pagina. Troverete presto una varietà di contenuti, fra cui anzitutto vi consigliamo il video dell'intervista ad Alessio Figalli, medaglia Fields per la Matematica, in occasione della Settimana Matematica 2019:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=i6ha2pLLUaA>

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- 📌 Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:
<http://maddmaths.simai.eu/>



- ✚ Versione on-line del giornalino:
<https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>
- ✚ Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
<http://www.dm.unipi.it/webnew/>
- ✚ Sito delle olimpiadi di matematica:
<http://olimpiadi.dm.unibo.it/>
- ✚ Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
<http://www.sns.it/>
- ✚ Sito degli studenti di matematica di Pisa:
<https://poisson.phc.dm.unipi.it/>

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito:

<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento>

