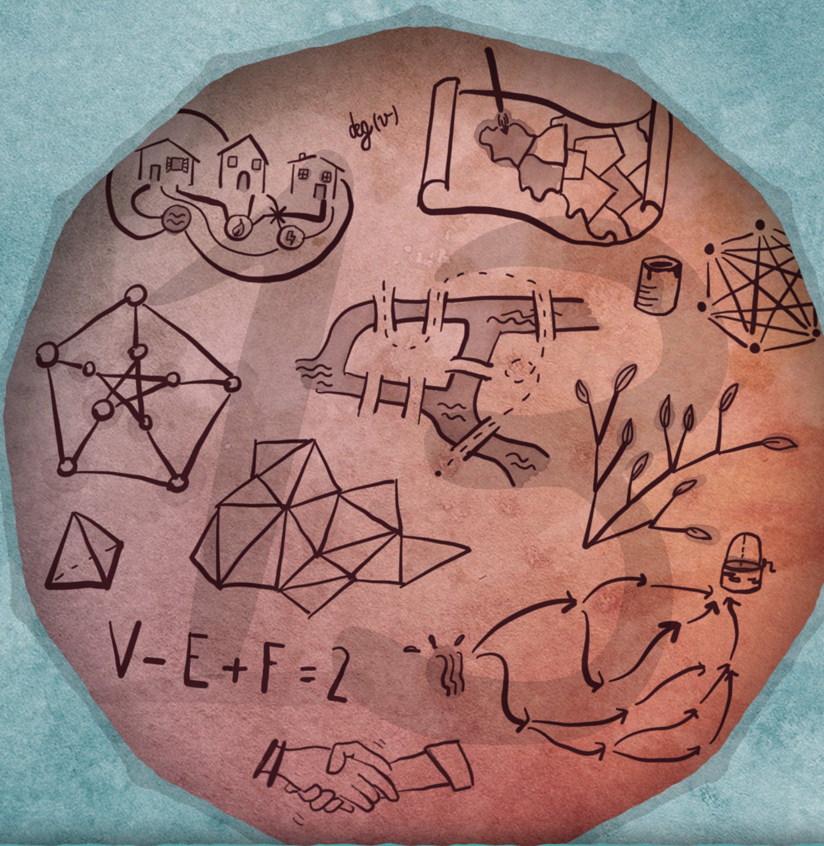
PISA, OTTOBRE 2021

Dipartimento di Matematica – Università di Pisa



UNIVERSITÀ DI PISA

Matematica il giornalino degli open days

notizie, giochi e pillole di matematica

Su indicazione della Commissione Terza Missione.

Realizzato con la collaborazione degli studenti counselling:
Ursula D'Elia, Antonio Di Nunzio, Dania Lazzarini

Coordinamento: Alessandra Caraceni, Giovanni Gaiffi

Grafica: Alessandra Caraceni

Introduzione

È con grande piacere che vi presentiamo il **Giornalino degli Open Days** numero 13. Questa pubblicazione, curata da professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, si rivolge principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

State magari considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario che abbia a che fare con la matematica? All'inizio di questo giornalino incontrerete una sezione che potrebbe fare al caso vostro, dedicata a una presentazione del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa. Oltre a una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica e sulle varie opportunità di cui godono i nostri studenti, vi troverete alcuni dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in matematica.

In questa edizione del giornalino saranno due studenti del nostro dipartimento, **Lucio Tanzini** e **Cristofer Villani**, a condurci alla scoperta di nuovi concetti matematici tramite il loro articolo divulgativo. Partendo dall'idea di equiscomponibilità per i poligoni, passeranno a parlarci di equiscomponibilità di poliedri. Come decidere se due poliedri siano o meno equiscomponibili? Sareste capaci, per esempio, di "tagliare" un cubo in pezzi e ricomporli a formare un tetraedro? Scopriremo che la risposta a queste domande ha a che fare con una quantità curiosa che si può calcolare per ciascun poliedro e che prende il nome di *invariante di Dehn*.

Nella nostra rubrica dedicata ai giochi matematici parleremo di *dilemma del prigioniero*, in particolare del gioco del dilemma dei prigioniero iterato. Come può la teoria dei giochi aiutarci ad analizzare situazioni in cui siamo costretti a fare scelte il cui risultato è influenzato dalle decisioni altrui, se su queste decisioni non abbiamo alcuna informazione? Impareremo cosa sia un *equilibrio di Nash* ed esploreremo alcune strategie applicabili nel caso di semplici giochi ripetuti.

Segue la rubrica "i problemi del giornalino": come sempre vi proponiamo una piccola raccolta di problemi matematici con i quali confrontarvi.

SCAN ME

Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo `https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days`!

Se voleste cimentarvi con altri problemi, visitate la pagina web del giornalino tramite il QR qui sopra: vi troverete una raccolta con gli esercizi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni. Non dimenticate di visitare la pagina in occasione dell'uscita del prossimo numero per scoprire le soluzioni ai problemi di questa edizione!

E se dopo tutto questo non siete ancora sazi di matematica, niente paura: la nostra ultima rubrica contiene un ampio assortimento di consigli di lettura, nonché una lista di film e una di link a siti web e a canali youtube che potrebbero fare al caso vostro.

Indice

Il corso di laurea in Matematica

Stai scegliendo che cosa fare all'univesità e sei incuriosito da matematica, ma non sai bene a cosa ti potrà portare?

Proveremo ad aiutarti a chiarire un po' le idee mostrandoti in cosa consiste il corso di Laurea in Matematica qui a Pisa e le numerose opportunità che ha da offrirti sia per quanto riguarda il percorso universitario che per le prospettive future.

1 Il corso di laurea a Pisa

Il Corso di Laurea in Matematica si divide in Laurea Triennale e Laurea Magistrale. La prima corrisponde al titolo internazionale *Bachelor's degree* e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici; la seconda, invece, è internazionalmente identificata con il *Master's degree*, e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

Il corso di laurea triennale a Pisa offre una solida preparazione di base nei vari settori della matematica, attraverso una serie di esami obbligatori. Tuttavia, al secondo e (soprattutto) al terzo anno sono previsti esami a scelta: in questo modo, grazie alla gran quantità di corsi a scelta attivati, ognuno può approfondire gli argomenti che ha trovato di maggior interesse. Il corso di laurea triennale è ulteriormente distinto in due curricula (tra cui bisogna scegliere subito, con la possibilità di cambiare in seguito):

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

Il primo, più teorico, prevede anche una più approfondita preparazione in Fisica, mentre il secondo è più applicativo ed integra lo studio della Matematica con quello dell'Informatica. Nella Tabella 1 sono riportati i due piani di studi.

<table>
<tr><th>Fondamentale</th><th>Computazionale</th></tr>
<tr><td colspan="2">I anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aritmetica (9 CFU)
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)
Laboratorio di introduzione alla matematica computazionale (6 CFU)
Analisi matematica 1 (15 CFU)
Geometria 1 (15 CFU)
Fisica I con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">II anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algebra 1 (6 CFU)
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)
Inglese scientifico (6 CFU)
Analisi matematica 2 (12 CFU)
Geometria 2 (12 CFU)
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Esame a scelta (6 CFU)</td><td>Algoritmi e strutture dati (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">III anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meccanica razionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Fisica II (9 CFU)
Fisica III (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)

4 Esami a scelta (24 CFU)</td><td>Calcolo scientifico (6 CFU)
Laboratorio computazionale (6 CFU)
Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
Ricerca operativa (6 CFU)
3 Esami a scelta (18 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prova finale (9 CFU)</td></tr>
</table>

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2021/2022 (vedi [4]).

La maggior parte dei laureati triennali sceglie di proseguire gli studi con la magistrale restando a Pisa. I curricula in cui è diviso il corso di laurea magistrale sono cinque: applicativo, didattico, generale, modellistico e teorico. In questo modo, offre la possibiltà ad ogni studente di specializzare il proprio piano di studi nel ramo che più lo ha interessato e appassionato durante i precedenti anni.

Il nostro dipartimento collabora inoltre con alcune università estere grazie ad accordi internazionali. Ricordiamo per esempio l'accordo con la Hokkaido University, che consente il conseguimento di un titolo congiunto (*double degree*). Ci sono anche gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio oppure lavorare alla tesi presso un'al-tra università europea. Attualmente sono attivi accordi con questo tipo con 36 corsi di studio in Matematica europei. Simili agli accordi Erasmus sono gli accordi SEMP (Swiss European Mobility Program); abbiamo

SCAN ME

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

accordi attivi con le Università di Basilea, Friburgo, Ginevra, Losanna e con l'ETH di Zurigo.

Puoi trovare altre informazioni e rimanere aggiornato sui nuovi accordi sulla pagina dell'Internazionalizzazione

`http://www.dm.unipi.it/webnew/it/internazionalizzazione/internazionalizzazione`

Per ogni altra curiosità, visita la pagina del Corso di Studi seguendo il link `http://www.dm.unipi.it/webnew/it/cds/home-cds` oppure inquadrando il QR qui sopra!

2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? La pagina de "I Mestieri dei Matematici"

`https://www.mestierideimatematici.it`

cerca di rispondere a questa domande, e magari ti stupirà!

In generale risulta che i laureati in matematica sono soddisfatti della scelta fatta e godono di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare:

- I dati di Almalaurea (vedi [1], [3]) riportano che il tasso di occupazione dei laureati magistrali in matematica all'Università di Pisa a tre anni dalla laurea è del 100% (questa percentuale include coloro, circa la metà, che sono impegnati in un dottorato di ricerca).

- Sempre dal sito di Almalaurea [2] si possono trarre i seguenti dati che riguardano in particolare l'ateneo pisano, vedi [3]:
  - Il 93,9% dei laureati magistrali si dichiara soddisfatto degli studi.
  - Il 98% dei laureati magistrali si dichiara soddisfatto dei rapporti con in docenti.

Da alcuni anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo nasce il progetto "Matematici al Lavoro", del quale potete scoprire tutti i dettagli visitando la pagina web

`https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0`

3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge di solito all'inizio di settembre in diverse sedi in Italia tra cui una è proprio Pisa.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (erano 30 per l'anno accademico 2021/2022), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i due anni successivi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

Anche per il corso di laurea magistrale sono bandite delle borse INdAM: per esempio per l'anno 2021/2022 erano 8, più 5 dedicate in particolare a chi si iscrive a Pisa, di cui almeno 3 per studentesse, come segno concreto della nostra attenzione alla parità di genere.

È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Puoi trovare tutte le informazioni sul sito `https://www.altamatematica.it`.

Gli studenti che si iscrivono qui a Pisa possono richiedere anche una borsa di studio del DSU (Azienda della Regione Toscana per il Diritto allo Studio Universitario) sulla base del reddito familiare. I vincitori di questa borsa ottengono l'esonero dalle tasse universitarie, un contributo per le spese e in alcuni casi anche vitto e alloggio gratuiti. Per avere maggiori informazioni, puoi visitare il sito `https://www.dsu.toscana.it/`.

Bibliografia

[1] `https://www2.almalaurea.it/cgi-php/universita/statistiche/framescheda.php?anno=2019&corstipo=LS&ateneo=tutti&facolta=tutti&gruppo=1&pa=tutti&classe=11045&postcorso=tutti&isstella=0&annolau=tutti&condocc=tutti&iscrls=tutti&disaggregazione=&LANG=it&CONFIG=occupazione`

[2] `https://www2.almalaurea.it`

[3] `https://www.dm.unipi.it/webnew/it/qualita/situazione-occupazionale-dei-laureati`

[4] `http://www.dm.unipi.it/webnew/sites/default/files/Reg_LT_2122.pdf`

Poliedri Equiscomponibili e Teorema di Dehn

di **Lucio Tanzini** e **Cristofer Villani**, studenti del Corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Pisa

Consideriamo due poligoni, P e Q, nel piano, e supponiamo di suddividerli in pezzi poligonali più piccoli. Ci chiediamo quando P e Q siano *equiscomponibili*, cioè quando riusciamo a suddividerli in modo che i pezzi di P siano congruenti a quelli di Q.

Sicuramente, perché P e Q siano equiscomponibili, è necessario che abbiano la stessa area. Sorprendentemente, ciò è anche sufficiente: se cioè scegliamo due poligoni con la stessa area, riusciamo sempre a decomporli in pezzi poligonali a due a due congruenti. Una dimostrazione interattiva di questo risultato, il *teorema di Wallace-Bolyai-Gerwien*, si trova in [2].

Sorge allora la domanda: è vero anche per i poliedri? Più precisamente, dato un poliedro P, una *decomposizione* (poliedrica) di P (Figura 1) è un insieme di poliedri $P_1, \ldots, P_n$ tali che

i) $P_1 \cup \cdots \cup P_n = P$;

ii) per ogni $1 \leq i, j \leq n$, P_i e P_j sono *quasi disgiunti*, cioè l'intersezione $P_i \cap P_j$ è contenuta nell'unione delle loro facce.

Ancora una volta, si ha certamente che, se due poliedri P e Q sono *equiscomponibili*, cioè ammettono decomposizioni $P_1, \ldots, P_n$ e $Q_1, \ldots, Q_n$ in cui P_i e Q_i sono congruenti per ogni i, allora P e Q hanno lo stesso volume.

Stavolta, però, scopriremo che il viceversa non è vero. In particolare, servendoci di uno strumento algebrico introdotto dal matematico Max Dehn nel 1901, che prende appunto il nome di *invariante di Dehn*, mostreremo che *un cubo e un tetraedro non sono mai equiscomponibili*.

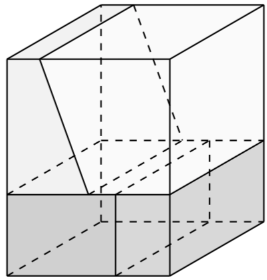


Figura 1: Una decomposizione di un parallelepipedo in quattro poliedri.

1 Angoli diedrali

Sia P un poliedro, e sia l un suo spigolo. Oltre a considerare la sua lunghezza ℓ, possiamo associare a l un angolo θ, nel seguente modo.

Consideriamo le due facce di P, diciamo F, G, che si intersecano in l, e scegliamo un piano π perpendicolare a l, in modo che π intersechi F, G in due segmenti, r e s. Chiamiamo *angolo diedrale* associato a l l'angolo (piano) θ tra i segmenti r e s.

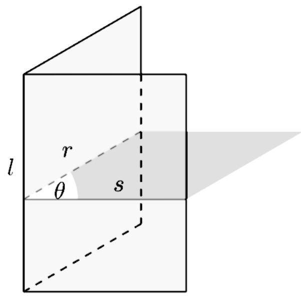


Figura 2: Angolo diedrale θ associato allo spigolo l.

Nel seguito, misureremo gli angoli diedrali guardandoli come frazioni dell'angolo giro: pertanto, se ad esempio P è un cubo di volume unitario ed l è un qualsiasi suo spigolo, vale $\ell = 1$, e l'angolo diedrale associato a l è retto, per cui poniamo $\theta = 1/4$.

2 L'invariante di Dehn

Possiamo adesso associare a uno spigolo l di un poliedro P due oggetti: la sua lunghezza ℓ e il suo angolo diedrale θ.

Per ottenere il nostro invariante, abbiamo bisogno di un modo di legarli.

Presi due numeri reali $\ell, \theta \in \mathbb{R}$, diciamo che il simbolo formale $\ell \otimes_{\mathbb{Q}} \theta$ (o, più semplicemente, $\ell \otimes \theta$) è un *tensore*. Stabiliamo inoltre che, se $q \in \mathbb{Q}$ è un numero razionale e T, T' sono tensori, anche i simboli

$$0, \qquad T + T', \qquad q \cdot T$$

sono tensori. Quindi, sono ad esempio tensori

$$\ell_1 \otimes \theta_1 + \ell_2 \otimes \theta_2, \qquad q_1 \cdot (\ell_1 \otimes \theta_1) + \ell_2 \otimes \theta_2 + q_3 \cdot (\ell_3 \otimes \theta_3),$$

e così via, per $\ell_i, \theta_i \in \mathbb{R}$, e $q_i \in \mathbb{Q}$.

Riferendoci ai tensori come simboli formali, intendiamo che non pensiamo a un tensore come a un preciso oggetto matematico, ma come a una stringa di caratteri che possiamo manipolare algebricamente secondo regole precise. Le mosse possibili sono le seguenti.

S) Se ℓ, ℓ', θ sono numeri reali, valgono

$$\begin{aligned}(\ell + \ell') \otimes \theta =& \ell \otimes \theta + \ell' \otimes \theta, \\ \ell \otimes (\theta + \theta') =& \ell \otimes \theta + \ell \otimes \theta';\end{aligned}$$

P) Se $q \in \mathbb{Q}$ e $\ell, \theta \in \mathbb{R}$, vale

$$q \cdot (\ell \otimes \theta) = (q \cdot \ell) \otimes \theta = \ell \otimes (q \cdot \theta);$$

R) Se $\ell, \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ e $\theta - \theta'$ è un numero razionale, allora

$$\ell \otimes \theta = \ell \otimes \theta'$$

e, in particolare, $\ell \otimes \theta = \ell \otimes 0$ se $\theta \in \mathbb{Q}$;

U) Vale $\ell \otimes \theta = 0$ se e solo se $\ell = 0$ oppure $\theta \in \mathbb{Q}$.

Rimarchiamo che la possibilità di sommare numeri razionali senza cambiare il tensore (mossa (R)) vale solo per il termine *a destra* di $\otimes$ (l'angolo diedrale), e che è possibile spostare un coefficiente q tra i termini del tensore e fuori da esso (mossa (P)) *solo se q è razionale*.

Osserviamo inoltre che, con le mosse che abbiamo stabilito, non possiamo decidere se due tensori qualsiasi sono uguali; d'altra parte, possiamo in effetti cercare di ridurre un tensore T nella forma $\ell \otimes \theta$ usando le regole (S), (P) e (R); se ci riusciamo, sappiamo dire se è uguale a zero oppure no grazie alla regola (U). Vedremo che, per i nostri scopi, questo è sufficiente.

Possiamo ora definire l'invariante di Dehn.

Definizione 1. *Sia P un poliedro con n spigoli, diciamo $l_1, \ldots, l_n$, e siano $\ell_1, \ldots, \ell_n$ e $\theta_1, \ldots, \theta_n$ le lunghezze e gli angoli diedrali rispettivi.* L'invariante di Dehn *associato a P è il tensore*

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \ell_1 \otimes \theta_1 + \cdots + \ell_n \otimes \theta_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ell_i \otimes \theta_i. \end{aligned}$$

Supponiamo, per esempio, che P sia un cubo di lato ℓ, con $\ell \in \mathbb{R}$. Si ha allora $\ell_i = \ell$ e $\theta_i = 1/4$ per ogni $i = 1, \ldots, 12$, da cui

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \ell \otimes 1/4 + \cdots + \ell \otimes 1/4 && \text{(S)} \\ &= (\ell + \cdots + \ell) \otimes 1/4 \\ &= (12 \cdot \ell) \otimes 1/4 && \text{(R)} \\ &= (12 \cdot \ell) \otimes 0 && \text{(U)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3 L'invariante di Dehn del tetraedro

Consideriamo adesso un tetraedro regolare Q, tale che uno spigolo l abbia lunghezza ℓ_Q e angolo diedrale θ_Q. L'invariante di Dehn di Q è allora

$$\langle Q \rangle = \ell_Q \otimes \theta_Q + \cdots + \ell_Q \otimes \theta_Q = (6 \cdot \ell_Q) \otimes \theta_Q$$

che, per la mossa (U), è uguale a zero se e solo se $\theta_Q = 0$, cioè θ_Q è un numero razionale. Vogliamo vedere che, in effetti, $\theta_Q \notin \mathbb{Q}$, da cui $\langle Q \rangle \neq 0$.

Iniziamo calcolando θ_Q. Chiamiamo F, G le due facce del tetraedro che si intersecano in l, e fissiamo una delle due, diciamo F, come base di Q. Consideriamo ora il triangolo rettangolo T i cui lati sono, rispettivamente,

i) l'altezza h del tetraedro rispetto a F;

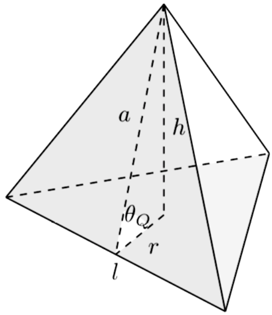


Figura 3: Il tetraedro Q. Le facce ombreggiate sono la faccia F (quella inferiore) e la faccia G.

ii) il raggio r di F su l;

iii) l'apotema a di Q su G.

Per le proprietà elementari dei triangoli, e dato che F e G sono congruenti, sappiamo che $r = \frac{1}{3}a$. Inoltre, dalla definizione segue che $2\pi\theta_Q$ è l'angolo tra r e a in T (il fattore 2π viene dal fatto che stiamo misurando gli angoli come frazioni dell'angolo giro). Pertanto,

$$\cos(2\pi\theta_Q) = r/a = \frac{1}{3}.$$

Per mostrare che $\theta_Q \notin \mathbb{Q}$, supporremo che sia un numero razionale e, usando l'uguaglianza sopra, vedremo come questo conduca a un assurdo.

Supponiamo allora che $\theta_Q = m/n$, con m/n una frazione ridotta ai minimi termini. Ne segue che, se chiamiamo $\alpha = 2\pi\theta_Q$,

$$n\alpha = 2\pi m$$

è un multiplo intero dell'angolo giro. Di conseguenza, deve essere

$$\cos(n\alpha) = 1.$$

Per vedere che questo è impossibile, cerchiamo una relazione che leghi $\cos(n\alpha)$ a $\cos(\alpha)$: come saprete, se $n = 2$, tale relazione è data dalla formula di duplicazione del coseno, vale a dire

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1.$$

Se quindi poniamo $\cos(\alpha) = x$ e $\cos(2\alpha) = T_2(x)$, otteniamo $T_2(x) = 2x^2 - 1$. Vorremmo ottenere un risultato analogo in generale, ponendo $T_n(x) = \cos(n\alpha)$. Per farlo, osserviamo che, per $n > 2$, le formule di addizione e sottrazione danno

$$\cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha + \alpha) = \cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha)$$
$$\cos((n-1)\alpha) = \cos(n\alpha - \alpha) = \cos(n\alpha)\cos(\alpha) + \sin(n\alpha)\sin(\alpha)$$

da cui, sommando membro a membro,

$$\cos((n+1)\alpha) + \cos((n-1)\alpha) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha),$$

ovvero

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Non ci interessa conoscere esplicitamente la formula per $T_n(x)$, ma da questa relazione si deducono facilmente, usando un ragionamento induttivo, due cose:

i) per ogni $n \geq 1$, $T_n(x)$ è un polinomio (detto *polinomio di Čebyšev di prima specie*) di grado n, diciamo

$$T_n(x) = c^{(n)}x^n + \text{ termini di grado più basso;}$$

ii) per ogni $n \geq 1$, $c^{(n)} = 2^{n-1}$.

Se avete familiarità con l'induzione, non avrete problemi a verificare (i) e (ii); altrimenti, potete assumere che valgano, limitandovi a controllare che siano vere nel caso $n = 2$.

Torniamo adesso alla nostra uguaglianza, che possiamo riscrivere come

$$T_n(x) = 1,$$

dove $x = \cos(\alpha)$ è uguale, nel nostro caso, a $1/3$. Usando le proprietà di T_n appena viste, otteniamo

$$2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \text{ termini di grado più basso} = 1.$$

Tuttavia, moltiplicando i due membri dell'uguaglianza per 3^n, si ha

$$2^{n-1} + \text{ termini divisibili per } 3 = 3^n,$$

il che vorrebbe dire che 2^{n-1} è uguale alla differenza di due multipli di 3, e quindi è a sua volta divisibile per 3. Dato che questo non è possibile, ne deduciamo che la nostra assunzione $\theta_Q \in \mathbb{Q}$ è assurda, e θ_Q è un numero irrazionale.

In conclusione, per quanto osservato all'inizio del paragrafo, l'invariante di Dehn di un tetraedro regolare è diverso da 0.

4 Il teorema di Dehn

Abbiamo quindi ottenuto che, se P e Q sono rispettivamente un cubo e un tetraedro regolare, $\langle P \rangle \neq \langle Q \rangle$. Per concludere, ci resta allora da provare il seguente risultato.

Teorema 1 (Dehn)**.** *Se P e Q sono due poliedri equiscomponibili, allora*

$$\langle P \rangle = \langle Q \rangle.$$

L'ingrediente fondamentale per la dimostrazione è la risposta alla seguente domanda: se decomponiamo un poliedro P nei pezzi $P_1, \ldots, P_n$, come si comporta l'invariante di Dehn $\langle P \rangle$ rispetto a $\langle P_1 \rangle, \ldots, \langle P_n \rangle$? Per i nostri scopi, possiamo limitarci a considerare decomposizioni più "pulite" di quelle definite inizialmente. Nello specifico,

Definizione 2. *Diciamo che una decomposizione $P_1, \ldots, P_n$ di un poliedro P è* netta *se, per ogni $1 \leq i, j \leq n$, l'intersezione $P_i \cap P_j$ è un vertice, uno spigolo o una faccia di entrambi.*

Per decomposizioni nette, l'invariante di Dehn è *additivo*, nel senso che

Proposizione 2. *Se $P_1, \ldots, P_n$ è una decomposizione netta di un poliedro P, allora*

$$\langle P \rangle = \langle P_1 \rangle + \cdots + \langle P_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_i \rangle.$$

Dimostrazione. Consideriamo uno spigolo l, di lunghezza $\ell(l)$, di uno dei poliedri P_i. Supponiamo che l sia contenuto in $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ (e non contenuto nei restanti P_j) con angoli diedrali $\theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_k}$ rispettivamente, e poniamo

$$\Theta_l = \theta_{i_1} + \cdots + \theta_{i_k}.$$

Dal fatto che la decomposizione è netta, abbiamo che i poliedri P_i che intersecano l in un suo segmento sono esattamente $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$, e pertanto

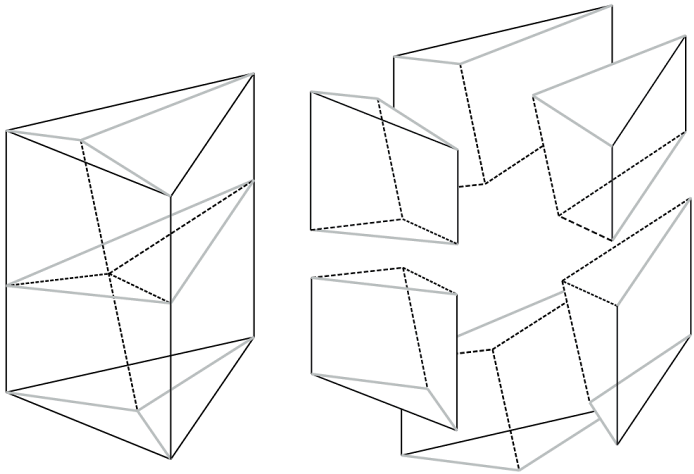


Figura 4: Decomposizione netta di un prisma a base triangolare, in cui gli spigoli di tipo (i), (ii), (iii) sono tratteggiati, grigi e neri rispettivamente.

i) se l è interno a P, cioè non contenuto nell'unione delle sue facce, i P_{i_j} descrivono complessivamente attorno a l un angolo giro, cioè $\Theta_l = 1$;

ii) se l è contenuto nell'unione delle facce di P, ma non in un suo spigolo, i P_{i_j} descrivono complessivamente attorno a l un angolo piatto, e $\Theta_l = 1/2$;

iii) se l è contenuto in uno spigolo L di P, Θ_l è proprio l'angolo diedrale θ_L associato a L in P.

Guardiamo ora $\langle P_1 \rangle + \cdots + \langle P_n \rangle$: per definizione, ognuno dei $\langle P_i \rangle$ è somma di tensori $\ell(l) \otimes \theta$, dove l è uno spigolo di P_i e θ è il suo angolo diedrale (in P_i).

Se esplicitiamo $\langle P_1 \rangle + \cdots + \langle P_n \rangle$ e raccogliamo i tensori che condividono lo stesso spigolo, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} \langle P_i \rangle = \sum_{l} \left(\ell(l) \otimes \theta_{i_1} + \cdots + \ell(l) \otimes \theta_{i_k} \right),$$

dove l varia tra gli spigoli distinti dei P_i e i θ_{i_j} (che dipendono da l) sono come sopra.

Di conseguenza, se l è come in (i) e ha lunghezza ℓ, otteniamo

$$\ell \otimes \theta_{i_1} + \cdots + \ell \otimes \theta_{i_k} = \ell \otimes (\theta_{i_1} + \cdots + \theta_{i_k}) = l \otimes \Theta_l = 0,$$

dato che $\Theta_l = 1 \in \mathbb{Q}$. Analogamente, se l è come in (ii),

$$\ell \otimes \theta_{i_1} + \cdots + \ell \otimes \theta_{i_k} = \ell \otimes 1/2 = 0,$$

mentre per l come in (iii) abbiamo

$$\ell \otimes \theta_{i_1} + \cdots + \ell \otimes \theta_{i_k} = \ell \otimes \Theta_l = \ell \otimes \theta_L.$$

Quindi, gli unici tensori che contano nella somma sopra sono quelli in cui l è contenuto in uno spigolo L di P. D'altra parte, poiché i P_i decompongono P, gli spigoli $l_1, \ldots, l_h$ dei P_i contenuti in uno *stesso* L sono tali che $L = l_1 \cup \cdots \cup l_h$, e inoltre

i) se L è lungo ℓ_L e l_i è lungo ℓ_i,

$$\ell_L = \ell_1 + \cdots + \ell_h;$$

ii) se θ_L è l'angolo diedrale associato a L in P, per ogni i si ha $\Theta_{l_i} = \theta_L$.

Ma allora, se nella somma sopra raccogliamo ulteriormente i tensori in cui l è contenuto in L, abbiamo addendi della forma

$$\ell_1 \otimes \theta_L + \cdots + \ell_h \otimes \theta_L = (\ell_1 + \cdots + \ell_h) \otimes \theta_L = \ell_L \otimes \theta_L.$$

In definitiva, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} \langle P_i \rangle = \sum_{L} \ell_L \otimes \theta_L$$

che, per definizione, è $\langle P \rangle$. $\square$

Prendiamo ora una decomposizione $P_1, \ldots, P_n$ *qualsiasi* di un poliedro P: se, per ogni faccia di ciascuno dei P_i, tracciamo il piano in cui tale faccia è contenuta, otteniamo che ogni P_i è decomposto dai piani tracciati in (finiti) poliedri $P_i^{(1)}, P_i^{(2)}, \ldots$ in modo che

i) per ogni i, $P_i^{(1)}, P_i^{(2)}, \ldots$ è una decomposizione *netta* di P_i;

ii) complessivamente, i $P_i^{(j)}$ danno una decomposizione *netta* di P.

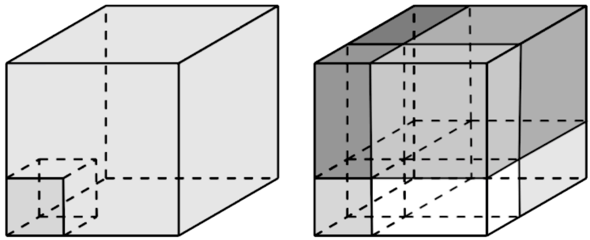


Figura 5: La decomposizione di cubo in un cubo più piccolo e nel suo complementare, resa netta tagliando il cubo con i piani associati alle facce del cubo piccolo.

Dimostrazione (del teorema). Supponiamo che due poliedri P e Q siano equiscomponibili, e prendiamo decomposizioni (qualsiasi) $P_1, \dots, P_n$ e $Q_1, \dots, Q_n$ di P e Q rispettivamente, in modo che il poliedro P_i sia congruente a Q_i.

Costruiamo quindi decomposizioni $P_i^{(j)}$ e $Q_i^{(j)}$ di P e Q come sopra: notiamo che, in generale, i pezzi delle decomposizioni non saranno a due a due congruenti.

Per ogni i, però, i $P_i^{(j)}$ danno una decomposizione netta di P_i: grazie alla proposizione 2, possiamo quindi scrivere

$$\langle P_i \rangle = \langle P_i^{(1)} \rangle + \langle P_i^{(2)} \rangle + \cdots ,$$

e complessivamente otteniamo

$$\sum_i \langle P_i \rangle = \sum_{i,j} \langle P_i^{(j)} \rangle .$$

Ma, ancora per la proposizione 2, il membro a destra dell'uguaglianza è proprio $\langle P \rangle$, dato che i $P_i^{(j)}$ forniscono una decomposizione netta di P.

D'altra parte, dato che P_i è congruente a Q_i, abbiamo in particolare che $\langle P_i \rangle = \langle Q_i \rangle$, e perciò

$$\sum_i \langle P_i \rangle = \sum_i \langle Q_i \rangle .$$

Applicando lo stesso discorso a Q, otteniamo allora

$$\sum_i \langle Q_i \rangle = \sum_{i,j} \langle Q_i^{(j)} \rangle = \langle Q \rangle ,$$

e unendo le uguaglianze trovate arriviamo a $\langle P\rangle = \langle Q\rangle$, che era quello che volevamo. $\square$

Abbiamo perciò mostrato che esistono poliedri con lo stesso volume che non sono equiscomponibili, usando il fatto che i loro invarianti di Dehn sono distinti.

Concludiamo notando che, nel 1965, J.P. Sydler ha dimostrato che vale anche il viceversa del teorema 1: se due poliedri P e Q hanno lo stesso volume e *lo stesso invariante di Dehn* allora sono, effettivamente, equiscomponibili.

5 Esercizi

1. Mostrate che un cubo P di lato ℓ e un prisma Q di altezza ℓ la cui base è un poligono regolare di area ℓ^2 sono equiscomponibili (potete usare il teorema di equiscomponibilità dei poligoni). Quanto vale $\langle Q\rangle$?

2. Calcolate gli angoli diedrali dei poliedri regolari, mostrando che hanno i valori seguenti.

Poliedro	**Angolo diedrale** $(2\pi\theta)$
Tetraedro	arccos$(1/3)$
Cubo	$\pi/2$
Ottaedro	arccos$(-1/3)$
Dodecaedro	arccos$(-\sqrt{5}/5)$
Icosaedro	arccos$(-\sqrt{5}/3)$

3. Usando l'esercizio precedente, mostrate che un cubo e un poliedro regolare sono equiscomponibili se e solo se sono congruenti.

Bibliografia

[1] M. Dehn, *Uber Dem Rauminhalt*, Math Ann. 55 (1902), pp. 465-478.

[2] D. Smirnov and Z. Epstein, *An interactive demonstration of the Wallace-Bolyai-Gerwien theorem*, `https://dmsm.github.io/scissors-congruence/`.

[3] R. Schwartz, *Dehn's Dissection Theorem*, `http://www.math.brown.edu/reschwar/Papers/dehn.pdf`.

[4] J.-P. Sydler, *Conditions necessarires et suffisiantes pour l'équivalence des polyedres de l'espace euclidean a trois dimensions*, Comment Math Helv. 40 (1965).

Il dilemma del prigioniero

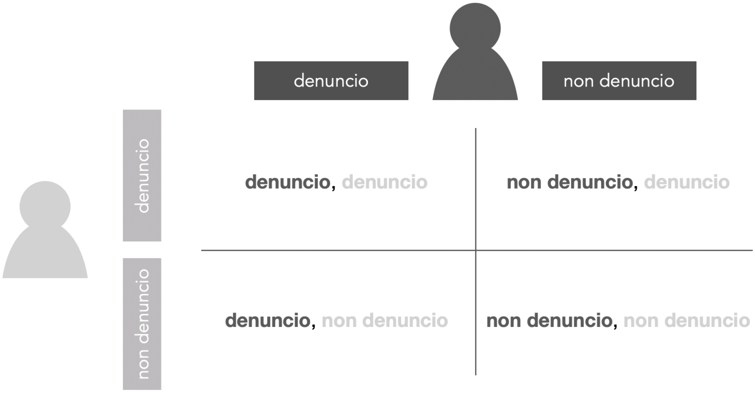
di ***Ursula D'Elia***, *studentessa del Corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Pisa*

1 Come giocare

Per prima cosa procurati dei bigliettini di carta da riempire in seguito, due penne e un timer. Il gioco si svolge tra due persone e consiste in 3 turni. Tu e l'altro giocatore vi sfidate a chi raggiunge il punteggio più alto al termine dei tre turni. All'inizio del gioco partite entrambi con 30 punti e ciò che accade ad ogni turno è quanto segue. Immaginate di essere due complici di un crimine; siete stati arrestati dalla polizia perché sospettati, ma attualmente non ci sono prove che incriminino nessuno dei due. La polizia non sa se il crimine è stato commesso da entrambi o da uno solo di voi e il suo unico strumento per scoprirlo è interrogarvi. Venite interrogati *separatamente*, quindi nessuno può ascoltare ciò che dice l'altro. La domanda che pone la polizia a ciascuno è: "L'altra persona che abbiamo arrestato è colpevole?". A questo punto ognuno deve scegliere se rispondere "sì", e quindi tradire l'altro, oppure "no", e quindi proteggerlo. Nella pratica il gioco si svolge come segue. Per ogni turno ciascuno di voi ha a disposizione un bigliettino bianco e una penna e uno qualsiasi di voi attiverà un timer di 30 secondi. Entro lo scadere del tempo ognuno sceglie se scrivere **denuncio** o **non denuncio** sul proprio foglio avendo cura che l'altro non possa vedere ciò che ha scritto. Alla fine di ogni turno rivelate ciò che avete scritto, il che risulta in quattro possibili scenari:

1. Entrambi avete scritto "denuncio": *ognuno perde 5 punti*.

   Entrambi avete scelto di consegnare l'altro alla polizia. Ora ci sono le prove necessarie a incriminarvi e la pena per ciò che avete commesso è di 10 anni di galera. Tuttavia, a ognuno di voi viene fatto uno sconto di pena di 5 anni dal momento che avete collaborato con la



polizia. Alla fine di un turno di questo tipo perdete entrambi 5 punti, che rappresentano gli anni di galera ricevuti.

2. Tu denunci ma l'altro giocatore non ti denuncia: *tu non perdi punti, l'altro ne perde 10*.

   Tu hai denunciato l'altro giocatore. Ora la polizia sa che è l'altro giocatore ad aver commesso il crimine. Inoltre, poiché l'altro non ti ha denunciato, la polizia ritiene che l'abbia commesso da solo. Tu ne esci salvo senza anni di galera, sei considerato innocente. L'altro giocatore è considerato colpevole e avrà 10 anni di galera senza alcuno sconto poiché non ha collaborato con la polizia.

3. Tu non denunci ma l'altro giocatore lo fa: *tu perdi 10 punti, l'altro non ne perde*.

   La situazione è simile alla precedente ma a ruoli invertiti.

4. Entrambi non denunciate: *ognuno perde 1 punto*.

   Entrambi avete scritto "non denuncio" sul foglio di carta. A questo punto la polizia non ha prove concrete contro di voi e non sa chi dei due ha commesso il crimine: prendete solo 1 anno di galera a testa.

Vediamo un esempio concreto di come potrebbe svolgersi una partita.

Turno 1 Hai deciso di iniziare in modo pacifico, allo scadere del timer tu hai scritto "non denuncio". Scopri poi che l'altro invece ha scritto "denuncio". Alla fine di questo turno ti rimangono 20 punti mentre l'altro giocatore ha ancora i 30 punti iniziali intatti.

Turno 2 Vuoi vendicarti del passo falso che ha fatto l'altro giocatore, allo scadere del timer scrivi "denuncio" e così fa anche l'altro. Perdete entrambi 5 punti: tu sei a 15 mentre lui ne ha 25.

Turno 3 A questo punto sai che l'altro giocatore non vuole rischiare di finire la partita in parità ma vuole vincere, quindi ti denuncerà e a te non resta che fare altrettanto. Alla fine di questo turno e quindi alla fine del gioco tu hai 5 punti e lui 20.

Hai perso questa partita, ma analizzando un po' meglio le strategie a disposizione si può migliorare la tattica di gioco: vedremo come nelle sezioni successive.

2 Strategie e situazioni di equilibrio

Semplifichiamo per un momento la partita e immaginiamo che ci sia un solo turno. Questo caso è noto come "dilemma del prigioniero" ed è stato proposto inizialmente nel 1950 da Merrill Flood e Melvin Dresher, due matematici americani che lavoravano alla RAND Corporation[1]. Successivamente verrà formalizzato con precisione da Albert Tucker. Questo "dilemma" è storicamente importante poiché è l'esempio che si utilizza tradizionalmente come introduzione alla teoria dei giochi.

La teoria dei giochi è una branca della matematica che studia i modelli di interazione strategica tra diversi agenti. In altre parole, descrive matematicamente tutte quelle situazioni in cui alcuni individui devono prendere delle decisioni e l'eventuale guadagno o perdita per il singolo agente non dipende solo dalla sua decisione individuale, ma anche dalle decisioni che hanno preso gli altri. Ogni situazione di questo tipo (con qualche assunzione tecnica aggiuntiva) è chiamata *gioco*: in questo contesto la parola non si riferisce necessariamente a un gioco nel senso tradizionale del termine, e in effetti alcuni esempi di situazioni che possono essere trattate come giochi sono un investimento finanziario, una guerra, un appunta-

[1] La RAND Corporation è un centro di ricerca scientifica statunitense, particolarmente attivo nell'ambito militare. Nel periodo della guerra fredda, durante gli anni 50, gli scienziati della RAND utilizzavano molta teoria dei giochi. Lo stesso John Nash ha lavorato alla RAND tra il 1950 e il 1954.

mento romantico... Anche la versione reale del dilemma del prigioniero qui presentato, in cui due veri criminali vengono arrestati dalla polizia, è un gioco nel senso della teoria dei giochi.

Nella teoria classica dei giochi, gli agenti vengono sempre considerati *razionali*, nel senso che ognuno di loro ha come fine massimizzare il proprio guadagno e minimizzare la propria perdita. Non vengono contemplati casi in cui un giocatore compie una scelta che non avrebbe alcun interesse a compiere in termini di guadagni concreti.

Vediamo come la teoria dei giochi possa aiutarci a comprendere meglio il dilemma del prigioniero, cioè il "gioco" del prigioniero composto da un solo turno. Questo esempio appartiene a una classe di giochi molto ampia chiamata *giochi non cooperativi*, in cui ogni giocatore prende la propria decisione senza essere a conoscenza di ciò che hanno scelto di fare gli altri: ai giocatori non è consentito confrontarsi e accordarsi. Questo aspetto del dilemma del prigioniero è fondamentale per comprenderne le dinamiche: in questo tipo di giochi può capitare che i giocatori rinuncino alla cooperazione anche se questa consentirebbe loro di ottenere il guadagno più alto possibile. Ciò è dovuto al voler minimizzare il rischio di perdita possibile e all'ignoranza di ciò che l'altro deciderà.

Nella fattispecie, essendo all'oscuro di ciò che farà l'altro giocatore, quello che ci conviene fare secondo la teoria dei giochi è **denunciare**. Per spiegare perché introduciamo una nozione matematica fondamentale nella teoria dei giochi: *l'equilibrio di Nash*.

John Nash fu un matematico statunitense di incredibile prestigio, che rivoluzionò la teoria dei giochi durante il suo dottorato a Princeton introducendo questo nuovo concetto di equilibrio. Le sue scoperte gli valsero il premio Nobel per l'economia ricevuto nel 1994[2].

Intuitivamente, un equilibrio di Nash è una combinazione di scelte compiute da tutti i singoli giocatori in cui

> *ogni giocatore non ha nessun interesse a cambiare la propria scelta una volta che viene a conoscenza di ciò che hanno scelto gli altri.*

In altre parole, consideriamo un gioco in cui nessuno sa cosa faranno gli altri e supponiamo che ognuno prenda la sua decisione finale; questo insieme di decisioni sarà un equilibrio di Nash se ogni giocatore, nel momento in cui vengono rivelate le scelte degli altri, scopre che la sua scelta

[2] John Nash non diede contributi matematici solo nel campo della teoria dei giochi, ma anche in molti altri, quali l'analisi matematica e la geometria. Egli risolse anche il diciannovesimo problema di Hilbert. Per saperne di più su di lui ti consiglio il film "A Beautiful Mind" e/o il libro "Il genio dei numeri" di Sylvia Nasar.

è la migliore che potesse fare in risposta a quelle azioni specifiche compiute dagli altri giocatori. Fissate queste scelte finali da parte degli altri, egli non avrebbe nessun interesse a cambiare la propria, nel senso che non avrebbe modo di aumentare il proprio guadagno finale.

Analizziamo in concreto il caso del dilemma del prigioniero, schematizzando anzitutto la situazione con la seguente tabella:

Figura 1: Punteggi nel dilemma del prigioniero.

Analizziamo la situazione in cui il giocatore 1 denuncia e il giocatore 2 non denuncia (riquadro in basso a sinistra). Questa è una situazione di equilibrio di Nash?

Innanzitutto ricordiamo che la situazione di equilibrio è una situazione in cui ogni giocatore non ha interesse a cambiare la propria scelta, quindi dovremo controllare il punto di vista di ogni giocatore singolarmente.

Iniziamo dal giocatore 1. Ciò che dobbiamo controllare, secondo la definizione, è che una volta scoperta la scelta dell'avversario (e quindi tenendo quella scelta fissata), il giocatore 1 non abbia alcun interesse a cambiare la propria. È davvero così?

Dobbiamo ragionare come se il giocatore 1 sapesse in partenza che l'altro sceglierà di non denunciare, cioè che gli unici scenari finali possibili sono quelli della riga più in basso. Allora la cosa migliore da fare per il giocatore 1 è proprio denunciare: in questo modo, egli non perderà nessun punto. Al contrario, perde 1 se decide di non denunciare nemmeno lui (Figura 2). Quindi il giocatore 1 non ha alcun interesse a cambiare la propria scelta da "denuncio" a "non denuncio", sapendo che l'altro non

Figura 2: Sapendo che il giocatore 2 non denuncia, il giocatore 1 è soddisfatto della propria scelta di denunciare.

denuncia, e pertanto, dal punto di vista del giocatore 1, la definizione è verificata.

Questo implica che la situazione "giocatore 1 denuncia, giocatore 2 non denuncia" è un equilibrio di Nash? Non abbiamo ancora tutte le informazioni per capirlo, bisogna controllare che la stessa soddisfazione ci sia dal punto di vista del giocatore 2.

Supponiamo che il giocatore 2 sappia fin dall'inizio che l'altro lo denuncerà (fissiamo quindi la scelta dell'altro giocatore per controllare la definizione). Nella situazione che stiamo analizzando, il giocatore 2 sceglie di non denunciare e perde ben 10 punti. Ma, se avesse saputo fin dall'inizio che l'altro lo avrebbe denunciato, allora avrebbe fatto meglio a fare lo stesso, perdendo in questo modo soltanto 5 punti!

Quindi il giocatore 2 ha interesse a cambiare la propria scelta, il che fa sì che questa situazione non sia un equilibrio di Nash, dato che c'è almeno un giocatore insoddisfatto in termini di guadagno concreto.

Ti ricordo che nella teoria dei giochi non cooperativi la soddisfazione del giocatore si esprime in termini di guadagno concreto del singolo (più o meno anni di prigione) e non dipende dal guadagno comune dei giocatori (non c'è cooperazione, ogni giocatore pensa a se stesso). Questo tipo di punto di vista è dovuto al fatto che siamo in una situazione di incertezza in cui al momento della nostra singola decisione non sappiamo nel frattempo cosa ha deciso l'altro giocatore.

Si potrebbe erroneamente pensare che una situazione soddisfacente per entrambi (nei termini dell'equilibrio di Nash) possa essere quella in basso a destra nella Figura 1, cioè quella in cui entrambi i giocatori non denunciano restando leali uno all'altro. Effettivamente quella è la situazione migliore da un punto di vista collettivo: se sommiamo gli anni di galera totali nelle quattro situazioni, in tutte otteniamo 10 eccetto quella

Figura 3: Né la situazione a sinistra né quella a destra sono equilibri di Nash: la prima è insoddisfacente per il giocatore 2, la seconda per entrambi i giocatori.

in cui entrambi non denunciano. Questo però non deve trarci in inganno e farci pensare che quest'ultima sia un equilibrio di Nash: vediamo perché.

Nel momento in cui il singolo giocatore viene a scoprire che l'altro è rimasto in silenzio, si pente di essere rimasto in silenzio anche lui: fissata la scelta "non denuncio" dell'altro giocatore, il primo giocatore prende 1 anno di galera non denunciando, ma se avesse la possibilità di cambiare scelta e denunciare, ne otterrebbe 0. Il ragionamento può essere ripetuto in maniera speculare per il secondo giocatore. Quindi questa scelta è insoddisfacente (in termini di guadagno concreto individuale) per entrambi; non si tratta perciò di un equilibrio di Nash.

L'equilibrio di Nash del dilemma del prigioniero è in realtà quello in cui entrambi denunciano. Per verificarlo, dobbiamo metterci dalla parte di un giocatore e verificare che la scelta di denunciare l'altro sia la migliore che avrebbe potuto fare, una volta scoperto che anche l'altro lo ha denunciato. Supponi quindi di venire a sapere che l'altro ti denuncerà e che ti venga data la possibilità di cambiare la tua scelta: sicuramente vorrai mantenere la scelta "denuncio", dato che risulta in 5 anni di galera per te anziché 10! Dal momento che lo stesso ragionamento può essere ripetuto identicamente per l'avversario, questa situazione è un equilibrio di Nash.

In conclusione, gli equilibri di Nash sono situazioni che possono nascere nell'incertezza delle decisioni degli altri giocatori. Essi mostrano la complessità del processo decisionale. Non sempre sono la scelta migliore da fare, a volte non sono ottimali per nessuno, a volte sono ottimali solo per qualcuno e questo mette in evidenza quanto sia importante fare accordi e avere la possibilità di cooperare. Altre volte ancora possono esserci più equilibri di Nash, il che fa capire la difficoltà nel prevedere ciò che accadrà.

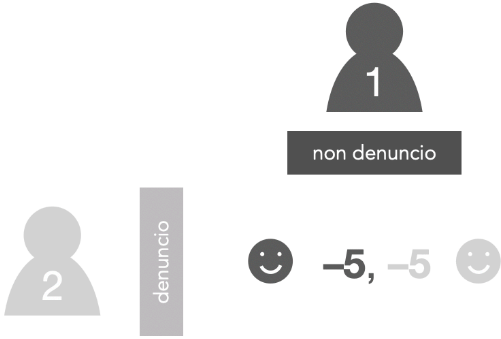


Figura 4: La situazione raffigurata, quella in cui entrambi i giocatori scelgono di denunciare, è un equilibrio di Nash!

3 Il "gioco" del prigioniero

Hai quindi scoperto che esiste un'intera branca della matematica (che in realtà coinvolge anche l'economia, la politica, la biologia, l'informatica, la sociologia e molte altre discipline) chiamata "Teoria dei Giochi" che fa modelli matematici su come prendere decisioni. Hai conosciuto quello che è probabilmente il più famoso *toy model*[3] di "gioco", cioè il dilemma del prigioniero, e hai imparato la nozione di equilibrio di Nash. Ma come va a finire il "gioco del prigioniero" da cui eravamo partiti?

Il "gioco" del prigioniero consiste in una ripetizione del dilemma del prigioniero; appartiene infatti alla grande classe dei *giochi ripetuti*, che a sua volta fa parte della classe dei *giochi dinamici*. Analizzare giochi dinamici è più complesso rispetto ad analizzare giochi statici, cioè quelli che, come il dilemma del prigioniero, si svolgono in un solo turno. Anche la nozione di equilibrio di Nash viene ampliata e generalizzata. Ciò che è interessante del dilemma del prigioniero in versione ripetuta è che, se ripetuto un numero finito di volte, la situazione di equilibrio è banalmente denunciare l'altro sempre, mentre se si immagina un dilemma del prigioniero infinitamente ripetuto le cose cambiano. La situazione di denunciare l'altro a ogni turno resta un equilibrio ma altre due strategie interessanti sono le seguenti: la *grim strategy* e la *tit-for-tat strategy*, che potremmo

[3] Un *toy model*, ovvero un modello giocattolo, è una versione estremamente semplificata di un problema più generale che si vuole affrontare. Serve a fornire un'idea intuitiva degli aspetti fondamentali che riguardano problemi più complessi.

tradurre rispettivamente come la strategia "spietata" e la strategia "pan per focaccia".

La strategia spietata per un giocatore si svolge come segue: appena l'altro denuncia, a partire dal turno successivo il giocatore sceglierà sempre di denunciare. Questo è un tipo di strategia che può ispirare collaborazione tra i due giocatori, cosa che non accade invece nel dilemma del prigioniero non ripetuto. Notiamo però che la collaborazione in questo caso è abbastanza instabile, basta solo una volta in cui uno dei due denunci per mettere completamente fine alla collaborazione.

La strategia pan per focaccia invece consiste nel cominciare cooperando e successivamente copiare esattamente ciò che sceglie l'altro di volta in volta. Quindi, se l'altro giocatore ha scelto di non denunciare al turno $n-1$, tu gliene sarai grato e non denuncerai al turno successivo n.

Molti studiosi hanno approfondito lo studio del dilemma del prigioniero ripetuto, effettuando anche dei veri e propri esperimenti. Chiaramente gli esperimenti consistono in un numero *finito* di ripetizioni del dilemma del prigioniero. Di conseguenza, ci si potrebbe aspettare che tutte le partite si svolgano in modo banale: tutti denunciano a ogni turno. Eppure non è questo che è accaduto in concreto. A volte i giocatori hanno scelto la cooperazione. Uno dei più famosi esperimenti di questo tipo è noto come "i tornei di Axelrod". Robert Axelrod, professore dell'università del Michigan, nel 1981 invitò alcuni interessati a elaborare dei programmi (in senso informatico) che implementassero una strategia per giocare il Dilemma del prigioniero ripetuto un numero finito ma alto di volte (200). In 14 aderirono a partecipare all'esperimento e Axelrod fece giocare ognuno dei 14 programmi contro ciascuno degli altri per 200 turni. In questo gioco, al contrario del "gioco" del prigioniero presentato sopra, non si partiva con dei punteggi che di volta in volta diminuivano ma si partiva da 0 e ad ogni turno si potevano acquisire punti secondo la tabella seguente:

	denuncia	non denuncia
denuncia	**1**, 1	**5**, 0
non denuncia	**0**, 5	**3**, 3

Il punteggio di ogni incontro si otteneva sommando il punteggio ottenuto in ognuno dei 200 turni. Alla fine di tutte le possibili sfide, si calcolava il punteggio del singolo giocatore sommando tutti i punteggi ottenuti nelle 13 partite giocate.

I risultati ottenuti furono molto interessanti. Innanzitutto Axelrod notò che le strategie che avevano in programma di iniziare sempre cooperando, chiamate "Nice", si erano piazzate ai primi posti, mentre quelle che iniziavano denunciando occuparono gli ultimi posti della classifica. Già da questo emerge che la cooperazione può essere utile. Un altro fatto interessante che emerge da questo torneo è la strategia impiegata dal primo classificato. Si tratta proprio della strategia "Pan per focaccia" di cui ti ho parlato sopra. In questi casi, il successo di una strategia dipende dalla natura delle strategie con cui si scontra. Indipendentemente da ciò, questi tornei mostrano che in alcuni casi non è necessario denunciare in ogni turno per evitare di perdere.

In conclusione, nella partita del "gioco" del prigioniero, la strategia di denunciare sempre non è necessaria per vincere: puoi anche tentare la cooperazione in qualche turno. Ma ricorda che in questo modo stai rischiando di perdere. Se invece vuoi agire come un giocatore completamente razionale in condizioni di incertezza ed evitare il rischio, ti conviene denunciare l'altro fin dall'inizio. In questo caso concluderai sicuramente almeno in parità. E se il tuo amico si offende per il tradimento, puoi sempre scaricare la colpa sulla teoria dei giochi!

4 Ora prova tu: c'è un equilibrio?

In questa sezione ti propongo un altro gioco: ci sono equilibri di Nash? In generale, non in tutti i giochi c'è un equilibrio e in alcuni giochi potrebbero essercene più di uno. Prova tu a quantificare i guadagni (o le perdite) dei singoli agenti nei "giochi" descritti e a identificare quali insiemi di scelte diano luogo a equilibri di Nash!

1. **Il chicken-game**

   Questo gioco è ispirato dalla "chicken-run" del film "Gioventù bruciata" del 1955. Si tratta di una prova di coraggio in cui due ragazzi si sfidano in una gara con le loro macchine. La sfida consiste nel percorrere simultaneamente un percorso verso un dirupo. Se entrambi sterzano prima del dirupo, avranno pareggiato e mostreranno di avere la stessa quantità di coraggio; se uno sterza e l'altro continua per un tratto di strada maggiore (ma fermandosi prima del dirupo), il primo farà la figura del coniglio, mentre il secondo guadagnerà il rispetto dei pari. Se entrambi continuano sulla strada, moriranno.

2. **La caccia al cervo**

   Questo gioco è stato proposto per la prima volta da Jean Jacques Rousseau. Due cacciatori devono scegliere se inseguire un cervo o una lepre. Scegliere di cacciare un cervo è una scelta più rischiosa, infatti servono necessariamente due persone per ucciderlo. Quindi se uno sceglie di inseguire il cervo ma l'altro la lepre, il primo cacciatore rientra a mani vuote. D'altro canto, se anche il secondo cacciatore sceglie il cervo, il primo, così come il secondo, porta a casa un bottino superiore rispetto a quello che otterrebbe dall'uccisione di una lepre. Scegliere di cacciare una lepre dà più sicurezza: basta una persona per catturare la lepre, non c'è rischio di rientrare a mani vuote.

3. **Sasso Carta Forbici**

   Con alta probabilità già conosci questo gioco, ma vediamo come inserirlo in un contesto di teoria dei giochi. Dal punto di vista del singolo giocatore, a una vittoria corrisponderà un +1 , a una sconfitta -1 e a una situazione di parità 0. Ricordo che Sasso batte Forbici, Forbici batte Carta e Carta batte Sasso. Per trovare gli equilibri di questo gioco avrai un po' più di controlli da fare dal momento che ogni giocatore ha a disposizione tre scelte e non soltanto due, ma il ragionamento per capire se una situazione è un equilibrio o no è lo stesso presentato precedentemente. Esiste una formulazione di questo gioco più colorita, chiamata "Sasso Carta Forbici Lizard Spock", che viene presentata nella serie TV "The Big Bang Theory". In quel caso abbiamo ancora più combinazioni ma ti anticipo che il numero di equilibri di Nash di quest'ultima versione è esattamente uguale a quello della versione classica, perciò ti basterà capire quali sono gli equilibri di Nash di Sasso Carta Forbici per conoscere anche quelli di Sasso Carta Forbici Lizard Spock.

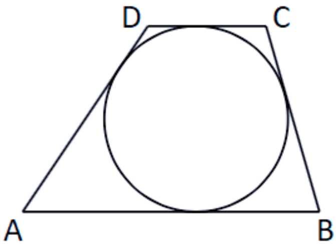
I problemi del giornalino

una rubrica a cura di ***Davide Lombardo****,*
ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

1 Divertissement

1.1 Cerchio inscritto

Un cerchio di raggio 12 tocca tutti i quattro lati di un quadrilatero $ABCD$ in cui il lato AB è parallelo al lato CD. Sapendo che $BC = 25$ e l'area di $ABCD$ è 648, determinare la lunghezza del lato DA.



1.2 Una trasmissione radiofonica

Nell'ultima parte della fortunata emissione serale *Radio(a)Matrice* i conduttori Alberto e Barbara rispondono alle molte telefonate del pubblico. All'insaputa degli ascoltatori, Alberto e Barbara hanno fatto una scommessa: ogni giorno essi annotano, per ogni chiamata, se l'interlocutore abbia più di 40 anni (X) o meno (Y). Alla fine della serata, se nella lista delle chiamate la combinazione XX compare *prima* della combinazione YX vince Alberto; se viceversa YX compare *prima* di XX vince Barbara (se nessuna delle due combinazioni è realizzata, per quella sera nessuno dei due vince). Quindi, ad esempio, se una sera le telefonate registrate sono state **XX**XYXYYXYYX vince Alberto, e se un'altra sera le telefonate sono YY**YX**YXXYXXYXY vince Barbara. Dopo che questa scommessa si è protratta per un anno, Alberto osserva che Barbara ha vinto circa il triplo delle volte rispetto a lui! Tenuto conto che il 50% delle telefonate proviene da ascoltatori con più di 40 anni e il 50% proviene da ascoltatori con meno di 40 anni (e quindi le sequenze XX e YX sono ugualmente probabili), sapreste spiegare a cosa sia dovuta la notevole differenza nel numero di vittorie dei due conduttori?

1.3 Un'equazione, ma due incognite

Sapendo che x e y sono numeri reali tali che

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$$

si calcoli il valore di $x+y$.

1.4 Quadrati, quadrati, quadrati...

Trovare tutte le coppie (x,y) di interi non negativi tali che

$$x^2+y^2=(xy-7)^2.$$

2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

Sia (a, b, c) una soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 28 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 108. \end{cases} \tag{2.1}$$

Consideriamo il polinomio

$$(t - a)(t - b)(t - c) = t^3 + c_1 t^2 + c_2 t + c_3.$$

In quello che segue calcoleremo esattamente i coefficienti c_1, c_2, c_3 senza risolvere esplicitamente il sistema da cui siamo partiti!

1. Verificare che $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$ e dedurre il valore di $ab + bc + ca$.

2. Usando un trucco simile, determinare il valore di abc.

3. Osservare che $c_1 = -(a + b + c), c_2 = ab + bc + ca$ e $c_3 = -abc$ e dedurre i valori dei coefficienti c_1, c_2, c_3.

Supponiamo ora di ordinare le soluzioni a, b, c del sistema (2.1), che sono numeri reali, in modo che $a > b > c$.

4. ($\star$) Calcolare $a^2b + b^2c + c^2a$.

Indicazione. Potrà essere utile l'identità algebrica

$$(x - y)^2(y - z)^2(z - x)^2 = -27p^2 - 4ps^3 + q^2s^2 + 18pqs - 4q^3,$$

dove

$$s = x + y + z, q = xy + yz + zx, p = xyz.$$

Nota. Questo esercizio si può inquadrare nel contesto della teoria delle *funzioni simmetriche*. Date n variabili $x_1, \ldots, x_n$, le *funzioni simmetriche elementari* $e_1, \ldots, e_n$ sono rispettivamente la somma delle variabili, la somma dei prodotti a due a due, la somma dei prodotti a tre a tre, ..., il prodotto di tutte le variabili. Quindi, ad esempio, per $n = 3$ le funzioni simmetriche elementari sono

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad e_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad e_3 = x_1x_2x_3,$$

corrispondenti alle precedenti s, q, p, mentre per $n = 4$ sono

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \quad e_4 = x_1x_2x_3x_4.$$

In generale, un polinomio si dice *simmetrico* se scambiando in maniera qualsiasi le sue variabili esso rimane immutato: per esempio, per $n = 3$ sono polinomi simmetrici

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 \quad \text{e} \quad x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 + x_1^3x_3^2 + x_1^2x_3^3 + x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^2.$$

Il teorema fondamentale delle funzioni simmetriche assicura che ogni polinomio simmetrico si può esprimere in termini delle funzioni simmetriche elementari! Ovvero, più precisamente: se $p(x_1, \ldots, x_n)$ è un polinomio simmetrico, esiste un polinomio q tale che $p(x_1, \ldots, x_n) = q(e_1, \ldots, e_n)$. Abbiamo visto questo principio in azione nel caso $n = 3$: abbiamo scritto $x^2 + y^2 + z^2 = e_1^2 - 2e_2$, e – se avete risolto l'esercizio – avrete anche scoperto come esprimere $x^3 + y^3 + z^3$ usando le funzioni simmetriche elementari. L'indicazione data qui sopra per il punto (4) non è altro che un caso speciale del teorema fondamentale delle funzioni simmetriche applicato al polinomio (simmetrico) $(x - y)^2(y - z)^2(z - x)^2$. La teoria delle funzioni simmetriche è utile in molte aree della matematica, ed è anche un importante campo di studio in sé!

Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una lista di libri, pagine web, canali YouTube e film incentrati sulla matematica per stimolare ulteriormente la vostra curiosità. Alcuni dei libri che vi consigliamo contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti "più leggeri".

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.
- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi.
- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann.
- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico.
- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan.
- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore.
- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.

- G. Lolli, *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.
- A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo.
- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.
- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni.
- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Ci siamo qui limitati a proporre una bibliografia essenziale: di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- D. Aronofsky, Π – *Il teorema del delirio*, 1998.
- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.
- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001.
- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.
- T. Melfi, *Il diritto di contare*, 2016.
- M. Tyldum, *The imitation game*, 2014.

SCAN ME

Visita il canale youtube del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa all'indirizzo `https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw/`!

- G. Van Sant, *Will Hunting – Genio ribelle*, 1997.
- M. Webb, *Gifted – Il dono del talento*, 2017.

Adesso vi proponiamo una lista di canali YouTube legati alla matematica per scoprire un sacco di curiosità e perché no, trovare ottimi spunti per approfondimenti:

- `https://www.youtube.com/c/3blue1brown`
- `https://www.youtube.com/c/Mathologer`
- `https://www.youtube.com/user/numberphile`
- `https://www.youtube.com/c/ThinkTwiceLtu`
- `https://www.youtube.com/user/blackpenredpen`
- `https://www.youtube.com/c/DrPeyam`

A proposito, potete trovare su YouTube il canale del nostro dipartimento! Fateci visita (e, perché no, iscrivetevi!) all'indirizzo

`https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw`

seguendo il link o inquadrando il QR presente in alto su questa pagina. Troverete presto una varietà di contenuti: per cominciare, vi consigliamo il video di presentazione "Studiare Matematica a Pisa" che trovate a questo link:

- `https://www.youtube.com/watch?v=pfh4IyDjbWY`

Non perdetevi poi la nostra intervista ad Alessio Figalli, medaglia Fields per la Matematica, in occasione della Settimana Matematica 2019:

- `https://www.youtube.com/watch?v=i6ha2pLLUuA`

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:
  `http://maddmaths.simai.eu/`
- Versione on-line del giornalino:
  `https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days`
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
  `http://www.dm.unipi.it/webnew/`
- Sito delle olimpiadi di matematica:
  `http://olimpiadi.dm.unibo.it/`
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
  `http://www.sns.it/`
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:
  `https://poisson.phc.dm.unipi.it/`

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito:

`http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento`