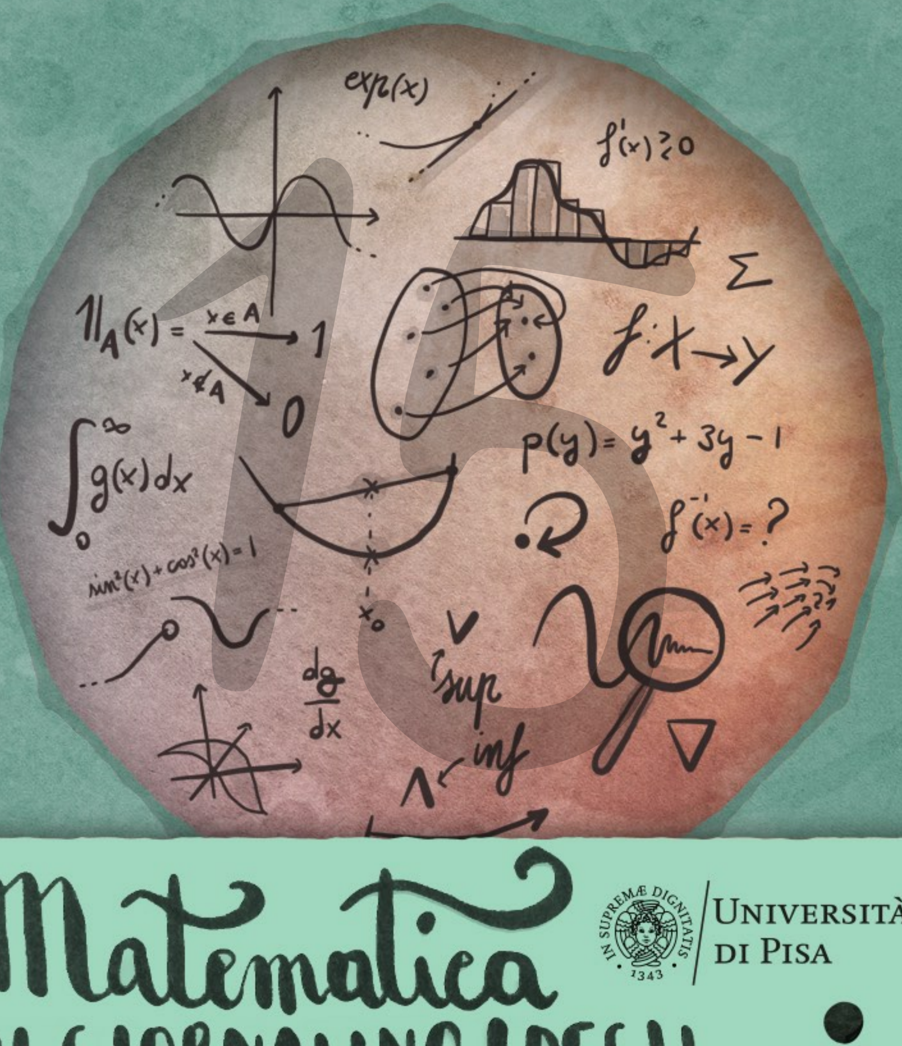
PISA, SETTEMBRE 2022



Matematica

il giornalino degli open days

Università di Pisa

notizie, giochi e pillole di matematica

Dipartimento di Matematica – Università di Pisa

Piano Nazionale
Lauree Scientifiche

Realizzato con il contributo del Piano Lauree Scientifiche – Matematica.

Su indicazione della Commissione Terza Missione.

Coordinamento: Alessandra Caraceni, Giovanni Gaiffi

Grafica: Alessandra Caraceni

Introduzione

Il **Giornalino degli Open Days** è una pubblicazione curata da professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa e rivolta principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori, che giunge con questa edizione al **numero 15**.

Se state considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario che abbia a che fare con la matematica, troverete materiale che fa per voi! Anzitutto, potrete leggere una presentazione del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa. Oltre a una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica e sulle varie opportunità di cui godono i nostri studenti, vi troverete alcuni dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in matematica.

In questo numero **Alessandro Iraci**, ricercatore di algebra presso il Dipartimento di Matematica di Pisa, ci guiderà alla scoperta del cubo di Rubik: avete mai tentato di "risolverne" uno? Ma soprattutto, vi siete mai chiesti quante siano in totale le sue configurazioni possibili? In un articolo che ci parla di gruppi, permutazioni e invarianti, scoprirete passo passo come rispondere a questa domanda.

A seguire troverete un pezzo della nostra studentessa **Ursula D'Elia**, che ci propone le sue riflessioni sulla vita della matematica, scienziata e scrittrice ottocentesca Mary Somerville.

Come al solito, potrete inoltre cimentarvi con "i problemi del giornalino", una piccola raccolta di quesiti matematici per stuzzicare la vostra curiosità e affinare le vostre abilità di *problem solving*.

Se voleste tentare altri problemi, visitate la pagina web del giornalino tramite il QR a fronte: troverete una raccolta con gli esercizi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni. Non dimenticate di visitare la pagina in occasione dell'uscita del prossimo numero per scoprire le soluzioni ai problemi di questa edizione!

E se dopo tutto questo non siete ancora sazi di matematica, niente paura: la nostra ultima rubrica contiene un ampio assortimento di consigli di

SCAN ME

Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo `https://www.dm.unipi.it/terza-missione/home-orientamento/il-giornalino-degli-open-days/`!

lettura, nonché una lista di film e una di link a siti web e a canali youtube che potrebbero fare al caso vostro.

Indice

Il corso di laurea in Matematica

Stai scegliendo che cosa fare all'università e sei incuriosito da matematica, ma non sai bene a cosa ti potrà portare?

Proveremo ad aiutarti a chiarire un po' le idee mostrandoti in cosa consiste il corso di Laurea in Matematica qui a Pisa e le numerose opportunità che ha da offrirti sia per quanto riguarda il percorso universitario che per le prospettive future.

1 Il corso di laurea a Pisa

Il Corso di Laurea in Matematica si divide in Laurea Triennale e Laurea Magistrale. La prima corrisponde al titolo internazionale *Bachelor's degree* e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici; la seconda, invece, è internazionalmente identificata con il *Master's degree*, e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

Il corso di laurea triennale a Pisa offre una solida preparazione di base nei vari settori della matematica, attraverso una serie di esami obbligatori. Tuttavia, al secondo e (soprattutto) al terzo anno sono previsti esami a scelta: in questo modo, grazie alla gran quantità di corsi a scelta attivati, ognuno può approfondire gli argomenti che ha trovato di maggior interesse. Il corso di laurea triennale è ulteriormente distinto in due curricula (tra cui bisogna scegliere subito, con la possibilità di cambiare in seguito):

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

Il primo, più teorico, prevede anche una più approfondita preparazione in Fisica, mentre il secondo è più applicativo ed integra lo studio della Matematica con quello dell'Informatica. Nella Tabella 1 sono riportati i due piani di studi.

<table>
<tr><th>Fondamentale</th><th>Computazionale</th></tr>
<tr><td colspan="2">I anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aritmetica (9 CFU)
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)
Laboratorio di introduzione alla matematica computazionale (6 CFU)
Analisi matematica 1 (15 CFU)
Geometria 1 (15 CFU)
Fisica I con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">II anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algebra 1 (6 CFU)
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)
Inglese scientifico (6 CFU)
Analisi matematica 2 (12 CFU)
Geometria 2 (12 CFU)
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Esame a scelta (6 CFU)</td><td>Algoritmi e strutture dati (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">III anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meccanica razionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Fisica II (9 CFU)
Fisica III (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)

4 Esami a scelta (24 CFU)</td><td>Calcolo scientifico (6 CFU)
Laboratorio computazionale (6 CFU)
Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
Ricerca operativa (6 CFU)
3 Esami a scelta (18 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prova finale (9 CFU)</td></tr>
</table>

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2022/2023 (vedi [3]).

La maggior parte dei laureati triennali sceglie di proseguire gli studi con la magistrale restando a Pisa. I curricula in cui è diviso il corso di laurea magistrale sono cinque: applicativo, didattico, generale, modellistico e teorico. In questo modo, ad ogni studente viene offerta la possibiltà di specializzare il proprio piano di studi nel ramo che più lo ha interessato e appassionato durante i precedenti anni.

Il nostro dipartimento collabora inoltre con alcune università estere grazie ad accordi internazionali. Ricordiamo per esempio l'accordo con la Hokkaido University, che consente il conseguimento di un titolo congiunto (*double degree*). Ci sono anche gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio oppure lavorare alla tesi presso un'altra università europea. Attualmente sono attivi accordi di questo tipo con 35 corsi di studio in matematica europei. Simili agli accordi Erasmus sono gli accordi SEMP (Swiss European Mobility Program); abbiamo accor-

SCAN ME

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

di attivi con le Università di Basilea, Friburgo, Ginevra, Losanna, Neuchatel e con l'ETH di Zurigo.

Puoi trovare altre informazioni e rimanere aggiornato sui nuovi accordi sulla pagina dell'Internazionalizzazione

`https://www.dm.unipi.it/international/`

Per ogni altra curiosità, visita la pagina del Corso di Studi seguendo il link `http://www.dm.unipi.it/webnew/it/cds/home-cds` oppure inquadrando il QR qui sopra!

2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? La pagina de "I Mestieri dei Matematici"

`https://www.mestierideimatematici.it`

cerca di rispondere a questa domande, e magari ti stupirà!

In generale risulta che i laureati in matematica sono soddisfatti della scelta fatta e godono di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare sul sito di Almalaurea si possono trarre i seguenti dati che riguardano i nostri laureati magistrali del 2021, vedi [2]:

- Il 100% dei laureati magistrali si dichiara soddisfatto del corso di studi.

- Il 91% dei laureati magistrali, se dovessero tornare indietro al momento della iscrizione, sceglierebbero di nuovo il nostro corso di studi.

Da alcuni anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo nasce il progetto "Matematici al Lavoro", del quale potete scoprire tutti i dettagli visitando la pagina web

`https://www.dm.unipi.it/categoria-evento/matematici-al-lavoro/`

3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge di solito all'inizio di settembre in diverse sedi in Italia tra cui una è proprio Pisa.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (sono 30 per l'anno accademico 2022/2023), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i due anni successivi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

Anche per il corso di laurea magistrale sono bandite delle borse INdAM: per esempio per l'anno 2022/2023 sono 8, più 3 dedicate in particolare a chi si iscrive a Pisa, di cui almeno 2 per studentesse, come segno concreto della nostra attenzione alla parità di genere.

È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Puoi trovare tutte le informazioni sul sito `https://www.altamatematica.it`.

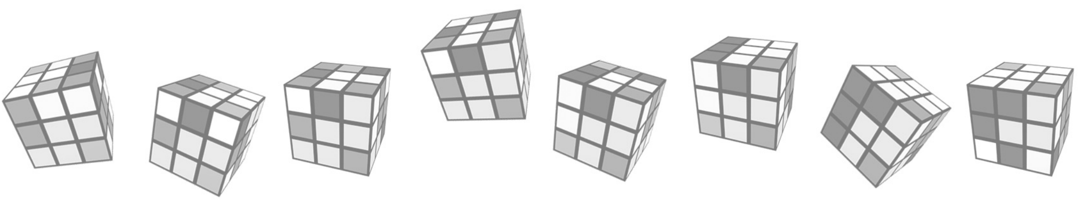
Gli studenti che si iscrivono qui a Pisa possono richiedere anche una borsa di studio del DSU (Azienda della Regione Toscana per il Diritto allo Studio Universitario) sulla base del reddito familiare. I vincitori di questa borsa ottengono l'esonero dalle tasse universitarie, un contributo per le spese e in alcuni casi anche vitto e alloggio gratuiti. Per avere maggiori informazioni, puoi visitare il sito `https://www.dsu.toscana.it/`.

Bibliografia

[1] https://www2.almalaurea.it

[2] https://www.dm.unipi.it/assicurazione-della-qualita/assicurazione-della-qualita-didattica/situazione-occupazionale-dei-laureati/

[3] https://www.dm.unipi.it/didattica/laurea-triennale/regolamenti-corso-di-laurea-triennale/



Quante configurazioni ha un cubo di Rubik?

di ***Alessandro Iraci****, ricercatore presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa*

Chi di noi non ha mai avuto a che fare con un cubo di Rubik? In quasi ogni casa ce n'è uno, che probabilmente giace mescolato su una mensola o in un cassetto. Ma quante configurazioni diverse ci sono? La risposta è sorprendente: ben $43.252.003.274.489.856.000$, un numero comparabile con il numero di granelli di sabbia nel Sahara. Come si arriva a questo numero? È quello che scopriremo in questo articolo.

Se hai un cubo di Rubik in casa, è il momento di andarlo a cercare! Ti sarà utile per capire meglio questo articolo. Se non ne hai, scansiona il QR qui sotto per utilizzarne una versione online!

SCAN ME

Puoi trovare una versione interattiva del cubo online all'indirizzo `https://alg.cubing.net`.

1 Il cubo di Rubik

Un cubo di Rubik è un cubo con le facce colorate, in cui ciascuna faccia è divisa in 9 pezzi tramite 4 tagli paralleli ai lati del cubo (due in ciascuna direzione). Questo divide il cubo in 27 cubetti più piccoli, di quattro tipi diversi: abbiamo 8 angoli, ciascuno dei quali ha tre colori; 12 spigoli, di due colori; 6 centri, di un colore solo; un nucleo, corrispondente al pezzo interno al cubo, che non ha alcun colore, e che possiamo ignorare non essendo mai visibile. Una mossa su un cubo di Rubik consiste nel ruotare una faccia intorno al proprio centro di un multiplo intero di 90°: questo tiene fisso il centro corrispondente, e permuta in qualche modo 4 spigoli e 4 angoli (ma ovviamente gli spigoli vengono mandati in spigoli e gli angoli vengono mandati in angoli).

Per comodità, conviene fissare un po' di notazione. Lo schema di colori "standard" del cubo di Rubik ha la faccia in alto colorata di bianco, quella in basso di giallo, quella davanti di verde, quella dietro di blu, quella a destra di rosso, e quella a sinistra di arancione.

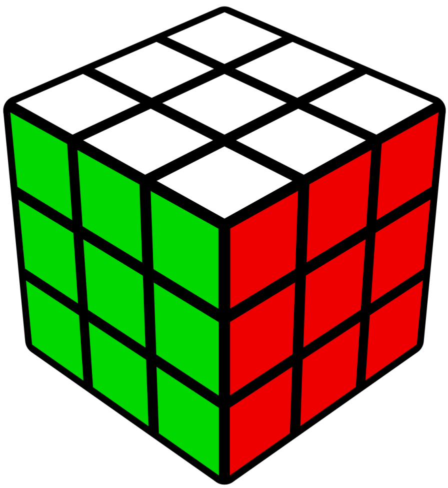


Figura 1: Un cubo di Rubik.

Per indicare una rotazione di 90° in senso orario di una certa faccia, useremo la lettera iniziale della corrispondente parola in inglese, scritta in maiuscolo: `U` per *up*, `D` per *down*, `F` per *front*, `B` per *back*, `R` per *right*, e `L` per *left*. Per indicare una rotazione in senso antiorario, apporremo un apice dopo la lettera, e per indicare una rotazione di 180° apporremo un 2: per esempio, `R'` denota una rotazione di 90° in senso antiorario della faccia a destra (quella rossa), mentre `F2` denota una rotazione di 180° della faccia davanti (quella verde).

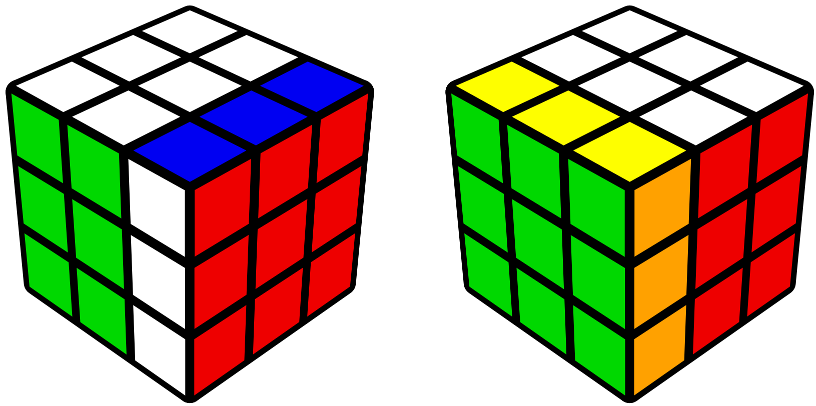


Figura 2: Le mosse `R'` (sinistra) e `F2` (destra) applicate ad un cubo risolto.

Possiamo identificare un pezzo con l'insieme dei centri che lo toccano. Nello stato risolto, per esempio, chiamiamo `UF` il pezzo bianco-verde, e `FDL` il pezzo verde-giallo-arancione. Indicare un pezzo in questo modo è utile anche per specificare un'orientazione: se dico che il pezzo giallo-rosso si trova in `UF`, intendo che lo sticker giallo è adiacente al centro bianco (quello in `U`), mentre lo sticker rosso è adiacente al centro verde (quello in `F`).

2 Struttura di gruppo

L'insieme delle possibili configurazioni del cubo di Rubik, che chiameremo $\mathfrak{R}$, è un gruppo. Cos'è un gruppo?

Definizione 1. Un gruppo è un insieme G dotato di un'operazione $G \times G \to G$, che a due elementi a, b di G associa un elemento $a \cdot b$, tale che

1. sia *associativa*, ossia che $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ per ogni $a, b, c \in G$;

2. ammetta un *elemento neutro*, ossia che esista un elemento $e \in G$ tale che $a \cdot e = e \cdot a = a$ per ogni $a \in G$;

3. ogni elemento ammetta un *inverso*, ossia che per ogni $a \in G$ esista un elemento $a' \in G$ tale che $a \cdot a' = a' \cdot a = e$.

Esercizio 1. Verificare che i seguenti insiemi con operazione rispettano le proprietà della Definizione 1, cioè sono *gruppi*:

1. i numeri interi con l'addizione $(\mathbb{Z}, +)$;

2. i numeri reali positivi con la moltiplicazione $(\mathbb{R}_+, \cdot)$;

3. le funzioni bigettive da un insieme X in se stesso con la composizione $(S(X), \circ)$.

Le funzioni bigettive da $\{1, \dots, n\}$ in sé vengono dette *permutazioni*; il gruppo corrispondente viene chiamato *gruppo simmetrico su n elementi* e si denota con S_n. Questo gruppo tornerà utile in seguito.

Esercizio 2. I numeri reali con la moltiplicazione $(\mathbb{R}, \cdot)$ formano un gruppo? Perché?

In che modo l'insieme delle possibili configurazioni del cubo di Rubik è un gruppo? Quello che possiamo fare è identificare ogni configurazione con una (qualsiasi) sequenza di mosse che porta un cubo risolto in quella configurazione, e definire la moltiplicazione di due configurazioni come la configurazione ottenuta applicando le due sequenze di mosse una dopo l'altra. Se più sequenze di mosse distinte portano il cubo nella stessa configurazione, allora le due sequenze identificano lo stesso elemento del gruppo.

Esercizio 3. Verificare che $(\mathfrak{R}, \cdot)$ è un gruppo.

Per finire, una piccola osservazione che potrebbe esservi utile anche nel verificare le proprietà di gruppo dell'esercizio precedente:

Osservazione 2. In un gruppo, l'inverso del prodotto $a \cdot b$ è $b' \cdot a'$: infatti

$$(ab)(b'a') = a(bb')a' = aea' = aa' = e.$$

Nel caso del gruppo del cubo, l'inverso di una sequenza di mosse è la sequenza di mosse inverse applicata nell'ordine opposto.

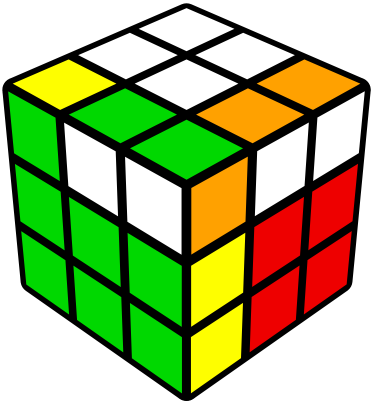


Figura 3: Le sequenze `U' R' F R F2` e `F2 L F L' U'` portano il cubo nello stesso stato, quindi sono uguali come elementi di $\mathfrak{R}$.

3 Pillole di teoria dei gruppi

In questa sezione vogliamo elencare un po' di fatti sui gruppi di cui avremo bisogno in seguito.

Per studiare i gruppi, torna utile considerare alcune funzioni speciali fra gruppi, che rispettano le operazioni.

Definizione 3. Dati due gruppi $(G, \cdot), (H, *)$, una funzione $f\colon G \to H$ si dice *omomorfismo di gruppi* se, per ogni $g_1, g_2 \in G$, si ha $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2)$.

Per esempio, la funzione esponenziale $\exp\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ definita come $\exp(n) = e^n$ è un omomorfismo di gruppi fra $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}_+, \cdot)$: infatti $\exp(m+n) = e^{m+n} = e^m e^n = \exp(m) \cdot \exp(n)$, come volevamo.

Un omomorfismo di gruppi che sia anche una funzione bigettiva si dice *isomorfismo*: per esempio, se estendiamo la funzione exp dell'esempio precedente a tutto $\mathbb{R}$, otteniamo un isomorfismo di gruppi fra $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Un'importante famiglia di gruppi è data dai *gruppi ciclici*.

Definizione 4. Un gruppo G si dice *ciclico* se esiste un elemento $g \in G$, detto *generatore*, tale che

$$G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

ovvero che, dato un qualsiasi elemento $h \in G$, esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $h = g^n$.

Un gruppo ciclico è finito se e solo se esiste $n \neq 0$ tale che $g^n = e$. In questo caso, il minimo $n > 0$ con questa proprietà si dice *ordine* del generatore, e coincide con il numero di elementi del gruppo. Denotiamo con $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ il gruppo ciclico su n elementi.

Possiamo pensare a un gruppo ciclico finito come l'insieme dei numeri da 0 ad $n-1$ in un giorno da n ore: prendendo per esempio i nostri giorni da 24 ore, se ora sono le $17{:}00$, fra 14 ore saranno le $7{:}00$, e quindi $17+14 = 7 \in \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$; in notazione più compatta, questo si scrive anche $17 + 14 \equiv 7 \pmod{24}$.

Esercizio 4. Verificare che la funzione $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ che manda un intero a nel suo resto della divisione intera per n (ossia l'unico $0 \leq q < n$ tale che $a = nk + q$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$) è un omomorfismo di gruppi fra $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Così come possiamo moltiplicare fra loro gli elementi di un gruppo, possiamo anche moltiplicare fra di loro due gruppi!

Definizione 5. Dati due gruppi $(G, \cdot_G), (H, \cdot_H)$, possiamo definire il loro *prodotto* come il gruppo dato dall'insieme

$$G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\},$$

ossia l'insieme delle coppie formate da un elemento di G ed un elemento di H, con il prodotto termine a termine, ossia

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot_G g_2, h_1 \cdot_H h_2).$$

Esercizio 5. Verificare che $(G \times H, \cdot)$ è un gruppo.

Definire questa operazione ci permette di studiare i gruppi "scomponendoli" in pezzi più piccoli, un po' come scomporre i numeri interi in fattori. Per esempio, la funzione $f\colon \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ che manda n nella coppia dei suoi resti per le divisioni per 3 e per 8 è un isomorfismo di gruppi, e questo ci dice che $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ si può "scomporre" in due pezzi.

Esercizio 6. La funzione $f\colon \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ che manda n nella coppia dei suoi resti per le divisioni per 4 e per 6 è un omomorfismo di gruppi? Se sì, è anche un isomorfismo di gruppi? Perché?

Dato un omomorfismo di gruppi $f\colon G \to H$, l'insieme degli elementi di G che vengono mandati nell'elemento neutro di H si chiama *nucleo* dell'omomorfismo.

Esercizio 7. Verificare che il nucleo di un omomorfismo è a sua volta un gruppo (con l'operazione del gruppo che lo contiene).

Esercizio 8. Dato $f\colon G \to H$ omomorfismo di gruppi suriettivo con G finito, verificare che le controimmagini di un elemento di H hanno tutte lo stesso numero di elementi.

4 Il gruppo simmetrico

In precedenza abbiamo menzionato il gruppo simmetrico su n elementi, ovvero il gruppo di funzioni bigettive da $\{1, \dots, n\}$ in sé, che chiamiamo permutazioni. Quanti elementi ha questo gruppo? Facciamo un rapido conto: sia $\sigma \in S_n$ una permutazione. Abbiamo n possibilità per il valore di $\sigma(1)$, poi $n-1$ possibilità per il valore di $\sigma(2)$ (dev'essere diverso da $\sigma(1)$), poi $n-2$ possibilità per il valore di $\sigma(3)$ (dev'essere diverso da entrambi i precedenti) e così via, fino ad 1 solo valore possibile per $\sigma(n)$. Ognuna di queste scelte ci dà una permutazione diversa, e così in totale abbiamo

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

permutazioni. Questo numero è talmente ricorrente che vogliamo dargli un nome.

Definizione 6. Definiamo *fattoriale* di un numero intero positivo n il numero

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

(si legge n *fattoriale*).

Ci sono vari modi di scrivere una permutazione. Quello forse più semplice è con la cosiddetta *one-line notation*, che consiste semplicemente nello scrivere i valori della funzione uno di fianco all'altro: per esempio, 74528316 indica la permutazione $\sigma \in S_8$ tale che $\sigma(1) = 7$, $\sigma(2) = 4$ e così via, fino a $\sigma(8) = 6$. Un altro modo, più utile ai nostri scopi, è con la *notazione in cicli*: la stessa permutazione $\sigma \in S_8$ si scriverebbe $(17)(24)(3586)$, che significa che 1 va in 7, poi 7 va in 1 e si chiude il ciclo (che ha lunghezza 2); 2 va in 4, 4 va in 2 e si chiude il ciclo; 3 va in 5, che va in 8, che va in 6, che va in 3 chiudendo il ciclo.

Esercizio 9. Verificare che 74528316 e $(17)(24)(3586)$ denotano la stessa permutazione.

Non è difficile verificare che ogni permutazione si può scrivere, anche non in modo unico, come prodotto (ovvero composizione) di *trasposizioni*, cioè di permutazioni composte da un solo ciclo di lunghezza 2. Per esempio,

$$(17)(24)(3586) = (17) \cdot (24) \cdot (68) \cdot (58) \cdot (35),$$

dove il "prodotto" a destra denota la permutazione ottenuta scambiando prima 1 con 7, poi 2 con 4, poi 6 con 8, poi 5 con 8 e infine 3 con 5.

Una permutazione si dice *pari* se è prodotto di un numero pari di trasposizioni, e *dispari* altrimenti. Così come la somma di due numeri interi con la stessa parità è pari, e la somma di due numeri interi con parità diverse è dispari, così il prodotto di due permutazioni con la stessa parità è pari, e il prodotto di due permutazioni con parità diverse è dispari.

Esercizio 10. Verificare che un ciclo è pari se la sua lunghezza è dispari, ed è dispari se la sua lunghezza è pari.

Esercizio 11. Verificare che la funzione $f\colon S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ che manda le permutazioni pari in 0 e quelle dispari in 1 è un omomorfismo di gruppi. Dedurre che esattamente metà delle permutazioni di n elementi sono pari, e metà sono dispari.

5 Smontare e rimontare il cubo

Siamo pronti per un conto intermedio. Prendiamo un cubo di Rubik, smontiamolo e rimontiamolo a caso. In quanti modi possiamo farlo? Dunque, abbiamo detto che il nucleo e i centri non si muovono, quindi quelli li teniamo fermi. Ci restano 12 spigoli e 8 angoli, e dobbiamo mettere gli spigoli al posto degli spigoli e gli angoli al posto degli angoli. Per ogni spigolo, dobbiamo scegliere fra quali due centri metterlo, e in che modo: per esempio, se decidiamo di mettere lo spigolo verde-rosso tra il centro bianco e quello blu, possiamo mettere il verde vicino al bianco e il rosso vicino al blu, o viceversa. Per il primo spigolo abbiamo 12 possibilità per la posizione, e 2 per l'orientazione; per il secondo, 11 per la posizione e 2 per l'orientazione, e così via, fino all'ultimo spigolo che ha 1 solo posto disponibile, con 2 possibilità per l'orientazione. In totale abbiamo quindi

$$12 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 = 12! \cdot 2^{12}$$

modi di montare gli spigoli. Similmente, dato che ognuno degli 8 angoli ha invece 3 possibili orientazioni, abbiamo

$$8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 3 = 8! \cdot 3^8$$

modi di montare gli angoli.

In totale, quindi, smontando e rimontando un cubo abbiamo $12! \cdot 2^{12} \cdot 8! \cdot 3^8$ possibili modi di rimontarlo. Se fosse possibile raggiungere ciascuna di queste configurazioni semplicemente ruotando le facce del cubo, allora avremmo risolto il nostro problema! Dobbiamo controllare se sia così oppure no.

Per risolvere problemi di combinatoria come questo, spesso si fa ricorso agli invarianti. Un *invariante* è una quantità che non cambia, o che cambia in modo controllato, quando si eseguono delle mosse in certi giochi. Prendiamo per esempio gli scacchi: il colore della casella su cui si trova un alfiere non cambia mai, quindi non importa in che situazione ci si trovi o come ci si sia arrivati, noi sappiamo per certo che l'alfiere che all'inizio si trovava sulla casella `f1`, che è bianca, se non è stato catturato si troverà ancora su una casella bianca; il colore della casella su cui si trova un cavallo, invece, cambia ad ogni mossa, quindi per esempio il cavallo che all'inizio si trovava sulla casella `g1`, che è nera, se è stato mosso un numero pari di volte si troverà ancora su una casella nera, e se è stato mosso un numero dispari di volte allora si troverà su una casella bianca (sempre se non è stato catturato).

Così come non tutte le disposizioni dei pezzi su una scacchiera si possono ottenere durante una partita, non tutte le configurazioni di un cubo di Rubik che si possono ottenere smontandolo e rimontandolo si possono anche ottenere semplicemente ruotando le facce. Cerchiamo di trovare degli invarianti, e cerchiamo di capire se sono tutti quelli che ci interessano.

6 Permutazione

Per trovare il nostro primo invariante, assegniamo un numero da 1 a 8 ad ogni angolo ed un numero da 1 a 12 ad ogni spigolo, e ad ogni configurazione associamo due permutazioni, $\sigma_a \in S_8$ per gli angoli e $\sigma_s \in S_{12}$ per gli spigoli, che ci dicono in che posizioni si trovano i vari pezzi; per il momento, ignoreremo l'orientazione. Per esempio, se lo spigolo bianco-blu (a cui associamo per esempio il numero 1) si trova tra il centro verde e quello rosso, e allo spigolo verde-rosso abbiamo assegnato il numero 7, allora avremo che $\sigma_s(1) = 7$. Questa funzione è un *omomorfismo di gruppi* fra $\mathfrak{R}$ e $S_8 \times S_{12}$, ossia (come spiegato alla Sezione 3) una funzione, che chiamiamo f, fra $\mathfrak{R}$ e il prodotto cartesiano di S_8 e S_{12} (che è un gruppo con la composizione componente per componente) tale che $f(e) = e$ (l'immagine dell'elemento neutro è l'elemento neutro), e che $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Con questa associazione, ruotare una singola faccia corrisponde a un ciclo di lunghezza 4 (o, più comodamente, 4-ciclo) sia per gli angoli che per gli spigoli. Ricordiamo che un 4-ciclo è una permutazione dispari. Data una configurazione qualsiasi scriviamo una qualsiasi sequenza di mosse che porta un cubo risolto in quella configurazione: la coppia di permutazioni associata alla configurazione è il prodotto delle coppie di permutazioni associate alle singole mosse, e dato che per ogni mossa le due permutazioni hanno la stessa parità, allora anche le due permutazioni associate alla configurazione finale hanno la stessa parità. Questo però ci dice che non tutte le configurazioni che possiamo ottenere smontando un cubo le possiamo anche ottenere ruotando le facce: per esempio, smontando il cubo posso scambiare di posto due spigoli e nient'altro, ma questo ci dà un 2-ciclo di spigoli (dispari) e la permutazione identica degli angoli (pari), che hanno parità differente; noi abbiamo però dimostrato che ruotando le facce possiamo ottenere solo permutazioni di angoli e spigoli che hanno la stessa parità, quindi questa specifica configurazione non si può ottenere.

Quante sono le coppie di permutazioni in $S_8 \times S_{12}$ con la stessa parità? Fissata la prima delle due, se è pari ($8!/2$ casi) allora anche l'altra deve essere pari ($12!/2$ possibilità), mentre se è dispari ($8!/2$ casi) allora anche l'altra deve essere dispari ($12!/2$ possibilità). In totale abbiamo quindi

$$\frac{8!}{2} \cdot \frac{12!}{2} + \frac{8!}{2} \cdot \frac{12!}{2} = \frac{1}{2}(8! \cdot 12!)$$

permutazioni possibili. Dobbiamo ancora verificare di poterle ottenere tutte, ma lo faremo in seguito.

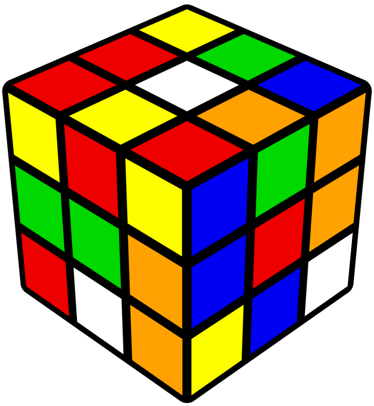
7 Orientazione

Abbiamo bisogno di altri due invarianti, uno per gli angoli ed uno per gli spigoli. Entrambi riguardano l'orientazione dei pezzi, ovvero guardano in che modo sono disposti i colori all'interno di ciascun pezzo, ma non dove si trova il pezzo stesso.

7.1 Orientazione degli angoli

Per tenere traccia dell'orientazione degli angoli, dobbiamo fissare il colore della faccia in alto; finora abbiamo usato il bianco, quindi continueremo con questa scelta. È importante anche tenere traccia del colore della faccia opposta, che nel nostro cubo è gialla. Osserviamo che ogni angolo ha esattamente un adesivo bianco o un adesivo giallo, ma non entrambi. Adesso, ad ogni angolo associamo un numero fra $-1, 0, 1$ in questo modo: se l'adesivo bianco o giallo si trova in `U` oppure `D`, assegniamo 0; se occorre ruotare l'angolo di 120° su sé stesso in senso orario per portarlo su `U` o `D`, assegniamo 1; se occorre ruotare l'angolo di 120° su se stesso in senso antiorario per portarlo su `U` o `D`, assegniamo -1. Questo numero ci dice di quale multiplo di 120° dobbiamo ruotare l'angolo per portarlo nell'orientazione corretta: ovviamente assegnare -2 è la stessa cosa che assegnare 1, assegnare 3 è la stessa cosa che assegnare 0, e così via.

Nell'esempio in Figura 4, gli angoli `URF` e `FRD` vanno ruotati in senso orario e quindi assegniamo loro il valore 1; gli angoli `UFL`, `UBR`, `DRB` e `DLF` vanno ruotati in senso antiorario e quindi assegniamo loro -1; l'angolo `ULB` non va ruotato e quindi gli assegniamo 0. Il totale fa -2, quindi l'invariante ci garantisce che anche l'angolo `DBL`, che in figura non è visibile, va ruotato in senso antiorario. Controllate con il vostro cubo o scansionando il QR!



SCAN ME

https://alg.cubing.net/?setup=B_F2_L-_U-_F-_U2_L2_U2_F2_U-_B_D_L-_D_U-_B-_U2_R-_B-_D2_U_B-_D2_U_L-_R_D_L-_R2_U-

Figura 4: Un cubo mescolato con la sequenza `B F2 L' U' F' U2 L2 U2 F2 U' B D L' D U' B' U2 R' B' D2 U B' D2 U L' R D L' R2 U'`.

Cosa succede applicando una mossa? Applicare una mossa `U` o `D` non cambia nessuno dei valori assegnati agli angoli, mentre applicare una mossa `F`, `R`, `B` o `L` aumenta due valori di 1 e diminuisce due valori di 1; ricordiamo che 2 o -1 è la stessa cosa, quindi se su un angolo con valore 1 viene eseguita una mossa che aumenta il suo valore di 1, gli assegneremo invece -1. Questo ci dice che, effettuando una mossa qualsiasi, la somma dei valori assegnati agli angoli non cambia, se non che ogni tanto dobbiamo aggiungere o sottrarre 3 per mantenere tutti i valori uguali a -1, 0, o 1; quindi alla fine la somma resta sempre un multiplo di 3.

Quante orientazioni possibili abbiamo per gli angoli che siano compatibili con questa regola? Possiamo mettere i primi 7 come vogliamo, e per ciascuno abbiamo 3 possibilità; per l'ultimo invece abbiamo una sola scelta, dovendo per forza avere l'unica possibile orientazione che rende il totale un multiplo di 3: abbiamo quindi al massimo 3^7 orientazioni possibili. Come prima, dobbiamo ancora verificare di poterle ottenere tutte, ma lo faremo in seguito.

7.2 Orientazione degli spigoli

Per quanto riguarda l'orientazione degli spigoli, dobbiamo invece fissare il colore della faccia di fronte; finora abbiamo usato il verde, quindi continueremo con questa scelta. È importante anche tenere traccia del colore della faccia opposta, che nel nostro cubo è blu.

Definizione 7. Uno spigolo è *orientato* rispetto all'asse `F/B` se è possibile portarlo nella posizione corretta con l'orientazione corretta utilizzando solo mosse `U`, `D`, `R`, `L`, `F2` e `B2`, ed è *non orientato* altrimenti.

Usando solo le mosse date sopra, è sempre possibile portare uno spigolo nella posizione corretta: la sua orientazione a quel punto ci dirà se lo spigolo è orientato o no.

Sempre con riferimento all'esempio in Figura 4, lo spigolo `UF` è orientato, perché possiamo portarlo nella posizione e orientazione corretta con `F2 D`; lo spigolo `UR` non è orientato, perché con `U2 L` lo portiamo nella posizione corretta ma con l'orientazione sbagliata; neanche lo spigolo `FR` è orientato, perché con `F2 L2` lo portiamo nella posizione corretta ma con l'orientazione sbagliata.

Come prima, dobbiamo capire cosa succede applicando una mossa. Per definizione, applicare una mossa `U`, `D`, `R` o `L` non cambia l'orientazione di nessuno spigolo; applicare una mossa `F` o `B`, invece, cambia l'orientazione di tutti gli spigoli su quella faccia. In particolare, il numero di spigoli orientati cambia sempre di un numero pari: di 4 se sulla faccia `F` (o `B`) ci sono 0 o 4 spigoli orientati; di 2 se ce ne sono 1 o 3; oppure di 0 se ce ne sono 2.

Di nuovo, quante sono le possibili orientazioni degli spigoli compatibili con questa regola? Comunque mettiamo i primi 11 spigoli, esiste sempre un'unica scelta per l'orientazione dell'ultimo tale per cui il numero totale di spigoli orientati sia pari. Questo ci dice che abbiamo al massimo 2^{11} possibilità; come al solito, dobbiamo ancora verificare di poterle ottenere tutte.

8 Verifica finale

È finalmente arrivato il momento di verificare che gli invarianti che abbiamo trovato sono *completi*, cioè che ogni configurazione che soddisfa i requisiti che abbiamo trovato si può effettivamente ottenere ruotando le facce del cubo. Come bonus, impareremo una tecnica (non molto efficiente, ma funzionale) per risolvere il cubo a partire da qualsiasi configurazione ottenibile!

Per fare ciò, abbiamo bisogno di quello che in gergo si chiama *algoritmo*, cioè una sequenza di mosse che sposta solo alcuni pezzi in modo controllato. Useremo quella che i cuber chiamano *T-perm*, che si può ottenere per esempio con le mosse `R U R'U'R'F R2 U'R'U'R U R'F'`.

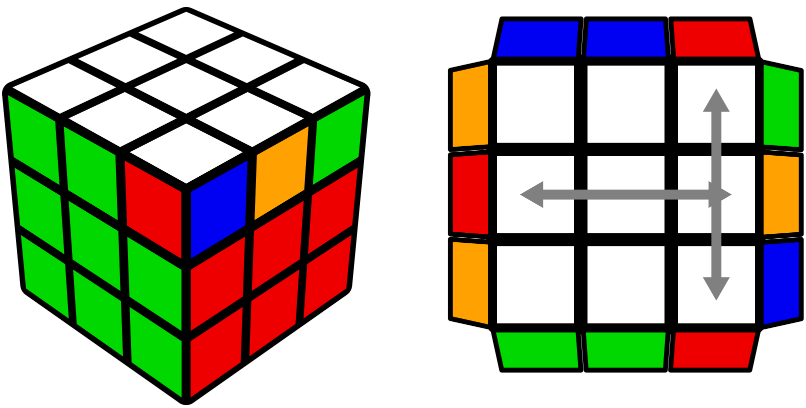


Figura 5: La T-perm da due angolazioni diverse.

Questa sequenza scambia fra di loro gli spigoli `UL` e `UR`, e gli angoli `URF` e `UBR`. Vedremo come usare dei *coniugati* di questa sequenza per risolvere il cubo a partire da una qualsiasi configurazione compatibile con gli invarianti trovati in precedenza; l'inverso della soluzione ci permette poi di ottenere la configurazione di partenza partendo da un cubo risolto.

Definizione 8. Dato un gruppo G ed un elemento $a \in G$, si dice *coniugato di a tramite b* l'elemento bab'.

Sebbene non ci sia una regola generale, spesso il coniugato di un elemento ha delle caratteristiche in comune con l'elemento di partenza; per esempio, il coniugato di una permutazione ha lo stesso numero di cicli di ciascuna lunghezza della permutazione di partenza. Nel nostro caso, un qualsiasi coniugato della T-perm sarà una qualche sequenza che scambia fra di loro due angoli e due spigoli.

8.1 Risolvere gli spigoli

Utilizzeremo la seguente strategia: guardiamo lo spigolo `UR` e vediamo dove dovrebbe andare (per esempio, se è rosso-verde, in `RF`); utilizzando una sequenza di mosse che lascia fissi lo spigolo `UR` e gli angoli `URF` e `UBR`, portiamo il pezzo in questione in `UL` (nel nostro esempio, possiamo usare la sequenza `U' F' U`); dopodiché, applichiamo la T-perm; infine, applichiamo l'inverso della sequenza precedente (ovvero `U' F U`). In questo modo, abbiamo scambiato lo spigolo `UR` e lo spigolo `RF`, e gli angoli `URF` e `UBR`.

Ripetiamo la procedura fino a che nel posto `UR` ritroviamo lo spigolo bianco-rosso (in qualsiasi orientazione). Se a questo punto gli spigoli sono risolti, passiamo agli angoli; altrimenti, scambiamo `UR` con un qualsiasi spigolo non risolto; continueremo così fino a quando tutti gli spigoli tranne al più `UR` saranno risolti. A questo punto siamo certi che anche `UR` sarà risolto: se tutti gli altri spigoli sono al loro posto, allora lo spigolo bianco-rosso deve essere per forza nell'ultimo posto rimasto (cioè `UR`), e se tutti gli altri spigoli sono orientati correttamente, dato che il numero di spigoli non orientati deve essere pari, allora anche lo spigolo bianco-rosso deve essere orientato correttamente.

Quello che resta da fare è verificare che, per ogni spigolo (contando anche l'orientazione), esiste almeno un modo di portarlo in `UL` senza toccare lo spigolo `UR` e gli angoli `URF` e `UBR`. Procediamo nel modo seguente:

1. se lo spigolo (che denoteremo genericamente con `XY`) è nello strato equatoriale (cioè non è né su `U` né su `D`), allora possiamo ruotare la

faccia `U` in modo che gli sticker `LU` e `YX` si trovino sulla stessa faccia (cioè `Y`), dopodiché ruotiamo quella faccia di 90° in senso orario o antiorario, in modo da portare lo spigolo che ci interessa sullo strato `U`, e infine ruotiamo la faccia `U` in modo da portarlo in `UL`. Abbiamo visto prima un esempio con `RF`;

2. se lo spigolo è nello strato `D`, a prescindere dall'orientazione, possiamo portarlo in `DL` con delle mosse `D`, dopodiché portarlo nello strato equatoriale con una mossa `L`, e ricondurci al caso 1;

3. se lo spigolo è già in `UL` (orientato correttamente), allora non dobbiamo fare nulla; se è il `LU` (cioè nello stesso posto ma non orientato correttamente), possiamo invece portarlo nello strato equatoriale con una mossa `L`, riconducendoci nuovamente al caso 1;

4. se lo spigolo è in `UF` (rispettivamente `UB`), a prescindere dall'orientazione, la sequenza `R F' R'` (rispettivamente `R' B R`) lo porta nello strato equatoriale senza influenzare lo spigolo `UR` e gli angoli `URF` e `UBR`, riconducendoci ancora al caso 1.

La casistica è esaustiva, e quindi questo ci permette di risolvere gli spigoli a partire da qualsiasi configurazione compatibile con gli invarianti trovati.

8.2 Risolvere gli angoli

Anche per gli angoli useremo una strategia simile: guardiamo l'angolo `URF` e vediamo dove dovrebbe andare (per esempio, se è rosso-giallo-verde, in `RDF`); utilizzando una sequenza di mosse che lascia fissi gli spigoli `UR` e `UL` e l'angoli `URF`, portiamo il pezzo in questione in `UBR` (nel nostro esempio, possiamo usare la sequenza `D2 R D' R'`); dopodiché, applichiamo la T-perm; infine, applichiamo l'inverso della sequenza precedente (ovvero `R D R' D2`). In questo modo, abbiamo scambiato l'angolo `URF` e l'angolo `UBR`, e gli spigoli `UR` e `UL`.

Ripetiamo la procedura fino a che nel posto `URF` ritroviamo l'angolo bianco-rosso-verde (in qualsiasi orientazione). Se a questo punto gli angoli sono risolti, abbiamo finito; altrimenti, scambiamo `URF` con un qualsiasi angolo non risolto; continueremo così fino a quando tutti gli angoli tranne al più `URF` saranno risolti. A questo punto, il cubo è interamente risolto: se tutti gli altri angoli sono al loro posto, allora l'angolo bianco-rosso-verde deve essere per forza nell'ultimo posto rimasto (cioè `URF`); se tutti gli altri angoli sono orientati correttamente, dato che il numero totale di rotazioni di 120° da fare deve essere un multiplo di 3, allora anche l'ultimo angolo deve essere orientato correttamente. Infine, dato che partivamo da una configurazione con gli spigoli risolti, che è pari, allora anche la permutazione degli angoli da fare doveva essere pari; questo vuol dire che abbiamo applicato la T-perm un numero pari di volte, il che ci dice che abbiamo scambiato gli spigoli `UR` e `UL` un numero pari di volte (e non abbiamo spostato nessun altro spigolo), e pertanto alla fine anche gli spigoli saranno risolti.

Come prima, dobbiamo verificare che, per ogni spigolo (contando anche l'orientazione), esiste almeno un modo di portarlo in `UL` senza toccare l'angolo `URF` e gli spigoli `UR` e `UL`. Procediamo nel modo seguente:

1. se l'angolo è in `DBL` (con questa orientazione), eseguiamo `B2`;
2. se l'angolo è in `BDL` (con questa orientazione), eseguiamo `D' B`;
3. se l'angolo è in `LDB` (con questa orientazione), eseguiamo `R D' R'`;
4. se l'angolo è nello strato `D`, possiamo portarlo in `DBL` (senza considerare l'orientazione) con delle mosse `D`, riconducendoci ad uno dei casi precedenti;
5. se l'angolo è già il `UBR` (orientato correttamente), allora non dobbiamo fare nulla; se invece non è orientato correttamente, possiamo portarlo in `LDB` eseguendo `R D R'`, riconducendoci al caso 3;
6. se l'angolo è in `UFL` (rispettivamente `ULB`), a prescindere dall'orientazione, la sequenza `L D L'` (rispettivamente `L' D' L`) lo porta nello strato `D` senza influenzare l'angolo `URF` e gli spigoli `UR` e `UL`, riconducendoci al caso 4.

In ogni caso, ricordatevi sempre di fare l'inverso di tutte le mosse che avete usato per portare l'angolo nella posizione giusta, inclusi tutti i setup!

Anche per gli angoli la casistica è esaustiva, e quindi questo ci permette di risolvere il cubo a partire da qualsiasi configurazione compatibile con gli invarianti trovati.

8.3 Conclusione

Abbiamo trovato una (lunga) sequenza di mosse che risolve il cubo a partire da una qualsiasi configurazione compatibile con gli invarianti trovati;

applicando l'inverso di questa sequenza ad un cubo risolto, otteniamo la configurazione di partenza. Questo dimostra che qualsiasi configurazione compatibile con gli invarianti si può ottenere ruotando le facce del cubo, senza doverlo smontare. Abbiamo quindi $\frac{1}{2}(8! \cdot 12!)$ possibili permutazioni, 3^7 possibili orientazioni per gli angoli, e 2^{11} possibili orientazioni per gli spigoli, tutte indipendenti fra di loro, per un totale di

$$\frac{1}{2}(8! \cdot 12!) \cdot 3^7 \cdot 2^{11} = 43.252.003.274.489.856.000$$

configurazioni, come avevamo detto all'inizio.

Bibliografia

[1] Come risolvere il cubo di Rubik? `https://rubiks.com/solve-it`

[2] Guida alla Fewest Moves Challenge: `https://fmcsolves.cubing.net/`

[3] In quante mosse è sempre possibile risolvere un cubo di Rubik? `http://kociemba.org/moves20.htm`

Vincere una medaglia matematica: la storia di Mary Somerville

*di **Ursula D'Elia**, studentessa del Corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Pisa*

Gli impedimenti pratici e lo stigma sociale che nei secoli le donne hanno dovuto affrontare per dedicarsi allo studio della matematica non hanno impedito a nomi come quelli di Ada Lovelace e Emmy Noether di assurgere a meritata fama nella comunità scientifica del tempo. Tuttavia, la loro enorme produttività e creatività in ambito matematico non si è tradotta nel tempo in altrettanta celebrità tra il grande pubblico.

Anche la figura di Mary Somerville, nonostante l'ampio spettro di campi del sapere investigati, non gode della notorietà che meriterebbe, e anche ai matematici e alle matematiche di professione la sua vita e opere spesso rimangono sconosciute, forse poiché non esiste nessun teorema che porta tale nome, nessun "Teorema di Somerville".

Mary Somerville fu una matematica, astronoma e scrittrice nata nel 1780 a Jedburgh, nel sud della Scozia. E' difficile definire questa donna in modo sintetico usando uno o più singoli ruoli specialistici poiché, in realtà, essa corrisponde meglio alla descrizione di "polymath". In altre parole, era una donna estremamente intelligente che sapeva muoversi in diversi campi del sapere. Basta menzionare i suoi quattro lavori più importanti per renderci conto di questo: 'On the Mechanism of the Heavens', 'On the Connexion of the Physical Sciences' , 'Physical Geography', e 'On Molecular and Microscopic Science'. Il tratto a mio parere più affascinante di questa figura è che fu lei stessa la guida che seguì nell'intraprendere il percorso verso le conoscenze che poi le valsero una grande popolarità come scienziata. Mary Somerville si formò infatti principalmente da autodidatta e la prima branca del sapere che la attrasse fu la matematica. Un giorno, leggendo una rivista, si imbatté nella parola "algebra", descritta come "una sorta di aritmetica". Incuriosita, volendo saperne di più, iniziò a cercare informazioni su questa disciplina, ma senza successo. Nessun membro della sua famiglia aveva interessi matematici, pertanto temeva che le avrebbero riso in faccia se avesse chiesto loro di imparare questa disciplina. Più tardi, tramite il tutore di suo fratello, ebbe l'occasione di procurarsi una copia degli 'Elementi' di Euclide e una dell' 'Algebra' di Bonniecastle. Iniziò così a studiare matematica da questi testi, leggendo sia di giorno che di notte. Purtroppo la sua famiglia era contraria a queste sue attività notturne, a tal punto da confiscarle le candele utilizzate a quei tempi per illuminare di notte gli ambienti. Ma ella non demordeva: iniziò a svegliarsi all'alba per studiare algebra fino all'ora di colazione. Anche se i membri della sua famiglia la scoraggiavano, ella aveva una forte spinta personale a inseguire i suoi ideali, nella convinzione che le donne meritassero un ruolo più alto rispetto a quello che ricoprivano. Ella stessa scrive

> "*I felt in my own breast that women were capable of taking a higher place in creation than that assigned to them in my early days, which was very low*[1]" [1]

Mary Somerville continuò il suo percorso da autodidatta studiando la trigonometria piana e sferica, le sezioni coniche, l'astronomia. Lesse anche i "Principia" di Newton. Non è sufficiente un breve articolo come questo per ripercorrere tutte le tappe dell'eccellente formazione scientifica di questa donna, tuttavia c'è spazio per rimarcare quanto la sua ambizione e la sua determinazione contribuirono a renderla una figura tra le più conosciute del panorama matematico del 19esimo secolo in Europa. La sua notorietà è tangibile, ad esempio, nei seguenti fatti. Il suo volto appare oggi sulla banconota da £10 emessa dalla Royal Bank of Scotland, facendo di lei la prima donna dopo la Regina ad apparire sulle banconote scozzesi. Un suo busto si trova oggi alla Royal Society e, in aggiunta a ciò, a Oxford esiste un College a lei intitolato.

Ci fu però un particolare evento della sua vita su cui vale la pena soffermarsi. Fu probabilmente il momento decisivo che segnò la sua transizione dalla figura di matematica amatoriale, che lavora da sola e che ha accesso a pochi testi, alla figura di matematica professionista riconosciuta, con pubblicazioni a suo nome e famosa in Gran Bretagna e in Europa Occiden-

[1] "Sentivo in petto che le donne erano in grado di prendere occupare un posto nella creazione più alto rispetto a quello assegnato a loro nel mio periodo, che era un posto molto basso."

Figura 1: La banconota da £10 emessa dalla *Royal Bank of Scotland*; il volto di Mary Somerville vi compare dal 2017.

tale. È la storia di quando le fu assegnata una medaglia d'argento per la risoluzione di problemi proposti da una prestigiosa rivista di matematica.

In una lettera del 1811 di John Wallace, egli informò con piacere Mary Somerville che "la sua soluzione per la prize-question della rivista Mathematical Repository ha ottenuto il premio". Questa rivista fu pubblicata in più volumi e più numeri, ognuno contenente tre parti: la prima riguardava saggi matematici contemporanei al periodo di pubblicazione, la seconda saggi matematici estratti da eminenti opere matematiche del passato e la terza presentava dei problemi in diverse branche della matematica e le soluzioni dei problemi di volumi precedenti, proposte dai lettori. Dal quarto volume in poi fu aggiunta una quarta parte chiamata "Cambridge problems", che conteneva le domande proposte agli esami del percorso di Bachelor Degree (Laurea Triennale) dell'università di Cambridge. Per ogni numero della rivista, l'ultima domanda era denominata "Prize Question"; per la sua soluzione sarebbe stata assegnata una medaglia d'argento appositamente fusa. Il momento in cui Mary Somerville sottopose la sua soluzione per una Prize-Question segnò il suo passaggio da essere una fruitrice passiva della conoscenza matematica a esserne una contributrice attiva.

La medaglia che vinse è oggi conservata al Somerville College di Oxford e nell'iscrizione si può leggere il suo nome da nubile "Maria Greig". La scritta in latino recita "Porti la palma chi l'ha meritata", e Mary Somerville l'aveva certamente meritata. Il risultato da lei raggiunto è notevole, anche se questa medaglia matematica con iscrizione in latino sul retro non è

Figura 2: La *prize question medal* vinta da Mary Somerville nel 1811.

quella più conosciuta al giorno d'oggi. Ma d'altronde, la matematica scozzese non avrebbe potuto ricevere un premio che verrà istituito soltanto nel 1936.

Mi riferisco alla Medaglia Fields, il premio che oggi nel mondo matematico è ritenuto una sorta di equivalente del Premio Nobel. Anche questa medaglia porta sul retro una scritta in latino: "*Transire suum pectus mundoque potiri*", cioè "elevarsi al di sopra di se stessi e conquistare il mondo". Ritengo che sotto un certo punto di vista Mary Somerville si sia elevata al di sopra di se stessa, in quanto ha conquistato un livello di istruzione che andava molto oltre a quello che le era consentito in quanto donna. E per questo la ritengo una figura ammirevole. In aggiunta a ciò, non ho potuto fare a meno di mettere in relazione la vincitrice della medaglia d'argento con uno dei quattro vincitori della medaglia dorata, appunto la Fields, proclamato il 5 luglio di quest'anno. Il suo nome è June Huh, docente all'Università di Princeton. Come accadde per Mary Somerville, anche il suo percorso verso il premio matematico è stato non lineare. Al contrario della matematica scozzese, non è stato un amante della matematica fin da bambino, ma anzi è addirittura arrivato ad abbandonare i suoi studi a un certo momento della sua vita poiché desiderava diventare poeta. Ed è qui che c'è, secondo me, il primo punto di incontro tra le due figure: entrambe non hanno ristretto la loro vita solo all'ambito scientifico ma si sono dedicate anche a quello artistico. Questa concezione di non separare i due mondi è estremamente innovativa nel panorama odierno. Era un punto di vista meno raro nel periodo storico in cui visse Mary

Somerville ma ciò che è raro è l'eccellente competenza dimostrata da questa donna in entrambi questi due mondi. Tra le sue produzioni artistiche è notevole la sua descrizione incredibilmente evocativa dell'eruzione del Vesuvio a Napoli a cui assistette. Un'altra espressione del talento artistico di questa donna consiste nei dipinti che realizzò, oggi conservati anch'essi al Somerville College di Oxford.

La creatività e l'immaginazione sono caratteristiche fondamentali per navigare nel mondo della matematica, anche se un pregiudizio comune vuole il contrario, cioè che questa materia consista solamente nel fare conti e che pertanto abbia un carattere arido. Come disse Sofja Kowalewskaja, altra grandissima matematica: "È impossibile essere matematici senza avere l'anima di un poeta [...]. Il poeta deve poter vedere ciò che gli altri non vedono, deve vedere più profondamente di altre persone. E il matematico deve fare lo stesso." Un ulteriore punto di contatto tra la matematica scozzese e il matematico di origini coreane è l'amore per la conoscenza libera. La formazione di Mary Somerville fu sempre guidata dal suo istinto di curiosità, i libri da cui studiava erano selezionati e procurati da lei stessa. Era in grado di trasformare le sue ore felici spese nelle insenature sabbiose nella sua scuola privata. I fossili che ella scoprì e raccolse in questi luoghi furono anch'essi parte della sua spontanea formazione scientifica. Non affrontò nessun percorso prestabilito, guidato da una qualsivoglia prestigiosa università, ma un percorso guidato invece dalla libertà. Un ideale simile anima il professor Huh, che dichiara di lavorare solamente tre ore al giorno e che non ha molto controllo su ciò su cui decide di concentrarsi in quelle tre ore. Per alcuni mesi, nella primavera del 2019, non ha fatto altro che leggere. Egli ritiene che costringersi a fare qualcosa o definire un obiettivo specifico, anche per qualcosa che gli piace, non funziona mai. È particolarmente difficile per lui spostare la sua attenzione da una cosa all'altra. "Penso che l'intenzione e la forza di volontà... siano molto sopravvalutate", ha detto. "Raramente ottieni qualcosa con quelle cose." [5]

Ho omesso molti dettagli della storia di Mary Somerville, ma ritengo che anche questa piccola finestra aperta sulla sua vicenda possa dare ispirazioni e spunti a chiunque voglia intraprendere un percorso matematico, e non solo. A parer mio, l'ideale appartenente a questa figura che più mi è di ispirazione è quello dell'amore per la conoscenza e per la libertà della scoperta. Mi sento quindi affine a questa figura quando penso che nel nostro percorso personale all'interno del sapere l'unica guida che andrebbe seguita è la nostra stessa personalità. Scoprire con curiosità ciò che ci piace scoprire, indipendentemente da quello che ne faremo poi in futuro di questa conoscenza acquisita, è il consiglio che mi sento di dare.

Bibliografia

[1] M. Somerville, *The Personal Recollections, from Early Life to Old Age, of Mary Somerville*, https://archive.org/details/personalrecolle04somegoog/.

[2] E. Strickland, *The Ascent of Mary Somerville in 19th Century Society*, Springer Biographies (2016).

[3] B. Stenhouse, *Mary Somerville's early contributions to the circulation of differential calculus*, Historia Mathematica, 51 (2019).

[4] https://www.some.ox.ac.uk/news/connecting-through-the-generations/

[5] https://www.quantamagazine.org/june-huh-high-school-dropout-wins-the-fields-medal-20220705/

[6] *Letter to Madame Schabelskoy*, quoted in *Sónya Kovalévsky: Her Recollections of Childhood*, translated by Isabel F. Hapgood (1895)

I problemi del giornalino

una rubrica a cura di ***Davide Lombardo****,*
ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

1 Divertissement

1.1 Fattorizzare 30^3

Determinare il numero di terne ordinate (x, y, z) di interi positivi tali che $xyz = 30^3$.

1.2 Un polinomio con una proprietà bizzarra

Sia n un intero positivo e sia $f(x)$ un polinomio a coefficienti reali tale che

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{e} \quad x^n f(1/x) = -f(x),$$

dove la prima condizione vale per ogni numero reale x e la seconda vale per ogni numero reale diverso da 0. Dimostrare che $f(x)$ è divisibile per $x(x^2 - 1)$.

1.3 Un punto a caso

Sia ABC un triangolo e D un punto qualsiasi interno al lato AC. Consideriamo la circonferenza ω_C circoscritta al triangolo BDC: la tangente in D a tale circonferenza incontra la retta AB nel punto C_1. Similmente, la tangente in A alla circonferenza ω_A circoscritta al triangolo BDA incontra la retta BC in A_1. Dimostrare che:

1. $\angle ABC + \angle A_1DC_1 = 180°$;

2. A_1C_1 è parallela a AC.

1.4 Il solitario di Marina

Marina gioca al seguente solitario. Fissato un intero positivo $N \geq 3$ (che Marina sceglie all'inizio del gioco), il solitario si svolge su una lunga striscia di carta, divisa in caselle, numerate da sinistra a destra con gli interi da $-N$ a N (cioè $-N, -(N-1), \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, N-1, N$). Inizialmente, la casella 0 contiene N monete e tutte le altre caselle sono vuote. Ad ogni mossa, Marina può scegliere una casella che contenga almeno 3 monete, e spostare due di tali tre monete di una casella verso destra, e la terza di una casella verso sinistra. Se nessuna casella contiene almeno 3 monete, non si può più muovere.

Marina vince se, dopo un certo numero di mosse, le monete sono così distribuite: per un certo indice i, le caselle $i, i+1, i+2, \ldots, i+N-3$ contengono una moneta, e la casella $i+N-2$ contiene 2 monete (ovvero le monete occupano una sequenza di caselle adiacenti, che contengono ciascuna una moneta, salvo quella più a destra, che ne contiene due). Supponiamo che Marina riesca a vincere al suo solitario: dimostrare che allora N è una potenza di 2, e determinare in funzione di N quale casella contiene 2 monete alla fine del gioco.

Esempio. Per $N = 4$, il solitario termina in una mossa: Marina sposta una moneta a sinistra e due a destra, trovandosi con $0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 0$. Nella notazione dell'esercizio, le monete sono nelle caselle $i = -1$, $i + 1 = 0$, e $i + 2 = 1$, e Marina ha vinto.

2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

È ben noto che il quadrato di un numero reale è sempre non-negativo, e quindi lo stesso vale per una somma di quadrati di numeri reali. Supponiamo di avere un polinomio $p(x)$ con la proprietà che $p(x) \geq 0$ per ogni numero reale x: ci potremmo chiedere se per caso il *polinomio* $p(x)$ stesso si scriva come somma di quadrati, in quanto questo certamente garantirebbe che $p(x) \geq 0$ per ogni x! In questo esercizio dimostreremo che questa affermazione è vera, ma una sua generalizzazione 'ingenua' al caso di polinomi in *due* variabili non vale.

Prima di cominciare, ricordiamo che ogni polinomio a coefficienti reali si scrive come prodotto di polinomi di grado 1, cioè della forma $ax + b$, e polinomi di grado 2 senza radici reali, cioè polinomi della forma $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$ (la quantità $b^2 - 4ac$ è chiamata il *discriminante* del polinomio di secondo grado).

1. Verificare l'identità algebrica $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AD + BC)^2 + (AC - BD)^2$.

2. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali tale che $p(x) \geq 0$ per ogni x reale. Raccogliendo il coefficiente di grado più alto, scriviamolo come prodotto $p(x) = \lambda(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)(x^2-b_1x+c_1)\cdots(x^2-b_mx+c_m)$, dove ognuno dei polinomi di secondo grado ha discriminante negativo. Dimostrare che ogni radice α_i compare un numero pari di volte.

3. Dedurre che esistono polinomi a coefficienti reali $q_1(x), q_2(x)$ tali che $p(x) = q_1(x)^2 + q_2(x)^2$.

Consideriamo ora la situazione per polinomi in due variabili. Sia

$$p(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2.$$

Questo polinomio è stato trovato dal matematico Motzkin: vedremo che $p(x, y)$ è non-negativo per ogni scelta di reali x, y, e tuttavia $p(x, y)$ non è somma di (due o più) quadrati di polinomi.

4. Verificare che

$$p(x,y) = \left(\frac{x^2y(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{xy^2(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}\right)^2 + \\ + \left(\frac{xy(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 \qquad (2.1)$$

   e dedurre che $p(x,y) \geq 0$ per ogni coppia di reali x, y. Vedete un modo più diretto di ottenere lo stesso risultato?

5. Supponiamo che $p(x,y)$ si possa rappresentare come somma di quadrati di certi polinomi $q_i(x,y)$, cioè che si abbia

$$p(x,y) = q_1(x,y)^2 + \cdots + q_n(x,y)^2.$$

   Scriviamo $q_i(x,y)$ nella forma

$$A_i x^3 + B_i x^2 y + C_i x y^2 + D_i y^3$$
$$+E_i x^2 + F_i xy + G_i y^2$$
$$+H_i x + I_i y$$
$$+J_i.$$

   Dimostrare dapprima che $A_i = 0$ per ogni i, e successivamente che $E_i = H_i = D_i = G_i = I_i = 0$ per ogni i.

6. Dedurre che $p(x,y)$ non è somma di quadrati di polinomi.

Questo problema esplora un caso particolare di risultati di Hilbert e Artin, relativi al cosiddetto *diciassettesimo problema di Hilbert*: un polinomio in più variabili assume solo valori non-negativi se e solo se si può scrivere come somma di quadrati di *funzioni razionali*, cioè rapporti di polinomi, come fatto nella formula (2.1). Questo teorema è stato congetturato da Hilbert, che ha ottenuto risultati parziali in merito, e dimostrato in generale da Artin.

L'esempio qui sopra, d'altra parte, mostra che non è detto che un polinomio che assume solo valori non-negativi si riesca a scrivere come somma di quadrati di *polinomi*!

Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una lista di libri, pagine web, canali YouTube e film incentrati sulla matematica per stimolare ulteriormente la vostra curiosità. Alcuni dei libri che vi consigliamo contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti "più leggeri".

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.
- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi.
- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann.
- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico.
- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan.
- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore.
- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.

- G. Lolli, *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.
- A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo.
- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.
- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni.
- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Ci siamo qui limitati a proporre una bibliografia essenziale: di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- D. Aronofsky, Π – *Il teorema del delirio*, 1998.
- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.
- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001.
- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.
- T. Melfi, *Il diritto di contare*, 2016.
- M. Tyldum, *The imitation game*, 2014.

SCAN ME

Visita il canale youtube del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa all'indirizzo `https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw/`!

G. Van Sant, *Will Hunting – Genio ribelle*, 1997.

M. Webb, *Gifted – Il dono del talento*, 2017.

Adesso vi proponiamo una lista di canali YouTube legati alla matematica per scoprire un sacco di curiosità e perché no, trovare ottimi spunti per approfondimenti:

- `https://www.youtube.com/c/3blue1brown`
- `https://www.youtube.com/c/Mathologer`
- `https://www.youtube.com/user/numberphile`
- `https://www.youtube.com/c/ThinkTwiceLtu`
- `https://www.youtube.com/user/blackpenredpen`
- `https://www.youtube.com/c/DrPeyam`

A proposito, potete trovare su YouTube il canale del nostro dipartimento! Fateci visita (e, perché no, iscrivetevi!) all'indirizzo

`https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw`

seguendo il link o inquadrando il QR presente in alto su questa pagina. Troverete presto una varietà di contenuti: per cominciare, vi consigliamo il nuovo video di presentazione del nostro dipartimento

- `https://www.youtube.com/watch?v=afZql__Shmo`

e il video "Studiare Matematica a Pisa", che trovate a questo link:

- `https://www.youtube.com/watch?v=pfh4IyDjbWY`

Non perdetevi poi la nostra intervista ad Alessio Figalli, medaglia Fields per la Matematica, in occasione della Settimana Matematica 2019:

- `https://www.youtube.com/watch?v=i6ha2pLLUuA`

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica: `http://maddmaths.simai.eu/`
- Versione on-line del giornalino: `https://www.dm.unipi.it/terza-missione/home-orientamento/il-giornalino-degli-open-days/`
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa: `http://www.dm.unipi.it/webnew/`
- Sito delle olimpiadi di matematica: `http://olimpiadi.dm.unibo.it/`
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa: `http://www.sns.it/`
- Sito degli studenti di matematica di Pisa: `https://poisson.phc.dm.unipi.it/`

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito:

`http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento`