

# Matematica

## IL GIORNALINO DEGLI

# open days



UNIVERSITÀ  
DI PISA



notizie, giochi  
e pillole  
di matematica







**Realizzato con il contributo del Piano Lauree Scientifiche - Matematica.**

**Su indicazione della Commissione Terza Missione.**

**Realizzato con la collaborazione degli studenti counselling:**

Ursula D'Elia, Antonio Di Nunzio, Dania Lazzarini

**Coordinamento:** Alessandra Caraceni, Giovanni Gaiffi

**Grafica:** Alessandra Caraceni





# Introduzione

Quello che avete fra le mani è il numero 14 del **Giornalino degli Open Days**, una pubblicazione curata da professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa e rivolta principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

Se state considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario che abbia a che fare con la matematica, troverete materiale che fa per voi! All'inizio di questo giornalino potrete leggere una presentazione del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa. Oltre a una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica e sulle varie opportunità di cui godono i nostri studenti, vi troverete alcuni dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in matematica.

A seguire vi proponiamo due articoli di carattere divulgativo. Nel primo, in Professor **Luigi Amedeo Bianchi** ci invita ad effettuare un esperimento che, con un semplice stuzzicadenti e un foglio a quadretti, produce risultati matematici a dir poco inaspettati. Il secondo è un viaggio alla scoperta delle basi della teoria dei campi: vedremo come una traduzione in termini algebrici abbia condotto alla soluzione di problemi geometrici che hanno eluso e affascinato per secoli i matematici dell'antichità. A guidarci in questa esplorazione sarà **Antonio Di Nunzio**, studente del nostro dipartimento.

Munitevi di carta e matita (o, ancora meglio, di penne rosse e blu) per affrontarvi in una partita di *Red-Blue Hackenbush*, il gioco che vi presentiamo nella nostra consueta rubrica. A seguire, potrete cimentarvi con "i problemi del giornalino": come sempre vi proponiamo una piccola raccolta di quesiti matematici per stuzzicare la vostra curiosità e affinare le vostre abilità di *problem solving*.

Se voleste tentare altri problemi, visitate la pagina web del giornalino tramite il QR a fronte: troverete una raccolta con gli esercizi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni. Non dimenticate di visitare la pagina



**SCAN ME**

Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo <https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>!

in occasione dell'uscita del prossimo numero per scoprire le soluzioni ai problemi di questa edizione!

E se dopo tutto questo non siete ancora sazi di matematica, niente paura: la nostra ultima rubrica contiene un ampio assortimento di consigli di lettura, nonché una lista di film e una di link a siti web e a canali youtube che potrebbero fare al caso vostro.

# Indice

|                                                                                                                               |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduzione</b>                                                                                                           | <b>3</b>  |
| <b>Il corso di laurea in Matematica</b>                                                                                       | <b>7</b>  |
| 1 Il corso di laurea a Pisa . . . . .                                                                                         | 7         |
| 2 Sbocchi occupazionali . . . . .                                                                                             | 9         |
| 3 Borse di studio . . . . .                                                                                                   | 10        |
| Bibliografia . . . . .                                                                                                        | 11        |
| <b>Stuzzicadenti buffi e <math>\pi</math></b>                                                                                 | <b>13</b> |
| 1 L'esperimento . . . . .                                                                                                     | 13        |
| 2 Un modello matematico . . . . .                                                                                             | 14        |
| 3 Linearità del valore atteso e stuzzicadenti spezzati . . . . .                                                              | 17        |
| 4 Conclusioni . . . . .                                                                                                       | 19        |
| Bibliografia . . . . .                                                                                                        | 20        |
| <b>Teoria dei campi e costruzioni con riga e compasso</b>                                                                     | <b>21</b> |
| 1 Introduzione . . . . .                                                                                                      | 21        |
| 2 Costruzioni con riga e compasso e numeri costruibili . . . . .                                                              | 23        |
| 3 Costruzioni con riga e compasso dal punto di vista algebrico                                                                | 30        |
| 4 Problemi impossibili . . . . .                                                                                              | 34        |
| 4.1 È impossibile duplicare un cubo con riga e compasso ( $\sqrt[3]{2} \notin \mathcal{C}$ ) . . . . .                        | 34        |
| 4.2 È impossibile quadrare un cerchio con riga e compasso ( $\sqrt{\pi} \notin \mathcal{C}$ ) . . . . .                       | 35        |
| 4.3 È impossibile trisecare l'angolo di $60^\circ$ con riga e compasso ( $\cos(\frac{\pi}{9}) \notin \mathcal{C}$ ) . . . . . | 35        |
| Bibliografia . . . . .                                                                                                        | 36        |
| <b>Red-Blue Hackenbush</b>                                                                                                    | <b>37</b> |
| Bibliografia . . . . .                                                                                                        | 41        |

|                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I problemi del giornalino</b>                            | <b>43</b> |
| 1 Divertissement . . . . .                                  | 43        |
| 1.1 Polinomio misterioso . . . . .                          | 43        |
| 1.2 Testa o croce? . . . . .                                | 43        |
| 1.3 Uno, due, quattro . . . . .                             | 43        |
| 1.4 Quadrilatero inscritto . . . . .                        | 44        |
| 2 Qualche apertura verso la matematica non elementare . . . | 44        |
| <b>Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media</b>     | <b>47</b> |



# ***Il corso di laurea in Matematica***

Stai scegliendo che cosa fare all'università e sei incuriosito da matematica, ma non sai bene a cosa ti potrà portare?

Proveremo ad aiutarti a chiarire un po' le idee mostrandoti in cosa consiste il corso di Laurea in Matematica qui a Pisa e le numerose opportunità che ha da offrirti sia per quanto riguarda il percorso universitario che per le prospettive future.

## **1 Il corso di laurea a Pisa**

Il Corso di Laurea in Matematica si divide in Laurea Triennale e Laurea Magistrale. La prima corrisponde al titolo internazionale *Bachelor's degree* e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici; la seconda, invece, è internazionalmente identificata con il *Master's degree*, e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

Il corso di laurea triennale a Pisa offre una solida preparazione di base nei vari settori della matematica, attraverso una serie di esami obbligatori. Tuttavia, al secondo e (soprattutto) al terzo anno sono previsti esami a scelta: in questo modo, grazie alla gran quantità di corsi a scelta attivati, ognuno può approfondire gli argomenti che ha trovato di maggior interesse. Il corso di laurea triennale è ulteriormente distinto in due curricula (tra cui bisogna scegliere subito, con la possibilità di cambiare in seguito):

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

Il primo, più teorico, prevede anche una più approfondita preparazione in Fisica, mentre il secondo è più applicativo ed integra lo studio della Matematica con quello dell'Informatica. Nella Tabella 1 sono riportati i due piani di studi.

| Fondamentale                                                       | Computazionale                                      |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| <b>I anno</b>                                                      |                                                     |
| Aritmetica (9 CFU)                                                 |                                                     |
| Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)               |                                                     |
| Laboratorio di introduzione alla matematica computazionale (6 CFU) |                                                     |
| Analisi matematica 1 (15 CFU)                                      |                                                     |
| Geometria 1 (15 CFU)                                               |                                                     |
| Fisica I con laboratorio (9 CFU)                                   |                                                     |
| <b>II anno</b>                                                     |                                                     |
| Algebra 1 (6 CFU)                                                  |                                                     |
| Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)                           |                                                     |
| Inglese scientifico (6 CFU)                                        |                                                     |
| Analisi matematica 2 (12 CFU)                                      |                                                     |
| Geometria 2 (12 CFU)                                               |                                                     |
| Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)                       |                                                     |
| Esame a scelta (6 CFU)                                             | Algoritmi e strutture dati (6 CFU)                  |
| <b>III anno</b>                                                    |                                                     |
| Meccanica razionale (6 CFU)                                        |                                                     |
| Fisica II (9 CFU)                                                  | Calcolo scientifico (6 CFU)                         |
| Fisica III (6 CFU)                                                 | Laboratorio computazionale (6 CFU)                  |
| Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)      | Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU) |
|                                                                    | Ricerca operativa (6 CFU)                           |
| 4 Esami a scelta (24 CFU)                                          | 3 Esami a scelta (18 CFU)                           |
|                                                                    | Prova finale (9 CFU)                                |

**Tabella 1:** Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2022/2023 (vedi [3]).

La maggior parte dei laureati triennali sceglie di proseguire gli studi con la magistrale restando a Pisa. I curricula in cui è diviso il corso di laurea magistrale sono cinque: applicativo, didattico, generale, modellistico e teorico. In questo modo, offre la possibilità ad ogni studente di specializzare il proprio piano di studi nel ramo che più lo ha interessato e appassionato durante i precedenti anni.

Il nostro dipartimento collabora inoltre con alcune università estere grazie ad accordi internazionali. Ricordiamo per esempio l'accordo con la Hokkaido University, che consente il conseguimento di un titolo congiunto (*double degree*). Ci sono anche gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio oppure lavorare alla tesi presso un'altra università europea. Attualmente sono attivi accordi con questo tipo con 35 corsi di studio in Matematica europei. Simili agli accordi Erasmus sono gli accordi SEMP (Swiss European Mobility Program); abbiamo



**SCAN ME**

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

accordi attivi con le Università di Basilea, Friburgo, Losanna, Neuchatel e con l'ETH di Zurigo.

Puoi trovare altre informazioni e rimanere aggiornato sui nuovi accordi sulla pagina dell'Internazionalizzazione

<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/internazionalizzazione/internazionalizzazione>

Per ogni altra curiosità, visita la pagina del Corso di Studi seguendo il link <http://www.dm.unipi.it/webnew/it/cds/home-cds> oppure inquadrando il QR qui sopra!

## 2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? La pagina de "I Mestieri dei Matematici"

<https://www.mestierideimatematici.it>

cerca di rispondere a questa domande, e magari ti stupirà!

In generale risulta che i laureati in matematica sono soddisfatti della scelta fatta e godono di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare:

- I dati di Almalaurea (vedi [2]) riportano che il tasso di occupazione dei laureati magistrali in matematica all'Università di Pisa a tre anni dalla laurea è del 100% (questa percentuale include coloro, circa la metà, che sono impegnati in un dottorato di ricerca).

- Sempre dal sito di Almalaurea [1] si possono trarre i seguenti dati che riguardano in particolare l'ateneo pisano, vedi [2]:
  - Il 93,9% dei laureati magistrali si dichiara soddisfatto degli studi.
  - Il 98% dei laureati magistrali si dichiara soddisfatto dei rapporti con i docenti.

Da alcuni anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo nasce il progetto "Matematici al Lavoro", del quale potete scoprire tutti i dettagli visitando la pagina web

<https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0>

### 3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge di solito all'inizio di settembre in diverse sedi in Italia tra cui una è proprio Pisa.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (erano 30 per l'anno accademico 2021/2022), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i due anni successivi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

Anche per il corso di laurea magistrale sono bandite delle borse INdAM: per esempio per l'anno 2021/2022 erano 8, più 5 dedicate in particolare a chi si iscrive a Pisa, di cui almeno 3 per studentesse, come segno concreto della nostra attenzione alla parità di genere.

È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Puoi trovare tutte le informazioni sul sito <https://www.altamatematica.it>.

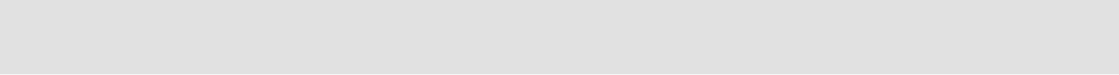
Gli studenti che si iscrivono qui a Pisa possono richiedere anche una borsa di studio del DSU (Azienda della Regione Toscana per il Diritto allo Studio Universitario) sulla base del reddito familiare. I vincitori di questa

borsa ottengono l'esonero dalle tasse universitarie, un contributo per le spese e in alcuni casi anche vitto e alloggio gratuiti. Per avere maggiori informazioni, puoi visitare il sito <https://www.dsu.toscana.it/>.

## Bibliografia

- [1] <https://www2.almalaurea.it>
- [2] <https://www.dm.unipi.it/webnew/it/qualita/situazione-occupazionale-dei-laureati>
- [3] [http://www.dm.unipi.it/webnew/sites/default/files/Reg\\_LT\\_2223.pdf](http://www.dm.unipi.it/webnew/sites/default/files/Reg_LT_2223.pdf)





# Stuzzicadenti buffi e $\pi$

di **Luigi Amedeo Bianchi**, professore presso l'Università di Trento

Per l'esperimento che vogliamo fare ci occorreranno: un foglio A4 con quadrettatura 1 cm, uno stuzzicadenti, un righello (per misurare lo stuzzicadenti) e qualcosa per tenere traccia dei dati dell'esperimento.

"Ma come, esperimento? Non parliamo di matematica? E da quando la matematica è una scienza sperimentale?" Fidatevi! Parleremo di matematica, ma prendendo una strada diversa.

## 1 L'esperimento

Come prima cosa dobbiamo misurare la lunghezza in centimetri dello stuzzicadenti. Il mio è lungo  $L = 6.8$  cm. Fatto questo, mettiamo il foglio quadrettato su una superficie orizzontale liscia.

Lanciamo ora lo stuzzicadenti in modo che cada sul foglio. Contiamo quante righe interseca, sia orizzontali, sia verticali. Un modo comodo e veloce di farlo è contare quante righe orizzontali ci sono tra un estremo e l'altro dello stuzzicadenti e sommare questo numero a quello delle righe verticali comprese tra un estremo e l'altro. In questo modo non rischiamo di perderci qualche intersezione o di farci imbrogliare (non contando con la dovuta molteplicità) dal fatto che lo stuzzicadenti passi "esattamente" in un punto nel quale si intersecano due righe.

Segnamoci questo valore, nel mio caso 9. Ripetiamo questa procedura per un totale di 10 misurazioni, nel mio caso: 9, 9, 8, 9, 10, 7, 9, 10, 10, 9.

Ora vogliamo calcolare il numero medio di intersezioni osservate  $\bar{I}$ , ossia sommare tutti i valori ottenuti e dividere il risultato per il numero delle osservazioni (nel nostro caso 10):

$$\bar{I} = \frac{9 + 9 + 8 + 9 + 10 + 7 + 9 + 10 + 10 + 9}{10} = \frac{90}{10} = 9.$$





Ora dividiamo la lunghezza  $L$  per il numero medio di intersezioni osservate  $\bar{I}$  e moltiplichiamo questo risultato per 4:  $\frac{L}{\bar{I}} \cdot 4 = \frac{6.8}{9} \cdot 4 \approx 3.022$ . Il vostro risultato sarà quasi certamente diverso, ma, mi sento di scommettere, non troppo!

Ripetiamo l'esperimento da capo e raccogliamo altre 10 misurazioni: 7, 9, 8, 9, 9, 9, 8, 7, 9, 8. In questo caso  $\bar{I} = 8.3$ , mentre  $L = 6.8$ , come prima. Quindi questa volta, per me,  $\frac{L}{\bar{I}} \cdot 4 = \frac{6.8}{8.3} \cdot 4 \approx 3.277$ .

Possiamo anche considerare le 20 misurazioni fatte come parte di un solo esperimento e calcolare il numero medio di intersezioni sommando sia i numeri nella prima lista, sia quelli nella seconda e dividendo il risultato (nel mio caso 173) per il numero di osservazioni, ossia 20. Questo ci dà, per  $\frac{L}{I} \cdot 4$ , un valore all'incirca 3.145, intermedio tra i due ottenuti prima (ma non la loro media aritmetica, come mai?).

Potremmo continuare a fare lanci di stuzzicadenti, conteggi e usare la "formula"  $\frac{L}{I} \cdot 4$  e il valore ottenuto si avvicinerà a  $3.14 \dots$  Sì, proprio a  $\pi$ . Ma perché? Da dove viene la "formula"?

## 2 Un modello matematico

Cerchiamo di descrivere in termini matematici quello che stiamo facendo. Possiamo descrivere lo stuzzicadenti come un segmento di lunghezza  $L$ . Come facciamo però a rappresentare il numero medio di intersezioni che ha con le righe?

Il *valore atteso* (o media) di una quantità casuale (come è il numero  $I$  di intersezioni di un segmento con una quadrettatura) è dato dalla media dei possibili valori pesata con le corrispondenti probabilità: se chiamiamo  $p_i$  la probabilità che il segmento intersechi  $i$  righe (per  $i \in \mathbb{N}$ ), allora il numero medio di intersezioni è

$$E(I) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots \quad (2.1)$$

Questa notazione può sembrare imprecisa: cosa significano quei puntini? E cosa vuol dire sommare infiniti oggetti? In realtà possiamo osservare che c'è un numero massimo (legato alla lunghezza  $L$ ) di intersezioni possibili, quindi esiste un  $N$  tale che per ogni  $i \geq N$ ,  $p_i = 0$ . Come esercizio, potete provare a calcolarlo!

Osserviamo anche che i valori calcolati prima nel corso dell'esperimento,  $\bar{I}$ , sono approssimazioni sperimentali di questo valore  $E(I)$  che viene dal modello. Si può dimostrare che al crescere del numero di ripetizioni dell'esperimento,  $\bar{I}$  (detto anche *media campionaria*) converge a  $E(I)$ .

Torniamo al nostro modello matematico e, per continuare, proviamo a semplificarci un po' la vita considerando una versione speciale del problema: ci sono solamente righe orizzontali (sempre a distanza di 1 cm le une dalle altre) e il nostro segmento/stuzzicadenti ha una lunghezza  $L < 1$ . La ragione della prima semplificazione è abbastanza evidente: consideriamo separatamente le righe orizzontali e quelle verticali, anzi, magari riusciremo a usare qualche argomento di simmetria per passare gratuitamente o quasi dalle sole righe orizzontali alla quadrettatura. Per quanto riguarda la scelta della lunghezza ridotta, il motivo è legato alla fastidiosa somma con i puntini nella formula (2.1): se la lunghezza del segmento è minore di 1 (e abbiamo solamente righe orizzontali), possiamo avere o 0 intersezioni o 1 intersezione, quindi

$$E(I) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = p_1 \quad (2.2)$$

e in particolare il numero atteso di intersezioni è uguale alla probabilità di averne una.

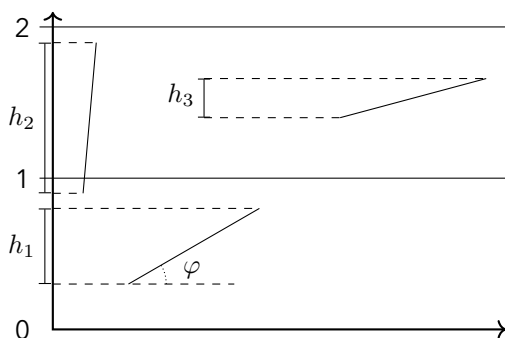
Non dobbiamo però farci prendere troppo dall'entusiasmo: le probabilità  $p_i$  che compaiono in (2.2) non sono le stesse scritte in (2.1), si riferiscono a un segmento diverso e quindi a un problema diverso! Ma la speranza è quella di riuscire, grazie a questa variante del problema, a capire qualcosa di più del problema originale.

Ripensando all'esperimento semplificato, possiamo osservare che la probabilità  $p_1$  che un segmento di lunghezza minore di 1 intersechi o meno una riga orizzontale dipende dall'angolo  $\varphi$  che il segmento ha rispetto alle righe orizzontali. Sapendo che il segmento forma un angolo  $\varphi$  con le rette orizzontali, la probabilità infatti è uguale<sup>1</sup> alla proiezione del segmento sulla perpendicolare alle rette orizzontali,  $h = L \cdot \sin \varphi$ . Essa è tanto più alta quanto più  $\varphi$  è prossimo a un angolo retto. Lo stuzzicadenti copre infatti sull'asse verticale una porzione pari alla sua proiezione sull'asse verticale stesso e siccome la distanza tra due rette orizzontali è 1, la probabilità che una riga cada all'interno della porzione verticale coperta dal segmento è pari ad  $h$ , come illustrato in Figura 1. In particolare, se  $\varphi$  è retto, la probabilità è uguale alla lunghezza  $L$  del segmento stesso.

Dobbiamo però calcolare questo valore al variare di tutte le possibili ampiezze  $\varphi$  dell'angolo. Per ogni  $\varphi$ , come detto, la probabilità di intersecare una retta è il rapporto tra la lunghezza  $h = L \sin \varphi$  e la distanza tra le linee orizzontali, ossia 1. Tuttavia abbiamo un'infinità continua di possi-

<sup>1</sup>In questo caso è uguale, perché la distanza tra le rette è 1, in generale sarebbe proporzionale, con la rinormalizzazione data dalla distanza tra le righe.





**Figura 1:** La proiezione verticale (e quindi la probabilità di intersezione) al variare dell'angolo  $\varphi$ .

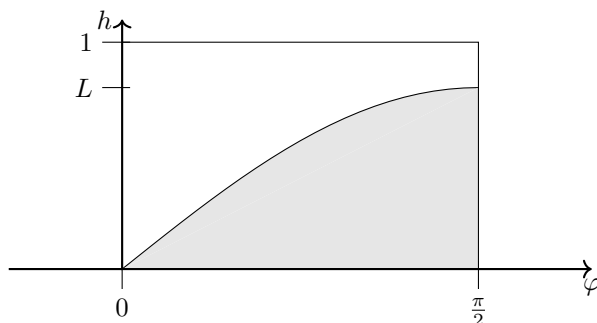
bili valori di  $\varphi$ , quindi possiamo pensare di trasformare il rapporto tra le lunghezze in un rapporto tra superfici.

Calcoliamo allora il valore tra l'area (in grigio) sotto la curva e il rettangolo rappresentati in Figura 2. Infatti, per simmetria,  $\varphi$  varia tra l'angolo nullo e l'angolo retto (ossia tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$ , se misuriamo l'angolo in radianti), e per ogni valore di  $\varphi$ , come detto, la probabilità di intersecare una retta orizzontale è uguale al rapporto tra il valore della funzione  $L \sin x$  calcolata in  $\varphi$  e la lunghezza del segmento unitario. Mettendo questi segmenti in verticale uno accanto all'altro in corrispondenza del valore di  $\varphi$  cui fanno riferimento abbiamo la Figura 2. La probabilità di successo è pari al rapporto tra l'area sotto la curva e quella del rettangolo di base  $\frac{\pi}{2}$  e altezza 1. Per chi ha familiarità con gli integrali (chi non la ha può saltare direttamente al paragrafo successivo), si tratta di calcolare

$$\frac{\int_0^{\pi/2} L \sin x dx}{\pi/2} = \frac{2L}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{2L}{\pi}.$$

In particolare, possiamo osservare che questa probabilità (che come detto è anche il numero medio di intersezioni) è proporzionale alla lunghezza  $L$  con coefficiente  $\frac{2}{\pi}$ .

Abbiamo fatto comparire  $\pi$  nel nostro modello. Sarebbe però bello poter ricavare il medesimo risultato senza dover ricorrere al calcolo integrale, per poi passare a considerare il caso che ci interessa, ossia  $L > 1$ . Come vedremo ora, possiamo fare entrambe le cose in un colpo solo, grazie a una proprietà del valore atteso, la linearità.



**Figura 2:** Quanto vale il rapporto tra l'area in grigio e quella del rettangolo?

### 3 Linearità del valore atteso e stuzzicadenti spezzati

Se abbiamo due quantità casuali  $A$  e  $B$  il valore atteso della loro somma è la somma dei valori attesi:  $E(A+B) = E(A) + E(B)$ . Cerchiamo di convincercene nel caso che stiamo considerando. Se abbiamo due segmenti di lunghezze  $l_1, l_2 \leq 1$  e chiamiamo  $I_1$  e  $I_2$  il numero di intersezioni del primo e del secondo segmento, rispettivamente, abbiamo 4 possibilità:

$A_1$  Nessun segmento ha intersezioni,  $A_1 = \{I_1 = 0\} \cap \{I_2 = 0\}$ ;

$A_2$  Il primo segmento ha un'intersezione e il secondo non ne ha,  $A_2 = \{I_1 = 1\} \cap \{I_2 = 0\}$ ;

$A_3$  Il secondo ha un'intersezione e il primo no,  $A_3 = \{I_1 = 0\} \cap \{I_2 = 1\}$ ;

$A_4$  Entrambi i segmenti hanno un'intersezione,  $A_4 = \{I_1 = 1\} \cap \{I_2 = 1\}$ .

Questi eventi avranno ciascuno una propria probabilità  $P(A_i)$ . Osserviamo inoltre che  $P(I_1 = 1) = P(A_2) + P(A_4)$ . Infatti

$$\{I_1 = 1\} = \{I_1 = 1 \cap \{I_2 = 0\} \cup \{I_2 = 1\}\} =$$

$$= \{\{I_1 = 1\} \cap \{I_2 = 0\}\} \cup \{\{I_1 = 1\} \cap \{I_2 = 1\}\} = A_2 \cup A_4$$

perché  $\{I_2 = 0\}$  e  $\{I_2 = 1\}$  sono casi disgiunti e coprono tutte le possibilità, assieme al fatto che vale la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione. Inoltre l'unione  $A_2 \cup A_4$  è disgiunta, dal momento

che i due insiemi non si intersecano, quindi la probabilità dell'unione è la somma delle probabilità. In modo simile abbiamo che  $P(I_2 = 1) = P(A_1) + P(A_4)$ .

Cerchiamo ora il valore atteso per  $I_1 + I_2$ :

$$\begin{aligned}
 E(I_1 + I_2) &= (0 + 0) \cdot P(A_1) + (0 + 1) \cdot P(A_2) + (1 + 0) \cdot P(A_3) \\
 &\quad + (1 + 1) \cdot P(A_4) \\
 &= P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_4) \\
 &= (P(A_2) + P(A_4)) + (P(A_1) + P(A_4)) \\
 &= 1 \cdot P(I_1 = 1) + 1 \cdot P(I_2 = 1) \\
 &= E(I_1) + E(I_2).
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato la linearità in questo caso particolare con le intersezioni di due segmenti con le rette orizzontali. In modo simile possiamo estenderla alla somma del valore atteso del numero di intersezioni di più segmenti.

Tornando agli stuzzicadenti e alle righe orizzontali, la linearità ci aiuta chiaramente a passare dal caso  $L \leq 1$  al caso  $L > 1$ : se il nostro segmento è lungo  $L > 1$ , possiamo spezzarlo in  $m = \lceil L \rceil$  segmenti, ciascuno di lunghezza  $l = \frac{L}{m} \leq 1$ . Per linearità del valore atteso, il numero medio di intersezioni con righe orizzontali sarà allora, dal momento che tutti gli  $m$  segmenti hanno la medesima lunghezza  $l$ ,

$$E(I_L) = mE(I_l) = m \cdot \frac{2 \cdot l}{\pi} = m \cdot \frac{2 \cdot \frac{L}{m}}{\pi} = \frac{2 \cdot L}{\pi},$$

dove con  $I_L$  indichiamo il numero di intersezioni di un segmento di lunghezza  $L$  e con  $I_l$  il numero di intersezioni di un segmento di lunghezza  $l$ .

Tuttavia, senza l'integrale calcolato prima non sapremmo che per un segmento di lunghezza  $l < 1$  il numero medio di intersezioni è  $\frac{2 \cdot l}{\pi}$ . Possiamo ricavare anche questo risultato dalla linearità? Come?

Torniamo al valore atteso del numero di intersezioni. Per un segmento  $I_l$  di lunghezza  $l$ , esso dipenderà, secondo un'opportuna funzione  $f$ , dalla lunghezza  $l$ :  $E(I_l) = f(l)$ . Osserviamo anche che questa funzione è necessariamente lineare, dal momento che possiamo pensare di spezzare il segmento in due segmenti più corti, di lunghezza  $l_1$  ed  $l_2$  rispettivamente, che avranno  $I_1$  e  $I_2$  intersezioni rispettivamente:

$$f(l_1) + f(l_2) = E(I_1) + E(I_2) = E(I_l) = f(l) = f(l_1 + l_2).$$



Possiamo spingerci oltre: se spezziamo un segmento di lunghezza  $nl$  in  $n \in \mathbb{N}$  segmenti di lunghezza  $l$  abbiamo  $nf(l) = f(nl)$  e se lo spezziamo in  $m \in \mathbb{N}$  segmenti di lunghezza  $\frac{nl}{m}$  abbiamo

$$mf\left(\frac{n}{m}l\right) = f(nl) = nf(l),$$

da cui  $f(ql) = qf(l)$  per ogni razionale  $q$ . Con qualche attenzione (appoggiandoci alla monotonia di questa funzione  $f$ ) riusciamo a estendere al caso reale, concludendo che  $f(x) = xf(1)$ , con  $f(1)$  una costante  $C$  da determinare.

Se però pensiamo alla proprietà di linearità enunciata sopra, non abbiamo chiesto che i segmenti fossero tra loro allineati: la linearità vale indipendentemente da questo fatto. Potrebbero benissimo formare una linea spezzata, aperta o chiusa, e il valore atteso del numero totale di intersezioni con le righe sarà la somma dei valori attesi per i singoli segmenti. Se la lunghezza della spezzata è  $L$ , il valore atteso del numero di intersezioni con le rette orizzontali sarà  $C \cdot L$ .

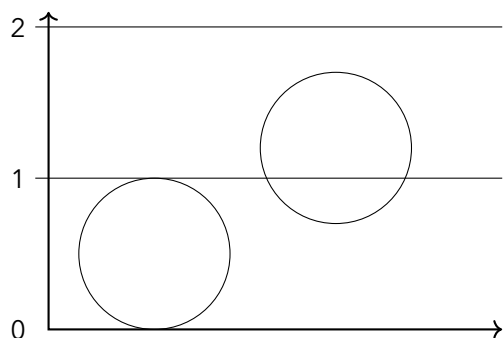
Possiamo ora osservare che, con le poligonali spezzate, possiamo dare approssimazioni successive (e sempre più precise) anche di curve che non sono rettilinee a tratti. In particolare possiamo approssimare delle circonferenze e, in particolare, la circonferenza di diametro 1. Essa ha lunghezza  $\pi$  e quindi ha un valore atteso di intersezioni con le rette orizzontali uguale a  $C \cdot \pi$ . Ma se ha diametro 1, avrà sempre due intersezioni (o due volte la stessa retta, oppure sarà tangente a due rette), quindi  $2 = C \cdot \pi$ , da cui  $C = \frac{2}{\pi}$ . Quindi il valore atteso delle intersezioni con le rette orizzontali a distanza 1 le une dalle altre di un segmento di lunghezza  $L$  è  $\frac{2L}{\pi}$ .

In modo del tutto analogo possiamo procedere con le rette verticali, con le quali ci saranno in media  $\frac{2L}{\pi}$  intersezioni. Complessivamente quindi in media ci sono  $\frac{4L}{\pi}$  intersezioni  $I_q$  con la quadrettatura,  $E(I_q) = \frac{4L}{\pi}$ , da cui segue che  $\frac{4L}{E(I_q)} = \pi$ . Abbiamo quindi giustificato rigorosamente il risultato dell'esperimento iniziale.

## 4 Conclusioni

Il problema del lancio dello stuzzicadenti (originariamente un ago) prende il nome dal Conte di Buffon, che lo pose nel 1777 nel caso delle sole rette orizzontali. La relazione venne usata nella seconda metà dell'Ottocento per stimare il valore di  $\pi$ . Naturalmente, volessimo fare oggi la stessa cosa





**Figura 3:** Stuzzicadenti circolari di diametro 1: hanno sempre esattamente due intersezioni.

sarebbe molto più pratico lanciare stuzzicadenti virtuali su pavimentazioni virtuali. Inoltre usare una quadrettatura invece delle sole rette parallele porta a una convergenza molto più rapida.

Sempre di fine Ottocento, per la precisione del 1860, è l'idea di usare uno stuzzicadenti circolare per evitare il calcolo dell'integrale, dovuta a E. Barbier [1]. Una trattazione molto più esaustiva del problema di Buffon, con alcune generalizzazioni, si può trovare in [2], che ha fortemente ispirato questa presentazione. In questo volume il problema dell'ago è il punto di partenza per lo studio della probabilità geometrica, chiamata dagli autori anche combinatoria continua, per via delle numerose analogie che ha con i conteggi della combinatoria.

## Bibliografia

- [1] E. Barbier. Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. *J. Mathématiques Pures et Appliquées*, 2(5):273–283, 1860.
- [2] D. A. Klain and G.-C. Rota. *Introduction to Geometric Probability*. Lezioni Lincee. Cambridge University Press, Cambridge, UK; New York, 1997.

# Teoria dei campi e costruzioni con riga e compasso

di **Antonio Di Nunzio**, studente del Corso di Laurea Triennale in Matematica dell'Università di Pisa

## 1 Introduzione

Sin dalle scuole medie, abbiamo avuto a che fare con la riga e il compasso: abbiamo costruito triangoli equilateri, quadrati, pentagoni, esagoni... ma anche l'asse di un segmento o la bisettrice di un angolo. Queste costruzioni si realizzano seguendo una procedura in cui si tracciano linee rette e archi di circonferenza, determinando, passo dopo passo, i punti che individuano la figura da costruire (come ad esempio i vertici di un poligono). I *problemi di costruzione con riga e compasso* risalgono all'antica Grecia e hanno stimolato l'intero sviluppo della geometria euclidea. Questi richiedono di costruire un certo oggetto geometrico a partire da un dato insieme di punti, facendo uso soltanto della riga e del compasso.

Nella loro moltitudine, ve ne sono alcuni che sono stati studiati per secoli dai più illustri matematici, ma che non hanno mai trovato soluzione. I più importanti sono la **duplicazione del cubo** (cioè la costruzione di un cubo di volume doppio rispetto a un cubo assegnato), la **quadratura del cerchio** (cioè la costruzione di un quadrato avente la stessa area di un cerchio assegnato) e la **trisezione dell'angolo** (cioè la determinazione di un metodo generale che permetta di dividere un angolo assegnato in tre parti congruenti). Nel corso dei secoli, il continuo fallimento nella ricerca di una soluzione spinse la comunità matematica a ritenere che questi problemi fossero impossibili da risolvere. Nacque quindi un nuovo problema: come si fa a dimostrare che effettivamente queste costruzioni non sono realizzabili?



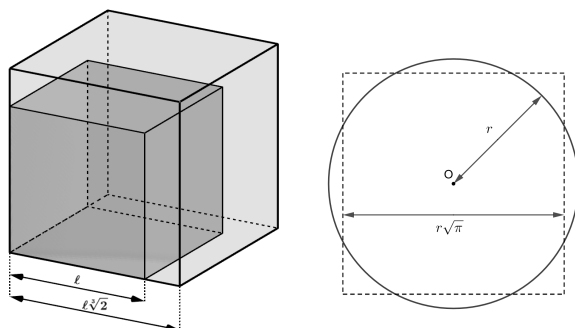
La matematica, come si sa, è ricca di sorprese: un problema che risiede in una certa branca può essere interpretato e tradotto in termini di un'altra dove lo studio ne risulta più semplice o efficace. Questo è proprio quello che accade nel nostro caso: i problemi di costruzione risiedono nella geometria, ma possono essere tradotti in linguaggio algebrico ed essere affrontati con metodi e strumenti propri dell'algebra; strumenti in grado di formalizzare e dimostrare il fatto che i tre problemi precedenti non abbiano soluzione.

In questo articolo scopriremo il processo di traduzione in linguaggio algebrico di un problema di costruzione con riga e compasso, addentrandoci tacitamente nella *teoria dei campi*: un ramo dell'algebra moderna sviluppato principalmente per indagare la risolubilità delle equazioni polinomiali, ma che oggi riveste un ruolo centrale in diverse aree della matematica. Il suo linguaggio, come vedremo, si adatta anche al contesto delle costruzioni con riga e compasso, ed è in grado di offrire una risposta a questi tre famosi problemi.

Iniziamo a dare qualche dettaglio sui primi due, dando per buono che partendo da un segmento è sempre possibile costruire un quadrato sfruttando solo riga e compasso (a breve, ciò potrà essere facilmente dedotto).

Assegnato un cubo avente spigoli di misura  $\ell$ , il suo volume è  $V = \ell^3$ . Si vuole costruire un cubo di volume  $V' = 2V = 2\ell^3$ . Questo avrà come spigolo un segmento di lunghezza  $\ell' = \ell\sqrt[3]{2}$ . Il problema si riduce a determinare se, dato un segmento di lunghezza  $\ell$ , sia possibile costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza  $\ell\sqrt[3]{2}$  (Figura 1, sinistra).

Assegnato un cerchio di raggio  $r$ , la sua area è  $A = \pi r^2$ . Si vuole costruire un quadrato di area  $A$ . Questo avrà come lato un segmento di lunghezza  $\ell = r\sqrt{\pi}$ . Il problema si riduce a determinare se, dato un segmento di lunghezza  $r$ , sia possibile costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza  $r\sqrt{\pi}$  (Figura 1, destra).



**Figura 1:** Duplicazione del cubo e quadratura del cerchio.

## 2 Costruzioni con riga e compasso e numeri costruibili

Cominciamo richiamando i concetti matematici che sono alla base del nostro studio, in particolare specifichiamo cosa vuol dire effettuare una costruzione con riga e compasso. Innanzitutto precisiamo che in questo contesto gli strumenti riga e compasso si considerano «ideali», cioè non graduati e quindi senza la possibilità di effettuare misurazioni. Questi vincoli discendono dalla struttura assiomatica della geometria euclidea, infatti le operazioni “lecite” sono quelle stabilite dai primi tre **postulati di Euclide**, così enunciati:

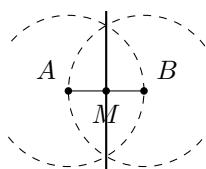
1. *È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.*
2. *È possibile prolungare illimitatamente una retta finita (un segmento) in linea retta.*
3. *È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza (raggio) qualsiasi.*

Quindi, la riga e il compasso devono essere considerati come strumenti che permettono di effettuare *solo* queste tre operazioni (e non altre derivanti dalla loro struttura fisica, come ad esempio misurare e riportare la misura di segmenti o conservare l'apertura del compasso).

Nella formulazione classica quindi, una *costruzione con riga e compasso* è una sequenza finita di queste tre operazioni di base, partendo da almeno due punti.

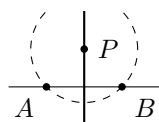
Vediamo alcuni esempi, a cui nel seguito ci riferiremo come *costruzioni elementari*.

### 1. L'asse di un segmento



*Dato un segmento di estremi  $A$  e  $B$ , si costruiscono la circonferenza di centro  $A$  e passante per  $B$ , e la circonferenza di centro  $B$  e passante per  $A$ ; si individuano i punti di intersezione tra le due circonferenze e si traccia la retta che li congiunge.*

### 2. La perpendicolare ad una retta data in un punto dato



*Data una retta  $r$  e un punto  $P$ , si costruisce una circonferenza di centro  $P$  che interseca  $r$  in due punti  $A$  e  $B$  e si traccia l'asse del segmento  $AB$ .*

### 3. La parallela ad una data retta in un punto dato

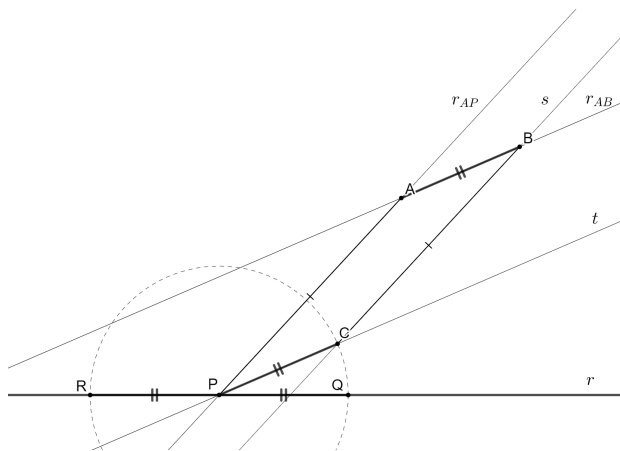
*Data una retta  $r$  e un punto  $P$ , si costruisce la perpendicolare  $s$  a  $r$  passante per  $P$  e si costruisce la perpendicolare  $r'$  a  $s$  passante per  $P$ .*

### 4. Un segmento della stessa lunghezza di un segmento dato su una retta data partendo da un punto dato

Riuscite a effettuare da soli questa operazione (ovvero quella di "applicare un segmento a una retta") tramite una costruzione con riga e compasso che sfrutti le precedenti costruzioni elementari? Per la soluzione, vedete la Figura 2 e la sua didascalia.

Il primo passo da compiere è quello di gettare una base analitica: a partire da due punti, possiamo fissare un'unità di misura (la loro distanza) e possiamo costruire un sistema di assi cartesiani con origine in uno dei due (possiamo tracciare la retta per i due punti e costruire la sua perpendicolare per uno dei due). Questo è quello che facciamo ad esempio su un foglio a quadretti: possiamo scegliere un punto come origine e scegliere la lunghezza del lato di un quadretto come unità di misura.

Consideriamo allora un sistema di assi cartesiani con origine  $O$  e un punto  $U$  di coordinate  $(1, 0)$ . A partire da  $O$  e  $U$  possiamo costruire rette e circonferenze, inoltre possiamo individuare i punti di intersezione degli oggetti costruiti e sfruttarli per fare altre costruzioni. Definiamo quindi i **punti**, le **rette** e le **circonferenze costruibili** secondo le seguenti regole ricorsive:

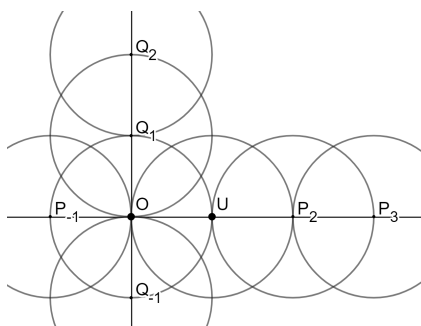


**Figura 2:** Dati un segmento di estremi  $A$  e  $B$ , una retta  $r$  e un punto  $P \in r$ , si costruiscono la retta  $r_{AP}$  passante per  $A$  e  $P$ , la retta  $r_{AB}$  passante per  $A$  e  $B$ , la retta  $s$  parallela a  $r_{AP}$  passante per  $B$  e la retta  $t$  parallela a  $r_{AB}$  passante per  $P$ . Si individua il punto  $C$  di intersezione tra  $s$  e  $t$  e si costruisce la circonferenza di centro  $P$  e passante per  $C$ . Questa individua due punti  $Q$  e  $R$  su  $r$ , ciascuno dei quali determina con  $P$  un segmento congruente ad  $AB$ .

- I punti  $O$  e  $U$  sono costruibili.
- Una retta tra punti costruibili è costruibile.
- Una circonferenza con centro un punto costruibile e passante per un punto costruibile è costruibile.
- Un punto di intersezione di due rette costruibili o di una retta e una circonferenza costruibili o di due circonferenze costruibili è costruibile.

Il nostro obiettivo è quello di determinare l'insieme dei punti costruibili, che indichiamo con  $\Pi$ , cioè l'insieme di tutti quei punti che sono raggiungibili mediante un numero finito di costruzioni a partire da  $O$  e  $U$ . Vediamo ad esempio che partendo da  $O$  e  $U$  è possibile costruire tutto il reticolo dei punti del piano di coordinate intere:

nel nostro sistema di assi cartesiani, possiamo costruire la circonferenza di centro  $O$  e passante per  $U$ , individuando sugli assi i punti  $P_{-1}$ ,  $Q_{-1}$ ,  $Q_1$  di coordinate rispettivamente  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$ .



**Figura 3:** Costruzione dei punti di coordinate  $(m, 0)$  e  $(0, n)$ .

Possiamo costruire la circonferenza di centro  $U$  e passante per  $O$ , individuando sull'asse delle ascisse un punto  $P_2$  di coordinate  $(2, 0)$ , e possiamo costruire la circonferenza di centro  $P_2$  e passante per  $U$ , individuando il punto  $P_3$  di coordinate  $(3, 0)$ . Procedendo in questo modo sia sull'asse delle ascisse che su quello delle ordinate, è facile rendersi conto del fatto che, se  $m, n \in \mathbb{Z}$ , i punti di coordinate  $(m, 0)$  e  $(0, n)$  sono costruibili. Ora, tracciando le perpendicolari agli assi cartesiani per questi punti e considerando le loro intersezioni, possiamo individuare tutti i punti di coordinate intere  $(m, n)$  (vedi la Figura 3).

Come si può notare dalla figura, in realtà già con queste prime costruzioni abbiamo individuato molti altri punti del piano. Come possiamo caratterizzare i punti di  $\Pi$ ?

Per rispondere, ci svincoliamo dell'approccio sintetico della geometria euclidea per fare spazio a un approccio algebrico, che si focalizzi sulle proprietà - algebriche - delle coordinate dei punti costruibili. A partire dal nostro sistema di riferimento, diamo la seguente:

**Definizione 2.1.** Un numero  $\alpha \in \mathbb{R}$  si dice **costruibile (con riga e compasso)** se è possibile costruire un segmento di misura  $|\alpha|$  facendo uso soltanto della riga e del compasso. Indichiamo con  $\mathcal{C}$  l'insieme dei numeri costruibili.

Questa prima definizione sembra non tenere conto delle coordinate dei punti costruibili, ma solo delle misure dei segmenti che li congiungono. In realtà vale la seguente caratterizzazione dei punti del piano costruibili (provate a dimostrarla sfruttando le costruzioni elementari):

*Un punto di coordinate  $(x, y)$  è costruibile se e solo se le sue coordinate  $x$  e  $y$  sono numeri costruibili.*

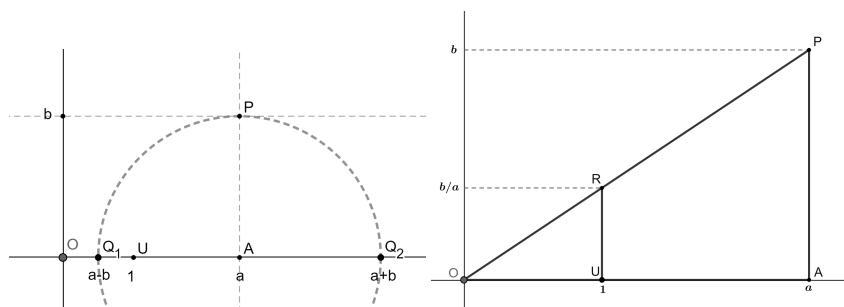
Questo significa che, fissato un sistema di riferimento, determinare l'insieme  $\mathcal{C}$  dei punti del piano costruibili equivale a determinare l'insieme  $\mathcal{C}$  dei numeri costruibili.

Cerchiamo allora di capire come è fatto  $\mathcal{C}$ . Abbiamo già visto che tutti i punti di coordinate  $(m, n)$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$  sono costruibili, quindi sicuramente  $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{C}$ . Inoltre possiamo costruire il segmento che congiunge  $O$  al punto di coordinate  $(m, n)$ , e questo ha lunghezza  $\sqrt{m^2 + n^2}$ . Allora per definizione di numero costruibile  $\sqrt{m^2 + n^2} \in \mathcal{C}$  per ogni  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Possiamo anche individuare i punti medi dei segmenti, dimezzandone la lunghezza. Da ciò segue che se  $\alpha \in \mathcal{C}$ , anche  $\frac{\alpha}{2^n} \in \mathcal{C}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Vediamo ora come possono essere tradotti i due problemi dell'antichità che abbiamo approfondito alla fine della Sezione 1 in termini di numeri costruibili:

- Nel caso della duplicazione del cubo, possiamo scegliere i punti  $O$  e  $U$  ad esempio su due vertici adiacenti di una faccia del cubo, e scegliere quindi la lunghezza di uno spigolo come unità di misura. In questo sistema di riferimento, duplicare un cubo equivale a costruire un segmento di misura  $\sqrt[3]{2}$ . Quindi il problema è equivalente alla domanda: " $\sqrt[3]{2} \in \mathcal{C}$  ? "
- Assegnato un cerchio, possiamo sempre individuare il suo centro con riga e compasso (basta tracciare due corde non parallele della sua circonferenza e intersecare i loro assi). Possiamo quindi scegliere un sistema di riferimento dove  $O$  è il centro e  $U$  un punto arbitrario della circonferenza, fissando quindi come unità di misura il raggio del cerchio. Allora quadrare un cerchio equivale a costruire un segmento di misura  $\sqrt{\pi}$ . Quindi il problema è equivalente alla domanda: " $\sqrt{\pi} \in \mathcal{C}$  ? "

Anziché approfondire qui come si possa formalizzare il problema della trisezione dell'angolo in termini di numeri costruibili, invitiamo il lettore a riflettere sulla questione indipendentemente. Avremo qualcosa da dire in proposito alla fine di questo articolo!



**Figura 4:** Somma e differenza di numeri costruibili (a sinistra); rapporto di numeri costruibili (a destra).

Il prossimo passo è quello di indagare le proprietà algebriche dell'insieme  $\mathcal{C}$ . Ad esempio dati due numeri costruibili  $a$  e  $b$ , cosa possiamo dire sulla somma  $a + b$  e sul prodotto  $a \cdot b$ ? Sono ancora numeri costruibili? E la differenza  $a - b$  e il quoziente  $a/b$  sono ancora numeri costruibili?

Vediamo subito che la risposta è affermativa grazie alle costruzioni rappresentate in Figura 4:

- Chiusura per somma e differenza:** se  $a, b \in \mathcal{C}$ , allora  $a \pm b \in \mathcal{C}$ .  
 Possiamo costruire i punti  $A$  e  $P$  di coordinate rispettivamente  $(a, 0)$  e  $(a, b)$ . Possiamo costruire la circonferenza di centro  $A$  e passante per  $P$  che individua sull'asse delle ascisse un punto  $Q_1$  di coordinate  $(a - b, 0)$  e un punto  $Q_2$  di coordinate  $(a + b, 0)$ , quindi  $a \pm b \in \mathcal{C}$ .
- Chiusura per quoziente:** se  $a, b \in \mathcal{C}$  e  $a \neq 0$ , allora  $b/a \in \mathcal{C}$ .  
 Considerando ancora i punti  $A$  e  $P$ , possiamo tracciare la retta  $r$  per  $O$  e  $P$ , tracciare la retta  $s$  parallela all'asse delle ordinate passante per  $U$  e, intersecando  $r$  e  $s$ , individuare il punto  $R$ . I triangoli  $OUR$  e  $OAP$  sono simili e quindi i loro lati sono in proporzione:  $UR : OU = AP : OA$ . Ne consegue che  $\overline{UR} = \frac{b}{a} \in \mathcal{C}$ .
- Chiusura per prodotto:** se  $a, b \in \mathcal{C}$ , allora  $a \cdot b \in \mathcal{C}$ .  
 Poiché  $1 \in \mathcal{C}$ , per quanto appena visto si deve avere  $\frac{1}{a} \in \mathcal{C}$ , ma quindi anche  $\frac{b}{1/a} = a \cdot b \in \mathcal{C}$ .

Come diretta conseguenza di questa proprietà abbiamo che ogni numero razionale  $\frac{m}{n}$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$  e  $n \neq 0$ , è costruibile. Dunque otteniamo che  $\mathbb{Q} \subsetneq \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$ .

L'insieme dei numeri costruibili  $\mathcal{C}$ , quindi, è *chiuso* rispetto alle quattro operazioni razionali, esattamente come l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali o come l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali: è sempre possibile sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere due numeri (eccetto dividere per 0) restando all'interno di  $\mathcal{C}$ . Gli insiemi di numeri (ma non solo) che prevedono queste regolarità rispetto alle quattro operazioni sono molto importanti nello studio dell'algebra, e si chiamano **campi**. La nozione di campo sarà cruciale nello studio delle costruzioni con riga e compasso.

Un'ulteriore proprietà che caratterizza in modo decisivo l'insieme  $\mathcal{C}$  è che questo è *chiuso per estrazione di radice quadrata* di numeri non negativi:

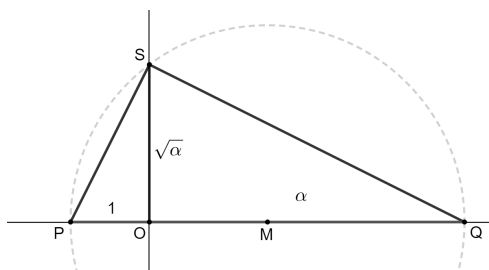
Sia  $\alpha \in \mathcal{C}$  tale che  $\alpha \geq 0$ . Allora  $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}$ .

*Dimostrazione.* Se  $\alpha \geq 0$  è un numero costruibile, allora possiamo costruire sull'asse delle ascisse un segmento di lunghezza  $\alpha$  avente come estremi i punti  $O$  e il punto  $Q$  di coordinate  $(\alpha, 0)$ . Inoltre sappiamo che il punto  $P$  di coordinate  $(-1, 0)$  è costruibile, per cui è costruibile anche il punto medio  $M$  del segmento  $PQ$ .

Costruiamo la circonferenza di centro  $M$  e passante per  $P$  e  $Q$  (Figura 5). Questa individua sul semiasse positivo delle ordinate un punto  $S$ . Il triangolo  $PQS$  è rettangolo in  $S$  perché un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto. Per il secondo teorema di Euclide vale

$$\overline{OS}^2 = \overline{PO} \cdot \overline{OQ} = \alpha$$

da cui  $\overline{OS} = \sqrt{\alpha}$ , e quindi  $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{C}$ . □



**Figura 5:** Costruzione della radice quadrata di un numero costruibile.



Abbiamo quindi che all'interno di  $\mathcal{C}$  oltre che sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere due numeri, è possibile eseguire l'operazione di estrazione di radice quadrata di ogni numero non negativo. Nella prossima sezione, vedremo che queste proprietà forniscono una descrizione completa dell'insieme  $\mathcal{C}$ , nel senso che ogni numero costruibile si può ottenere a partire dai numeri razionali combinando le quattro operazioni razionali e l'estrazione di radice quadrata.

### 3 Costruzioni con riga e compasso dal punto di vista algebrico

Per definizione, se  $\alpha$  è un numero costruibile, allora è possibile costruire un segmento di lunghezza  $|\alpha|$  per mezzo di un numero finito di costruzioni a partire da due punti. Il nostro intento è quello di analizzare i singoli passi della costruzione con riga e compasso di  $\alpha$ , interpretandoli algebricamente uno alla volta.

Nella nostra trattazione, abbiamo scelto  $O$  e  $U$  come punti di partenza per poter effettuare costruzioni e, da questi, abbiamo osservato che è possibile costruire l'intero insieme dei punti del piano di coordinate razionali, che indichiamo con  $\Pi_0 \subsetneq \Pi$ . Per semplificare le cose ed evitare di partire da due soli punti, possiamo supporre di avere già a disposizione  $\Pi_0$  come insieme di «punti base» per costruire  $\alpha$ .

Partendo da  $\Pi_0$ , le costruzioni possibili sono rette passanti per punti di  $\Pi_0$  e circonferenze di centro un punto di  $\Pi_0$  e passanti per un punto di  $\Pi_0$ . Nello specifico, siano  $P_1, P_2 \in \Pi_0$  punti di coordinate  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  rispettivamente. Indichiamo  $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  la distanza tra  $P_1$  e  $P_2$ . Ricordiamo che:

- La retta passante per  $P_1$  e  $P_2$  ha equazione

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$$

ossia è della forma  $ax + by + c = 0$  con  $a = y_2 - y_1$ ,  $b = x_1 - x_2$ ,  $c = x_2y_1 - x_1y_2 \in \mathbb{Q}$ .

- La circonferenza di centro  $P_1$  e passante per  $P_2$  ha equazione

$$x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y + x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$$

ossia è della forma  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  con  $a = -2x_1$ ,  $b = -2y_1$ ,  $c = x_1^2 + y_1^2 - r^2 \in \mathbb{Q}$

In particolare, le equazioni delle rette e circonferenze costruibili a partire da  $\Pi_0$  hanno coefficienti in  $\mathbb{Q}$ . Osserviamo che questo è conseguenza del solo fatto che  $\mathbb{Q}$  è chiuso rispetto alle operazioni razionali. Le coordinate dei punti di intersezione di due di questi oggetti sono determinate risolvendo il sistema algebrico formato dalle loro equazioni.

- Il caso di **due rette**: se le equazioni di due rette (non parallele) hanno coefficienti in  $\mathbb{Q}$ , allora sono in  $\mathbb{Q}$  anche le coordinate del loro punto di intersezione (provate a verificarlo). Geometricamente, questo significa che l'uso della sola riga non ci permette di *uscire fuori* da  $\Pi_0$ , e ciò è conseguenza del solo fatto che  $\mathbb{Q}$  è un campo.
- Il caso di **due circonferenze** si riduce a quello di una retta e una circonferenza: basta considerare il sistema (equivalente) ottenuto sottraendo la seconda equazione alla prima.
- Il caso di **una retta e una circonferenza**: consideriamo un sistema di secondo grado della forma

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{con } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$$

Osserviamo che almeno uno tra  $a_2$  e  $b_2$  è non nullo. Ad esempio se  $b_2 \neq 0$  (ma un discorso analogo vale se  $a_2 \neq 0$ ), sostituendo nella prima equazione  $y = -\frac{1}{b_2}(a_2x + c_2)$ , si ottiene

$$\underbrace{(a_2^2 + b_2^2)}_{=A \in \mathbb{Q}} x^2 + \underbrace{(2a_2c_2 + a_1b_1^2 - a_2b_1b_2)}_{=B \in \mathbb{Q}} x + \underbrace{(a_2^2 - b_1b_2c_2 + c_1b_2^2)}_{=C \in \mathbb{Q}} = 0$$

Sia  $\Delta = B^2 - 4AC$ . Nel caso in cui valga la condizione  $\Delta \geq 0$  (che geometricamente si traduce con l'esistenza di punti di intersezione tra le curve, condizione che nel seguito supporremo sempre vera in virtù degli scopi del nostro studio) la soluzione dell'equazione, che individua le ascisse dei punti di intersezione, è data dalla formula:

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2A}, \quad \text{da cui } y = \frac{B - 2Ac_2}{2Ab_2} \mp \frac{a_2\sqrt{\Delta}}{2Ab_2}$$

Entrambe le coordinate sono quindi della forma  $a + b\sqrt{\Delta}$ , con  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

Nel caso in cui  $\Delta$  non sia il quadrato di un numero razionale (ossia  $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{Q}$ ), l'uso del compasso ci permette di *uscire fuori* da  $\Pi_0$ , introducendo punti di coordinate irrazionali.

Quando introduciamo un punto nuovo  $\tilde{P} \notin \Pi_0$ , possiamo passare alla fase successiva: costruire rette e circonferenze sfruttando anche questo punto. Come possiamo esprimere questo in termini algebrici?

Vogliamo scrivere le equazioni di queste rette e circonferenze per caratterizzare le coordinate dei loro punti di intersezione, in modo del tutto analogo a quanto fatto partendo da  $\Pi_0$ . Come già sottolineato, il punto di forza di questa prima analisi è stata la struttura di campo di  $\mathbb{Q}$ . Per replicare lo studio precedente, possiamo allora pensare di *estendere* il campo  $\mathbb{Q}$  a un nuovo campo  $\mathbb{K}_1$  di numeri costruibili, che contiene  $\mathbb{Q}$  e le coordinate di  $\tilde{P}$ . Allora come prima, potremmo considerare l'insieme dei punti di coordinate in  $\mathbb{K}_1$ , che indichiamo con  $\Pi_1$ , e ripartire considerando rette e circonferenze di equazioni a coefficienti in  $\mathbb{K}_1$ . Chi può essere  $\mathbb{K}_1$ ?

Abbiamo visto che  $\tilde{P}$  ha coordinate irrazionali  $(x_{\tilde{P}}, y_{\tilde{P}})$  che sono della forma  $a + b\sqrt{\Delta}$ , con  $a, b, \Delta \in \mathbb{Q}$  e  $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{Q}$ . Poiché  $\mathcal{C}$  è un campo, allora possiamo combinare a piacimento le quattro operazioni tra numeri costruibili restando all'interno di  $\mathcal{C}$ . Quindi in particolare  $\frac{a+b\sqrt{\Delta}}{b} - \frac{a}{b} = \sqrt{\Delta} \in \mathcal{C}$ , ma anche  $p + q\sqrt{\Delta} \in \mathcal{C}$  per ogni  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Ma allora l'insieme  $K = \{p + q\sqrt{\Delta} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$  è tutto contenuto in  $\mathcal{C}$  e per di più è un campo (provate a verificare che  $K$  è chiuso rispetto alle quattro operazioni razionali).

Poniamo allora  $\mathbb{K}_1 = K$  e ripartiamo dai punti di  $\Pi_1$  (che sappiamo essere tutti costruibili). Iteriamo il processo finché non raggiungiamo un segmento di misura  $|\alpha|$  (cioè, a meno di una costruzione elementare, il punto di coordinate  $(\alpha, 0)$ ), quindi finché non raggiungiamo un campo  $\mathbb{K}_n$  che contenga il numero  $\alpha$ .

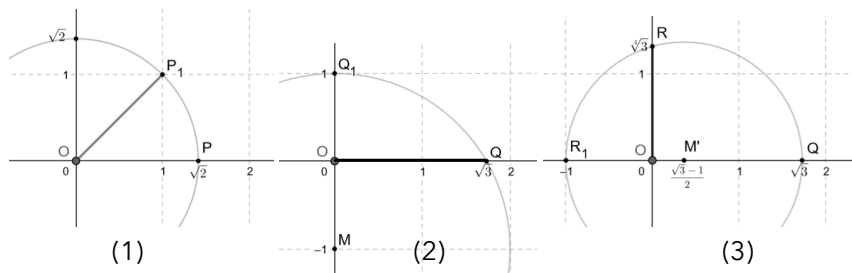
In termini algebrici, la sequenza delle costruzioni può essere tradotta in una sequenza di *estensioni di campi*:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \mathbb{K}_3 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{K}_n$$

dove ogni contenimento è il dato algebrico di ciascun passo della costruzione geometrica: si ha  $\mathbb{K}_{i-1} = \mathbb{K}_i$  se nel passaggio  $i$ -esimo si è in-

dividuato un punto di coordinate in  $\mathbb{K}_{i-1}$ , cioè si è rimasti all'interno di  $\Pi_{i-1}$ ; si ha invece  $\mathbb{K}_{i-1} \subsetneq \mathbb{K}_i$  se nel passaggio  $i$ -esimo si è usciti al di fuori di  $\Pi_{i-1}$ . In questo secondo caso, abbiamo  $\mathbb{K}_i = \{p + q\sqrt{\Delta_i} \mid p, q \in \mathbb{K}_{i-1}\}$  per qualche  $\Delta_i \in \mathbb{K}_{i-1}$  positivo tale che  $\sqrt{\Delta_i} \notin \mathbb{K}_{i-1}$ .

Facciamo un esempio concreto: supponiamo di voler costruire il numero  $1 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{3}$ . Partendo da  $\Pi_0$ , una strada può essere la seguente:



**Figura 6:** Tre costruzioni geometriche per ottenere il numero  $1 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{3} \in \mathbb{C}$ .

### Geometria

- (1) Costruiamo un segmento di misura  $\sqrt{2}$  congiungendo l'origine con il punto  $P_1$  di coordinate  $(1, 1)$ . Puntando il compasso in  $O$  con apertura in  $P_1$ , tracciamo una circonferenza che individua sull'asse delle ascisse il punto  $P$  di coordinate  $(\sqrt{2}, 0)$ .

- (2) Costruiamo un segmento di misura  $\sqrt{3}$  tracciando la circonferenza di centro nel punto  $M$  di coordinate  $(0, -1)$  e passante per il punto  $Q_1$  di coordinate  $(0, 1)$ . Individuiamo quindi il punto  $Q$  di intersezione con il semiasse positivo delle ascisse, che ha coordinate  $(\sqrt{3}, 0)$ .

- (3) Costruiamo un segmento di misura  $\sqrt[4]{3}$  con la classica costruzione della radice quadrata: a partire da  $Q$ , dal punto  $R_1$  di coordinate  $(-1, 0)$  e dalla circonferenza di centro nel loro punto medio  $M'$  e passante per  $Q$ , si individua il punto  $R$  di coordinate  $(0, \sqrt[4]{3})$ .

### Algebra

Estendiamo  $\mathbb{Q}$  a  
 $\mathbb{K}_1 =$   
 $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Estendiamo  $\mathbb{K}_1$  a  
 $\mathbb{K}_2 =$   
 $\{p + q\sqrt{3} \mid p, q \in \mathbb{K}_1\}$

Estendiamo  $\mathbb{K}_2$  a  
 $\mathbb{K}_3 =$   
 $\{x + y\sqrt[4]{3} \mid x, y \in \mathbb{K}_2\}$   
 e ci fermiamo perché  
 $1 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{3} \in \mathbb{K}_3$

A questo punto è facile costruire un segmento di misura  $1 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{3}$ : applicando il segmento  $OR$  all'asse delle ascisse a partire da  $P$ , troviamo un punto  $S$  di coordinate  $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}, 0)$ . Questo individua con  $R_1$  un segmento di misura  $1 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{3}$ .

## 4 Problemi impossibili

Abbiamo visto come ciascuno dei problemi si riduca a un test di appartenenza di un certo numero irrazionale  $\alpha$  all'insieme  $\mathcal{C}$ . Abbiamo anche visto che se  $\alpha \in \mathcal{C}$ , allora esiste una successione di estensioni di campi:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \mathbb{K}_3 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{K}_n$$

con  $\alpha \in \mathbb{K}_n$ . Possiamo assumere che tutti i contenimenti siano stretti, a meno di eliminare dalla successione quei contenimenti che sono uguaglianze. Possiamo anche assumere di fermarci non appena si raggiunge un campo contenente  $\alpha$ , cioè possiamo assumere che  $\alpha \in \mathbb{K}_n$  ma  $\alpha \notin \mathbb{K}_{n-1}$ . In questo caso  $\mathbb{K}_n = \{p + q\sqrt{\delta} \mid p, q \in \mathbb{K}_{n-1}\}$  per qualche numero positivo  $\delta \in \mathbb{K}_{n-1}$ .

### 4.1 È impossibile duplicare un cubo con riga e compasso ( $\sqrt[3]{2} \notin \mathcal{C}$ )

Supponiamo per assurdo  $\sqrt[3]{2} \in \mathcal{C}$ . Allora, con la notazione precedente si ha  $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{\delta} \in \mathbb{K}_n$  per qualche  $a, b \in \mathbb{K}_{n-1}$  con  $b \neq 0$  (perché  $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{K}_{n-1}$ ). Elevando al cubo entrambi i membri dell'identità precedente, si ottiene:

$$2 = a^3 + 3ab^2\delta + b(3a^2 + b^2\delta)\sqrt{\delta}$$

Osserviamo che poiché  $\delta > 0$ , si ha  $b(3a^2 + b^2\delta) \neq 0$ . Dividendo entrambi i membri per questa quantità e isolando  $\sqrt{\delta}$  troviamo

$$\sqrt{\delta} = \frac{\overbrace{2 - a^3 - 3ab^2\delta}^{\in \mathbb{K}_{n-1}}}{\underbrace{b(3a^2 + b^2\delta)}_{\in \mathbb{K}_{n-1}}} \in \mathbb{K}_{n-1}$$

e questo è assurdo, perché ad esempio implica che  $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{\delta} \in \mathbb{K}_{n-1}$ , contro le ipotesi iniziali.

## 4.2 È impossibile quadrare un cerchio con riga e compasso ( $\sqrt{\pi} \notin \mathcal{C}$ )

Sia  $\alpha \in \mathcal{C}$ . Con la notazione iniziale abbiamo  $\alpha = p + q\sqrt{\delta} \in \mathbb{K}_n$  per qualche  $p, q \in \mathbb{K}_{n-1}$ . Questo significa che  $(\alpha - p)^2 = q^2\delta$  e quindi  $\alpha$  soddisfa l'equazione di secondo grado  $x^2 - 2px + p^2 - q^2\delta = 0$  a coefficienti in  $\mathbb{K}_{n-1}$ . Inoltre, possiamo scrivere questi coefficienti nella forma  $p_1 + p_2\sqrt{\delta'}$ , con  $p_1, q_1, \delta' \in \mathbb{K}_{n-2}$ , da cui, isolando  $\sqrt{\delta'}$  ed elevando al quadrato entrambi i membri, troviamo che  $\alpha$  soddisfa un'equazione di grado 4 a coefficienti in  $\mathbb{K}_{n-2}$ . Procedendo in questo modo, è facile rendersi conto del fatto che ogni numero costruibile è radice di un polinomio a coefficienti in  $\mathbb{Q}$  di grado una potenza di 2.

In matematica, i numeri che soddisfano un'equazione polinomiale a coefficienti razionali si dicono *algebrici*, tutti gli altri si dicono *trascendenti*. Nel 1882 Ferdinand von Lindemann ha dimostrato che  $\pi$  è un numero trascendente, e questo ha chiuso definitivamente il problema della quadratura del cerchio:  $\pi \notin \mathcal{C}$  e in particolare  $\sqrt{\pi} \notin \mathcal{C}$ .

## 4.3 È impossibile trisecare l'angolo di $60^\circ$ con riga e compasso ( $\cos(\frac{\pi}{9}) \notin \mathcal{C}$ )

Nel corso dell'intero articolo abbiamo sempre accantonato il terzo dei problemi menzionati nell'introduzione: quello della trisezione dell'angolo. Lasciamo sia il processo di formalizzazione e "algebrizzazione" del problema, sia la sua soluzione (in termini della non costruttibilità di un certo numero) come sfida per il lettore.

Qui di seguito proponiamo alcuni suggerimenti che potrebbero risultare utili!

- Costruire un angolo di  $60^\circ$  avente vertice nell'origine e come lato il semiasse positivo delle ascisse, e provare che è trisecabile se e solo se  $\cos(\pi/9) \in \mathcal{C}$ .
- Provare l'identità goniometrica  $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$ .
- Sostituendo  $3t = \pi/3 + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , dedurre che il polinomio  $p(x) = 4x^3 - 3x - 1/2$  ammette le tre radici distinte

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right), -\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right), -\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right).$$

d) Provare che le radici di  $p(x)$  sono irrazionali (cosa succede imponendo  $4(r/s)^3 - 3(r/s) - 1/2 = 0$ , se  $r, s \in \mathbb{Z}$  non hanno divisori primi in comune?)

A questo punto supponiamo per assurdo che  $\cos(\frac{\pi}{9}) \in \mathbb{C}$ . Allora possiamo scrivere  $\cos(\frac{\pi}{9}) = a + b\sqrt{\delta} \in \mathbb{K}_n$  per qualche  $a, b \in \mathbb{K}_{n-1}$  e  $\cos(\frac{\pi}{9}) \notin \mathbb{K}_{n-1}$ .

e) Verificare che se  $a + b\sqrt{\delta}$  è radice di  $p(x)$ , allora lo sono anche  $a - b\sqrt{\delta}$  e  $-2a$ .

f) Sfruttando i punti precedenti e le formule di duplicazione del coseno, dimostrare che se uno tra  $\cos(\frac{2\pi}{9}), \cos(\frac{4\pi}{9})$  è in  $\mathbb{K}_{n-1}$ , allora anche  $\cos(\frac{\pi}{9}) \in \mathbb{K}_{n-1}$ , trovando la contraddizione cercata.

## Bibliografia

- [1] R. CHIRIVÌ, I. DEL CORSO, R. DVORNICICH, *Esercizi scelti di Algebra*, Vol. 2, pp. 47-49.
- [2] R. COURANT, H. ROBBINS, *Che cos'è la matematica?*, pp. 179-194.
- [3] I tre postulati di Euclide dal web, vedi ad esempio <https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom>



# Red-Blue Hackenbush

di **Dania Lazzarini**, studentessa del Corso di Laurea Triennale in Matematica dell'Università di Pisa

In una partita a Red-Blue Hackenbush, due giocatori si sfidano eliminando uno alla volta i segmenti di un grafo. Un esempio di grafo iniziale che potreste utilizzare per giocare è quello rappresentato qui sotto dalla Figura 1.

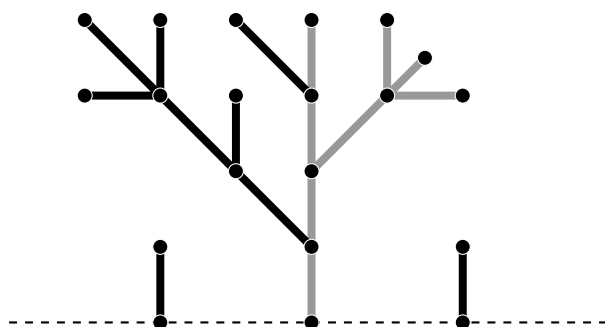
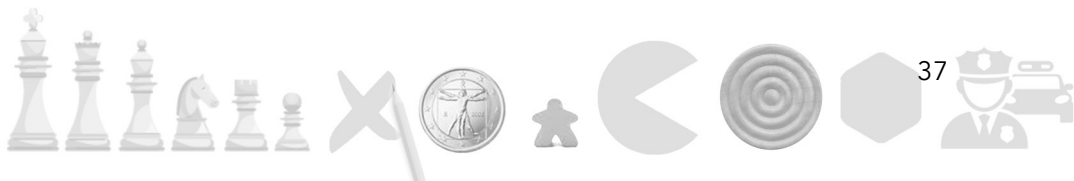


Figura 1

Come vedete, consiste in una linea orizzontale (che abbiamo disegnato tratteggiata) a cui sono "appoggiate" in uno o più punti alcune figure composte da segmenti di due tipi: *blu* e *rossi* (che per forza di cose abbiamo rappresentato qui come neri e grigi, rispettivamente). Più precisamente, queste figure sono *grafi connessi*: ciascuna ha un insieme di vertici (i "punti" neri in figura) che possono essere collegati a coppie da uno o più archi (ovvero, segmenti; in alcune figure successive vedremo che è anche possibile tracciare curve anziché veri e propri segmenti), in modo che ciascun vertice del grafo risulti collegato tramite un cammino di archi a ogni altro. Ognuno di questi grafi connessi ha uno o più vertici disegnati sulla linea





orizzontale, che rappresenta il terreno.

Come questa costruzione iniziale venga creata non è importante: potrebbe essere assegnata all'inizio da una terza parte, ma anche disegnata dai giocatori stessi in base a regole concordate: ad esempio, i due giocatori, ai quali assegniamo i ruoli di giocatore "rosso" e giocatore "blu", potrebbero alternarsi nell'aggiungere un arco del proprio colore ciascuno, arrestandosi a un numero di archi prefissato. Un'altra possibilità interessante è quella di alternarsi nell'aggiungere a turno un arco del colore dell'avversario.

Vi consigliamo per prima cosa di provare a giocare su alcune delle figure fornite in questo articolo, e più avanti di sperimentare e sbizzarrirvi nella creazione dei vostri grafi! Riuscirete presto a intuire come grafi iniziali diversi portino ad andamenti diversi della partita e possano in qualche modo influire sulla vittoria o meno di ciascun giocatore.

Ma in cosa consiste il gioco vero e proprio?

I due giocatori (*blu* e *rosso*) devono, a turni alterni, cancellare un singolo segmento (o una singola curva) del proprio colore dalla figura di partenza.

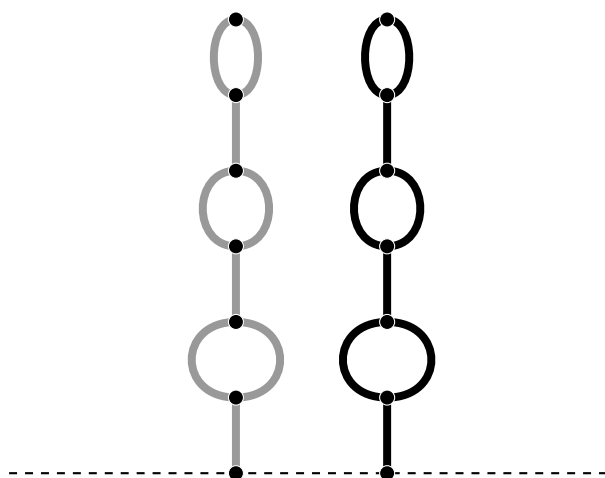
Questo segmento può essere rimosso da un punto qualsiasi del grafo, non necessariamente alle estremità, ma con un accorgimento: se cancellandolo vi sono vertici che risultino non più collegati alla linea orizzontale del "terreno", tutti questi vertici e tutti i collegamenti fra di essi vengono anch'essi cancellati.

L'idea ricalca, a grandi linee, la potatura di un albero, da cui il nome del gioco.

Il gioco termina quando un giocatore non ha più trattini da rimuovere: tale giocatore - come è sospettabile - sarà quello che avrà perso la partita.

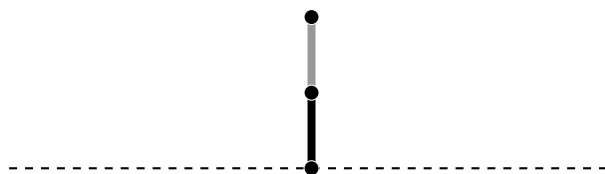
Prima di proseguire con qualche riflessione su alcune figure iniziali particolari e possibili strategie, vi invitiamo a provare una partita... o anche più d'una! Chi ha vinto? Avete qualche idea su come battere il vostro avversario?





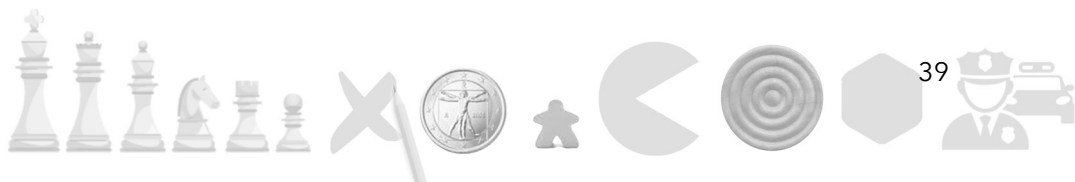
**Figura 2**

Vediamo che in alcuni casi, come quello in Figura 2, se il grafo è perfettamente simmetrico, con una strategia di imitazione, per cui cioè il giocatore che parte per secondo “copia” l’altro, il giocatore che inizia a giocare perderà certamente, perché all’altro sarà sufficiente imitare, per l’appunto, le mosse dell’avversario a ogni turno.



**Figura 3**

Consideriamo poi l’esempio molto semplice della Figura 3, in cui stavolta i colori non sono “separati”, ma compaiono entrambi nello stesso grafo connesso. In questo esempio è facile osservare che il giocatore assegnato al blu vincerà sicuramente, perché se inizia il turno allora anche l’unico trattino rosso viene rimosso, mentre se inizia il giocatore assegnato al rosso questo sarà comunque il primo giocatore a rimanere senza trattini da rimuovere.



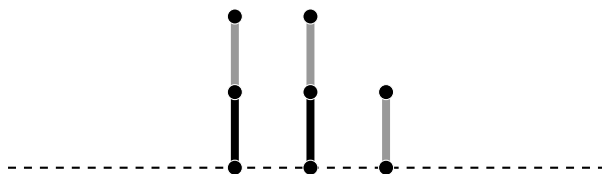


Figura 4

Proviamo a complicare un po' la situazione e a considerare la Figura 4. Anche questo è un caso che è semplice da verificare "a mano": in effetti si tratta di un gioco in cui perde sempre chi inizia! Come mai?

Grazie alla Figura 4, osservando che "contiene" due copie della Figura 3, avanziamo un nuovo suggerimento: in alcuni casi, per studiare una configurazione può essere utile capire come sono fatti i vari pezzi che la compongono.

Vediamo un ultimo caso.

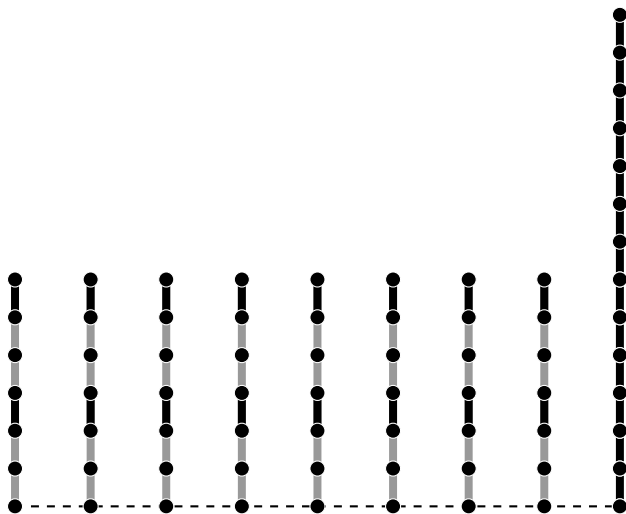


Figura 5

A prima vista non ci verrebbe da dire che si tratti ancora di una configurazione in cui il giocatore che parte perde, ma provando a giocare su questo schema vi accorgete che, anche in questo caso, è proprio così!



Il Red-Blue Hackenbush, come può rivelare una veloce ricerca sul web, è un gioco risolto: fissata la configurazione di partenza, è sempre possibile sapere, ancor prima di iniziare, quale giocatore vincerà (se questo chiaramente adotterà la strategia migliore).

L'intento di questa trattazione non era quello di fare una laboriosa analisi del gioco, ma semplicemente di incuriosire: speriamo quindi di esserci riusciti!

Vi invitiamo pertanto a provare a giocare creando le vostre configurazioni e soprattutto cercando un metodo per "scovare" il vincitore.

Si tratta di un gioco famoso, quindi chi fosse interessato a vedere subito - o ancora meglio dopo averci ragionato un po' - la soluzione del gioco potrà trovare in rete un gran numero di articoli: intanto noi vi lasciamo il link della pagina Wikipedia [1] e un libro di testo su cui poter trovare non solo questo gioco ma molti altri ancora [2] (il primo volume si apre proprio con la presentazione di questo gioco).

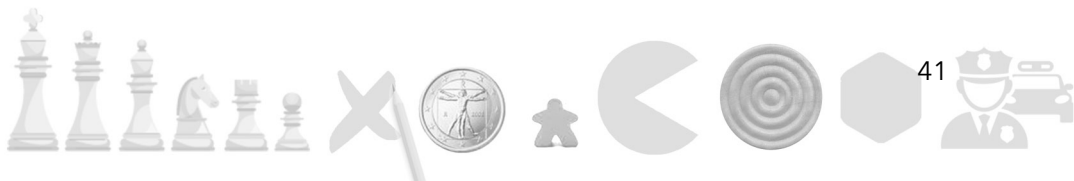
Se vi accingerete a capire la soluzione, potrete verificare che tutto ciò che abbiamo ottenuto "a mano" in questo articolo è coerente con l'analisi formale.

Red-Blue Hackenbush, come scoprirete, è solo una variante di un gioco che ne ha diverse, ma che non verranno riportate in questo articolo: speriamo di avervi incuriositi abbastanza da spingervi a cercarle!

## Bibliografia

[1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Hackenbush>

[2] ELWYN R. BERLEKAMP, JOHN H. CONWAY E RICHARD K. GUY, *Winning Ways for Your Wathematical Plays*, A K Peters/CRC Press.





# ***I problemi del giornalino***

una rubrica a cura di **Davide Lombardo**,  
ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

## **1 Divertissement**

### **1.1 Polinomio misterioso**

Il polinomio  $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  verifica  $p(1) = p(2) = p(3) = 0$ . Quanto vale  $p(12) + p(-8)$ ?

### **1.2 Testa o croce?**

Simona possiede 1024 monete (non truccate). Dopo averle lanciate una volta su un tavolo, ottenendo un certo numero di *teste* e un certo numero di *croci*, riprende in mano tutte quelle che mostrano un risultato *croce* e le lancia nuovamente. Ripete quindi questa operazione fino ad un massimo di altre 8 volte (o finché tutte le monete mostrano un risultato *testa*), riprendendo in mano ogni volta tutte le monete che mostrano un risultato *croce* e lanciandole nuovamente. In questo modo, ogni moneta viene lanciata fino ad un massimo di 10 volte. Qual è la probabilità che al termine di tutti questi lanci tutte le monete mostrino il risultato *testa*? Questa probabilità è numericamente vicina ad un qualche numero 'noto'?

### **1.3 Uno, due, quattro**

Trovare tutti gli interi  $x, y, z$  tali che  $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ .

## 1.4 Quadrilatero inscritto

Sia  $PQRS$  un quadrilatero inscritto in una circonferenza e tale che  $\angle PSR = 90^\circ$ . Siano  $H$  e  $K$  i piedi delle perpendicolari tracciate da  $Q$  alle rette  $PR$  e  $PS$ . Dimostrare che se il segmento  $HK$  incontra il segmento  $QS$ , allora il punto di intersezione è il punto medio di  $QS$ .

## 2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

In questo numero del giornalino ci occupiamo del problema di scrivere una 'formula esplicita' per la successione di Fibonacci. Ricordiamo che questa famosa successione è definita per ricorrenza tramite la regola

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ per } n \geq 1,$$

dove l'ultima formula esprime il fatto che ogni numero di Fibonacci a partire dal terzo è la somma dei due numeri di Fibonacci precedenti. La successione inizia quindi con i termini 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

1. Calcolare qualche termine della successione di Fibonacci e trovare (con l'aiuto di una calcolatrice!) i rapporti  $F_{n+1}/F_n$  per valori crescenti di  $n$ . Cosa si osserva?

Se avete fatto davvero il punto precedente, potreste stare sospettando che  $F_{n+1}/F_n$  sia approssimativamente uguale ad una certa costante  $\lambda$ . Se questo fosse vero *esattamente*, allora l' $n$ -esimo termine della successione di Fibonacci, ovvero il numero che abbiamo chiamato  $F_n$ , dovrebbe essere uguale a  $c \cdot \lambda^n$  per opportuni valori di  $c$  e di  $\lambda$ .

2. Trovare per quali valori di  $\lambda \neq 0$  vale

$$c\lambda^{n+1} = c\lambda^n + c\lambda^{n-1}$$

per ogni  $n \geq 1$  (si noti che il valore di  $c$  è irrilevante per la validità dell'equazione precedente, purché  $c \neq 0$ , perché si può raccogliere e semplificare da tutti i termini; si osservi anche che tale equazione corrisponderebbe a  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ , se effettivamente si avesse  $F_n = c\lambda^n$ ).

3. Siano  $\lambda_1, \lambda_2$  i valori trovati al punto precedente. Siano  $c_1, c_2$  numeri reali qualunque e sia  $G_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ . Si dimostri che la successione  $G_n$  soddisfa l'equazione

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$$

per ogni  $n \geq 1$ .

4. Scegliendo opportunamente i valori di  $c_1, c_2$  come al punto precedente, trovare una formula esplicita per  $F_n$ .
5. Questa formula spiega l'osservazione fatta al punto 1?

*Nota.* Con tecniche molto simili a quella suggerita sopra è possibile trovare 'formule esplicite' per qualsiasi *successione per ricorrenza lineare*, ovvero una successione  $a_n$ , indicizzata da  $n = 0, 1, 2, \dots$ , di cui si conoscano i termini  $a_0, \dots, a_r$  e che sia poi determinata ricorsivamente da una regola del tipo

$$a_{n+r+1} = c_r a_{n+r} + c_{r-1} a_{n+r-1} + c_{r-2} a_{n+r-2} + \dots + c_0 a_n,$$

dove  $c_0, \dots, c_r$  sono coefficienti fissati (nel caso dei numeri di Fibonacci si ha  $r = 1$  e  $c_0 = c_1 = 1$ ). Questo problema ha connessioni inaspettate con diverse aree della matematica, pura e applicata: calcolo di potenze di matrici, risoluzione di equazioni differenziali, modellizzazione di fenomeni epidemici...





# *Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media*

Raccogliamo ora una lista di libri, pagine web, canali YouTube e film incentrati sulla matematica per stimolare ulteriormente la vostra curiosità.

Alcuni dei libri che vi consigliamo contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti "più leggeri".

- 📖 C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.
- 📖 R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi.
- 📖 M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann.
- 📖 M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico.
- 📖 G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan.
- 📖 O. A. Ivanov, *Facile come  $\pi$  greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore.
- 📖 M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.



- 📖 G. Lolli, *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.
- 📖 A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo.
- 📖 S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.
- 📖 E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UML: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni.
- 📖 A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Ci siamo qui limitati a proporre una bibliografia essenziale: di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Ecco-ne alcuni, dai classici alle perle poco note.

- 🎬 D. Aronofsky, *II - Il teorema del delirio*, 1998.
- 🎬 M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.
- 🎬 R. Howard, *A beautiful mind*, 2001.
- 🎬 M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.
- 🎬 T. Melfi, *Il diritto di contare*, 2016.
- 🎬 M. Tyldum, *The imitation game*, 2014.





**SCAN ME**

Visita il canale youtube del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa all'indirizzo <https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw/>!

🎬 G. Van Sant, *Will Hunting - Genio ribelle*, 1997.

🎬 M. Webb, *Gifted - Il dono del talento*, 2017.

Adesso vi proponiamo una lista di canali YouTube legati alla matematica per scoprire un sacco di curiosità e perché no, trovare ottimi spunti per approfondimenti:

- ▶ <https://www.youtube.com/c/3blue1brown>
- ▶ <https://www.youtube.com/c/Mathologer>
- ▶ <https://www.youtube.com/user/numberphile>
- ▶ <https://www.youtube.com/c/ThinkTwiceLtu>
- ▶ <https://www.youtube.com/user/blackpenredpen>
- ▶ <https://www.youtube.com/c/DrPeyam>

A proposito, potete trovare su YouTube il canale del nostro dipartimento! Fateci visita (e, perché no, iscrivetevi!) all'indirizzo

<https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw/>

seguendo il link o inquadrando il QR presente in alto su questa pagina. Troverete presto una varietà di contenuti: per cominciare, vi consigliamo il video di presentazione "Studiare Matematica a Pisa" che trovate a questo link:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=pfh4IyDjbWY>

Non perdetevi poi la nostra intervista ad Alessio Figalli, medaglia Fields per la Matematica, in occasione della Settimana Matematica 2019:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=i6ha2pLLUuA>



Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- ✚ Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:  
<http://maddmaths.simai.eu/>
- ✚ Versione on-line del giornalino:  
<https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days>
- ✚ Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:  
<http://www.dm.unipi.it/webnew/>
- ✚ Sito delle olimpiadi di matematica:  
<http://olimpiadi.dm.unibo.it/>
- ✚ Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:  
<http://www.sns.it/>
- ✚ Sito degli studenti di matematica di Pisa:  
<http://poisson.phc.dm.unipi.it/>

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito:

<http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento>

