PISA, FEBBRAIO 2023

Dipartimento di Matematica – Università di Pisa

Università di Pisa

Matematica
il giornalino degli open days

notizie, giochi e pillole di matematica

Realizzato con il contributo del Piano Lauree Scientifiche – Matematica.

Su indicazione della Commissione Terza Missione.

Realizzato con la collaborazione degli studenti counselling:
Danilo Calcinaro, Matteo Caporali, Francesco Pio Numero

Coordinamento: Alessandra Caraceni, Giovanni Gaiffi

Grafica: Alessandra Caraceni

Introduzione

Quello che state sfogliando è il **numero 16** del **Giornalino degli Open Days**, una pubblicazione curata da professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa e rivolta principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

Se state considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario che abbia a che fare con la matematica, troverete materiale che fa per voi! Anzitutto, potrete leggere una presentazione del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa. Oltre a una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica e sulle varie opportunità di cui godono i nostri studenti, vi troverete alcuni dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in matematica.

A seguire, vi presentiamo come di consueto un articolo divulgativo che conduce alla scoperta di un angolo affascinante della matematica: **Samuele Mongodi**, ricercatore presso l'Università di Milano Bicocca, ci parla di insiemi di Julia e insiemi di Mandelbrot. Vi siete mai chiesti come emergano i misteriosi e ipnotici disegni frattali che spesso decorano copertine di libri scientifici o locandine di eventi divulgativi? Ebbene, avrete occasione di scoprirlo in questo numero del giornalino!

Nella rubrica sui giochi matematici, la redazione vi invita a sfidarvi alla "corsa al cento": sapete riconoscere una strategia vincente?

Inoltre, come al solito, potrete cimentarvi con "i problemi del giornalino", una piccola raccolta di quesiti matematici per stuzzicare la vostra curiosità e affinare le vostre abilità di *problem solving*.

Se voleste tentare altri problemi, visitate la pagina web del giornalino tramite il QR a fronte: troverete una raccolta con gli esercizi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni. Non dimenticate di visitare la pagina in occasione dell'uscita del prossimo numero per scoprire le soluzioni ai problemi di questa edizione!

E se dopo tutto questo non siete ancora sazi di matematica, niente paura: la nostra ultima rubrica contiene un ampio assortimento di consigli di

SCAN ME

Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo `https://www.dm.unipi.it/terza-missione/home-orientamento/il-giornalino-degli-open-days/`!

lettura, nonché una lista di film e una di link a siti web e a canali youtube che potrebbero fare al caso vostro.

Indice

Il corso di laurea in Matematica

Sei indeciso su cosa studiare all'università e sei incuriosito da matematica, ma non sai bene in che cosa ti potresti imbattere? Proveremo ad aiutarti a chiarire le idee, mostrandoti le principali caratteristiche del corso di Laurea in Matematica a Pisa e le numerose opportunità che offre sia per quanto riguarda il percorso universitario che per le prospettive future.

1 Il corso di laurea a Pisa

Il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, riconosciuto come Dipartimento di Eccellenza 2023–2027, offre i Corsi di Laurea Triennale e Magistrale in Matematica. Il primo ha una durata di tre anni accademici e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU); il secondo dura due anni e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

Il corso di laurea triennale a Pisa fornisce una solida preparazione di base nei vari settori della matematica, grazie ad una serie di esami obbligatori. Già al secondo, ma in particolar modo durante il terzo anno sono previsti esami a scelta: in questo modo, grazie alla gran quantità di corsi a scelta attivati, ognuno può approfondire gli argomenti che ha trovato di maggior interesse. Il corso di laurea triennale è diviso in due curricula (è richiesto di scegliere subito, ma c'è la possibilità di cambiare in seguito):

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

Il primo, più teorico, prevede anche una più approfondita preparazione in Fisica, mentre il secondo è più applicativo ed integra lo studio della Matematica con quello dell'Informatica. Nella Tabella 1 sono riportati i due piani di studi.

<table>
<tr><th>Fondamentale</th><th>Computazionale</th></tr>
<tr><td colspan="2">I anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aritmetica (9 CFU)
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)
Laboratorio di introduzione alla matematica computazionale (6 CFU)
Analisi matematica 1 (15 CFU)
Geometria 1 (15 CFU)
Fisica I con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">II anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algebra 1 (6 CFU)
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)
Inglese scientifico (6 CFU)
Analisi matematica 2 (12 CFU)
Geometria 2 (12 CFU)
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Esame a scelta (6 CFU)</td><td>Algoritmi e strutture dati (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">III anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meccanica razionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Fisica II (9 CFU)
Fisica III (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)

4 Esami a scelta (24 CFU)</td><td>Calcolo scientifico (6 CFU)
Laboratorio computazionale (6 CFU)
Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
Ricerca operativa (6 CFU)
3 Esami a scelta (18 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prova finale (9 CFU)</td></tr>
</table>

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2023/2024 (vedi [3]).

La maggior parte dei laureati triennali sceglie di proseguire gli studi con la magistrale restando a Pisa. I curricula in cui è diviso il corso di laurea magistrale sono cinque: applicativo, didattico, generale, modellistico e teorico. In questo modo, ad ogni studente viene offerta la possibiltà di specializzare il proprio piano di studi nel ramo che più lo ha interessato e appassionato durante i precedenti anni.

Gli studenti iscritti a matematica possono inoltre usufruire degli ambienti a loro dedicati all'interno del Dipartimento di Matematica, tra cui varie aule studio e due aule computer. Qui gli studenti hanno la possibilità di conoscersi e studiare al di fuori dell'orario di lezione, così da poter collaborare e confrontarsi durante lo studio. Con lo stesso spirito agli studenti del primo anno sono affiancati dei tutor, studenti più avanti nel percorso che li aiutano ad affrontare i primi esami universitari.

Il nostro dipartimento collabora inoltre con alcune università estere gra-

SCAN ME

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

zie ad accordi internazionali. Ci sono gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio oppure lavorare alla tesi presso un'altra università europea. Attualmente sono attivi accordi di questo tipo con 35 corsi di studio in matematica europei. Simili agli accordi Erasmus sono gli accordi SEMP (Swiss European Mobility Program); abbiamo accordi attivi con le Università di Basilea, Friburgo, Ginevra, Losanna, Neuchatel e con l'ETH di Zurigo. C'è poi la possibilità di ottenere un titolo congiunto (*double degree*) grazie all'accordo con la Hokkaido University.

Puoi trovare altre informazioni e rimanere aggiornato sui nuovi accordi sulla pagina dell'Internazionalizzazione

`https://www.dm.unipi.it/international/`

Per ogni altra curiosità, visita la pagina del Corso di Studi seguendo il link `http://www.dm.unipi.it/webnew/it/cds/home-cds` oppure inquadrando il QR qui sopra!

2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? La pagina de "I Mestieri dei Matematici"

`https://www.mestierideimatematici.it`

cerca di rispondere a questa domande, e magari ti stupirà!

In generale risulta che i laureati in matematica sono soddisfatti della scelta fatta e godono di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare sul sito di Almalaurea si possono trarre i seguenti dati che riguardano i nostri laureati magistrali del 2021, vedi [2]:

- Il 100% dei laureati magistrali si dichiara soddisfatto del corso di studi.

- Il 91% dei laureati magistrali, se dovessero tornare indietro al momento della iscrizione, sceglierebbero di nuovo il nostro corso di studi.

Da alcuni anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro Dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo nasce il progetto "Matematici al Lavoro", del quale potete scoprire tutti i dettagli visitando la pagina web

`https://www.dm.unipi.it/categoria-evento/matematici-al-lavoro/`

3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge di solito all'inizio di settembre in diverse sedi in Italia tra cui una è proprio Pisa.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (sono 30 per l'anno accademico 2022/2023), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i due anni successivi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

Anche per il corso di laurea magistrale sono bandite delle borse INdAM: per esempio per l'anno 2022/2023 sono 8, più 3 dedicate in particolare a chi si iscrive a Pisa, di cui almeno 2 per studentesse, come segno concreto della nostra attenzione alla parità di genere.

È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Puoi trovare tutte le informazioni sul sito `https://www.altamatematica.it`.

Gli studenti che si iscrivono qui a Pisa possono richiedere anche una borsa di studio del DSU (Azienda della Regione Toscana per il Diritto allo Studio Universitario) sulla base del reddito familiare. I vincitori di questa borsa ottengono l'esonero dalle tasse universitarie, un contributo per le spese e in alcuni casi anche vitto e alloggio gratuiti. Per avere maggiori informazioni, puoi visitare il sito `https://www.dsu.toscana.it/`.

Bibliografia

[1] `https://www2.almalaurea.it`

[2] `https://www.dm.unipi.it/assicurazione-della-qualita/assicurazione-della-qualita-didattica/situazione-occupazionale-dei-laureati/`

[3] `https://www.dm.unipi.it/didattica/laurea-triennale/regolamenti-corso-di-laurea-triennale/`

Julia e Mandelbrot

E FATOU, LAGRANGE, BERNOULLI E MOLTI ALTRI...

di **Samuele Mongodi**, ricercatore presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università di Milano Bicocca

1 Noia al quadrato

Consideriamo un numero reale a; che succede se ne facciamo ripetutamente il quadrato, senza fermarci? Otterremo una successione di valori:

$$a, a^2, a^4, a^8, \ldots, a^{2^n}, \ldots$$

di cui è semplice studiare il comportamento. Facciamolo però nel dettaglio; per farlo, utilizziamo la disuguaglianza di Bernoulli, che lasciamo come esercizio di induzione allo studente studioso:

> Siano $x > -1$ un numero reale e $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale, allora si ha
> $$(1+x)^n \geq 1 + nx \; .$$

Vediamo ora cosa fa la nostra noiosa successione:

- se $a = 0$, tutti gli elementi sono 0
- se $a = \pm 1$, tutti gli elementi dal secondo in poi sono 1
- se $1 < a$, scriviamo $a = 1 + (a-1)$ ed applichiamo Bernoulli: $a^{2^n} = (1 + (a-1))^{2^n} \geq 1 + 2^n(a-1)$ che ci fa capire subito che la nostra successione diventa sempre più grande, cioè, *tende a* $+\infty$
- se $0 < a < 1$, $a = 1/b$ con $b > 1$ e dunque $a^{2^n} = 1/b^{2^n}$; se b^{2^n} diventa sempre più grande, $1/b^{2^n}$ diventa sempre più piccolo, più di ogni reale positivo, e dunque *tende a* 0

- se $a < 0$, $a^2 > 0$ e $|a| < 1$ se e solo se $a^2 < 1$, il che ci dice che abbiamo concluso i casi possibili.

La retta reale è dunque divisa in tre[1]:

1. l'intervallo aperto $(-1, 1)$ "va in 0" (cioè, partendo da lì, la successione tende a 0)
2. l'unione delle due semirette $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ "va a $+\infty$"
3. i punti -1, $+1$ danno una successione costantemente uguale a 1 dal secondo termine in poi.

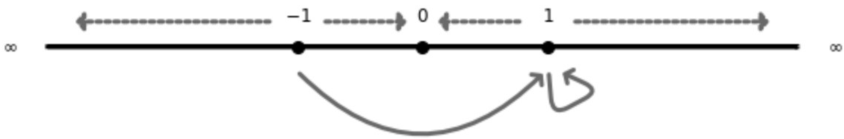


Figura 1: Dinamica della funzione $f(x) = x^2$.

Dunque, in un certo senso, la retta è divisa in due "grossi pezzi", ognuno dei quali contiene[2] un valore (0 o $+\infty$) che attrae gli altri. In più, il "confine" tra questi due pezzi contiene un terzo valore limite, che però è molto più brutale degli altri due: le successioni che partono sulla zona di confine si stabilizzano sul valore limite (cioè 1) in un numero finito di passi (in realtà, in uno o due passi); notiamo che, se siamo in uno dei due pezzi grossi, un punto reale si comporta come quelli che gli sono immediatamente vicini, mentre, al confine tra i due pezzi, basta muoversi di pochissimo (da 1 o da -1) per trovare comportamenti radicalmente diversi.

La noia di un simile esempio ci spinge a porci alcune domande.

Da dove arrivano i valori limite? I valori limite devono essere valori *fissi* per la nostra successione, cioè se partiamo da lì dobbiamo restare lì. Ovvero, devono soddisfare l'equazione $L^2 = L$, che, come sappiamo tutti, ha tre soluzioni, giusto? No, ne ha 2 nei numeri reali, cioè $L = 0$ e $L = 1$; da dove possiamo vedere che anche $+\infty$ sarà un possibile valore limite?

[1] Recta est omnis divisa in partes tres.

[2] ok, dire che l'insieme $\{a \in \mathbb{R} : |a| > 1\}$ "contiene" ∞ è un po' un abuso di linguaggio, ma capite cosa voglio dire...

Che succede se cambiamo la regola della successione? Ad esempio, sarà chiaro a tutti che prendere le quarte potenze invece dei quadrati non cambia di fatto nulla, o che prendere i cubi invece dei quadrati aggiunge punti limite[3], ma che succede con regole più complicate?

Ci sono solo questi due tipi di comportamento? Cioè, regioni "attratte" da un loro punto fisso, oppure valori che diventano fissi dopo un numero finito di passi?

Come distinguere i valori limite tra loro? Nel nostro esempio noioso, il valore 0 attira a sé i valori vicini, come fa, dando opportuno significato al termine "vicini", il valore $+\infty$. D'altra parte il punto 1 non funziona affatto così. Ci sono indizi che possono rivelare questa differenza di comportamento?

1.1 Disegnetti

Generalizzando con foga l'esempio da cui siamo partiti, potremmo considerare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e definire, dato $a \in \mathbb{R}$, la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} a_n = f(a_{n-1}) & \text{se} \quad n \geq 1 \\ a_0 = a \end{cases}$$

Cioè, $a_1 = f(a)$, $a_2 = f(f(a))$, etc. etc., ogni a_n è ottenuto applicando n volte f al valore iniziale a.

La nostra successione noiosa era ottenuta con $f(x) = x^2$. Interpretiamo il problema in termini del grafico di $f(x)$ (vedi la Figura 2).

Innanzitutto, i punti fissi (cioè i candidati valori limite, a parte $+\infty$) dati dall'equazione $f(L) = L$ sono le intersezioni del grafico di $f(x)$ con la bisettrice del primo e terzo quadrante, $y = x$. Inoltre, notiamo che la coppia (a_{n-1}, a_n) rappresenta, per ogni n, un punto sul grafico di $f(x)$, poiché $a_n = f(a_{n-1})$.

Se dunque partiamo dal punto $(a, 0)$ sull'asse delle x, possiamo muoverci in verticale fino ad incontrare il grafico di $f(x)$ nel punto $(a, f(a)) = (a_0, a_1)$; ora, muovendosi in orizzontale fino ad incontrare la bisettrice del primo e del terzo quadrate, otteniamo il punto (a_1, a_1), dal quale possiamo muoverci in verticale nuovamente fino ad incontrare il grafico di $f(x)$ nel punto $(a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$.

[3] la semiretta $(-\infty, -1)$ va a $-\infty$, -1 e 1 sono valori fissi, $(-1, 1)$ va a 0, $(1, +\infty)$ va a $+\infty$

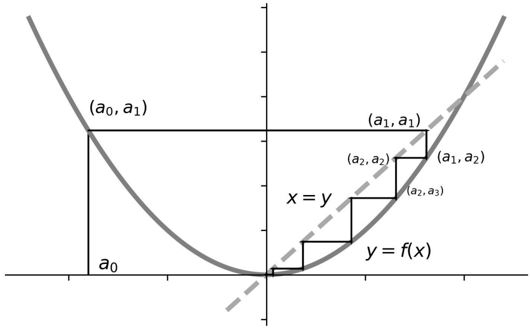


Figura 2: Iterate di $f(x) = x^2$, a partire da $a_0 = -0.9$. E' chiara la convergenza a 0.

Iterando questa costruzione, otteniamo dei punti sul grafico di $f(x)$ le cui ascisse sono i valori della successione a_n. Provate pure a farlo da soli, variando il punto di partenza, usando il grafico di $f(x) = x^2$, per riottenere i risultati del punto precedente. Ovviamente, può essere divertente provare a farlo anche per altri grafici di funzione.

1.2 Proiezione stereografica

Un modo per far entrare l'infinito nei giochi, almeno graficamente, è "avvolgere" la retta reale su una circonferenza; ci avanzerà, se lo avremo fatto per bene, un punto, che conterà come infinito. In pratica, possiamo fare così: sul piano cartesiano consideriamo la circonferenza unitaria $x^2+y^2 = 1$ e l'asse delle ascisse; per ogni punto $(a, 0)$ dell'asse, costruiamo la retta per esso e per il punto $(0, 1)$, cioè $ay = a - x$, ed intersechiamola con la circonferenza unitaria, ottenendo il punto

$$\left(\frac{2a}{a^2+1}, \frac{a^2-1}{a^2+1}\right) .$$

Chi sa di trigonometria, riconoscerà queste formule!

In questo modo, i punti dell'asse x corrispondono ai punti della circonferenza, tolto $(0, 1)$, che conta come infinito. All'inverso, dato un punto (b, c) sulla circonferenza, diverso da $(0, 1)$, la stessa costruzione gli associa il punto di ascissa $b/(1 - c)$ sull'asse x.

Ora proviamo a vedere cosa diventa $f(x) = x^2$ sulla circonferenza: partiamo da un punto (b, c) sulla circonferenza, otterremo il punto $(b/(1-c), 0)$

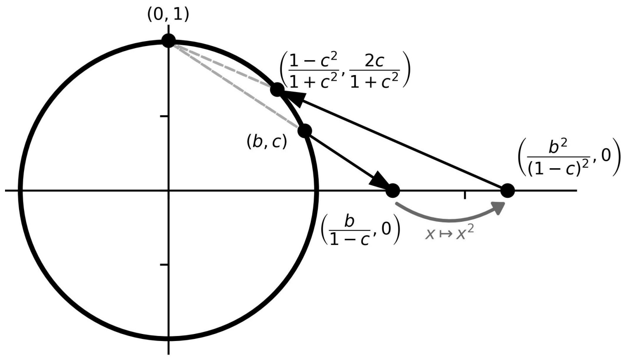


Figura 3: Proiezione stereografica e funzione indotta da $x \mapsto x^2$ sulla circonferenza.

sull'asse x; applicando la funzione $f(x)$ elevando al quadrato l'ascissa, otteniamo il punto $(b^2/(1-c)^2, 0)$, che sulla circonferenza è

$$\left(\frac{2b^2(1-c)^2}{b^4+(1-c)^4}, \frac{b^4-(1-c)^4}{b^4+(1-c)^4}\right)$$

e, tenendo conto che $b^2 = 1-c^2$, possiamo semplificarlo in $\left(\frac{1-c^2}{1+c^2}, \frac{2c}{1+c^2}\right)$.

Per quali valori di c questo è uguale al punto iniziale? Beh, dobbiamo innanzitutto avere

$$\frac{2c}{1+c^2} = c$$

che implica $c = 0, 1, -1$. Sostituendo in

$$\frac{1-c^2}{1+c^2} = b$$

otteniamo che b deve essere, rispettivamente $1, 0, 0$. Dunque qui otteniamo tre punti fissi: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ che corrispodono ai valori 1, ∞ e 0.

Così, al prezzo di complicare orrendamente le formule, abbiamo capito da dove arriva il terzo punto fisso!

1.3 Vicino ai punti fissi

Torniamo ora nel più confortevole mondo della retta reale e cerchiamo di capire cosa succede "vicino" ad un punto fisso. In corrispondenza di quel punto, abbiamo detto, il grafico della funzione interseca la bisettrice; tutto dipenderà da "come" si intersecano.

Supponiamo, per ora, che la nostra funzione, a destra del punto fisso, cresca. Ci sono, allora, tre possibilità[4]: la retta tangente al grafico di $f(x)$ può essere più, meno o ugualmente inclinata rispetto alla bisettrice.

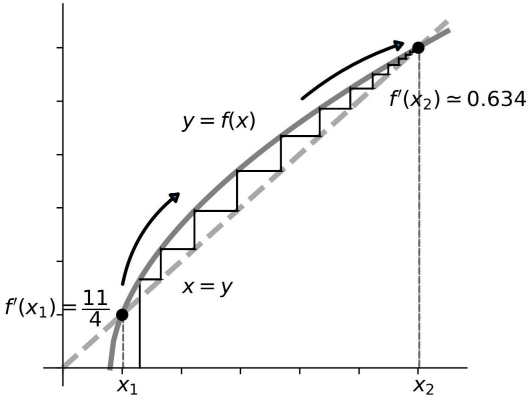


Figura 4: Funzione con punto fisso repulsivo (x_1) e attrattivo (x_2): pur partendo vicino a x_1, la successione tende a x_2.

Se la tangente di $f(x)$ è meno inclinata della bisettrice, partendo da un punto sul grafico di $f(x)$ a destra del punto fisso e muovendoci in orizzontale, per trovare la bisettrice dovremo andare a sinistra; da qui, per trovare il grafico muovendoci in verticale, dovremo proseguire in basso.

Ci muoveremo dunque sempre a sinistra e in basso, restando compresi tra il grafico e la bisettrice e dunque tendendo al punto fisso.

Se invece la tangente è più inclinata, con lo stesso tipo di considerazione grafica è chiaro che andremo sempre verso destra e in alto, fintantoche la funzione resta sopra alla bisettrice.

Analoghe analisi si potrebbero condurre per i casi in cui la funzione è decrescente.

Per chi sa di derivate, possiamo riassumere il tutto e dimostrarlo, tenendo in mente che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$ in un punto è la derivata di $f(x)$ calcolata nel valore dell'ascissa di quel punto.

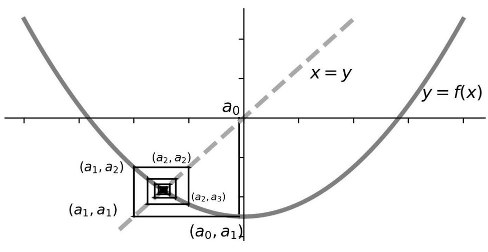


Figura 5: Punto fisso attrattivo con $f'(x) < 0$.

[4]Ok, assumendo che la nostra funzione $f(x)$ sia abbastanza bella da avere una retta tangente nel punto...

Consideriamo un punto fisso di $f(x)$, x_0 tale che $f(x_0) = x_0$; supponiamo che $f(x)$ sia derivabile con continuità "vicino"[5] a x_0.

Se $|f'(x_0)| < 1$, allora vale $|f'(x)| \leq A < 1$ "vicino"[6] a x_0.

Ora ci viene in aiuto un classico teorema di analisi matematica.

> Il *teorema di Lagrange* ci dice che, se una funzione $f(x)$ è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b), allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che
>
> $$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \ .$$

Quindi, per il *teorema di Lagrange*, se x è abbastanza vicino a x_0, si ha

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| = |f'(c)(x - x_0)|$$

con c più vicino a x_0 di x e dunque $|f'(c)| \leq A$. Applicando questo ragionamento alla nostra successione per ricorrenza, se L è un punto fisso e a è il valore di partenza, abbastanza vicino ad L, si ha

$$|a_n - L| = |f(a_{n-1}) - f(L)| \leq A|a_{n-1} - L| \leq \ldots \leq A^n|a - L|$$

e poiché $A < 1$, avremo che tale valore tende a 0 al crescere di n, cioè a_n tende a L (poiché la loro distanza tende a 0).

Allo stesso modo, se $|f'(x_0)| > 1$, potremo dimostrare che la distanza $|a_n - L|$ aumenta con n.

Dunque, possiamo classificare i punti fissi in base alla derivata di $f(x)$:

1. se $|f'(x_0)| < 1$, x_0 attira a sé i punti vicini (è un punto fisso attrattivo)
2. se $|f'(x_0)| > 1$, x_0 respinge da sé i punti vicini (è un punto fisso repulsivo)
3. se $|f'(x_0)| = 1$, boh!

Nel caso noioso di $f(x) = x^2$, notiamo che $f'(0) = 0$ (e dunque 0 è un punto fisso attrattivo – anzi, super-attrattivo!) e $f'(1) = 2$ (e dunque 1 è un punto fisso repulsivo). Per capire il comportamento di ∞, dovremmo sporcarci un po' le mani con le proiezioni stereografiche: ad esempio, portare la retta sulla circonferenza con la proiezione stereografica di prima e poi

[5] cioè in un intervallo del tipo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

[6] cioè in un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

usare una seconda proiezione stereografica, centrata in $(0, -1)$ stavolta, per far finire il punto $(0, 1)$ – che arrivava da ∞ nel punto 0; poi potremmo calcolare una nuova $f(x)$ seguendola attraverso queste trasformazioni e calcolarne la derivata in 0.[7]

2 Una famiglia di esempi

Per variare un poco, ma non troppo, consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 + c$.

Non tireremo più in ballo le proiezioni stereografiche, ma ∞ è un punto fisso attrattivo per ogni c. I suoi punti fissi reali sono dati dall'equazione $x^2 + c = x$, che ha soluzioni

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$$

che sono reali se e solo se $c \leq 1/4$.

Inoltre, $f'(x) = 2x$ per ogni valore di c e dunque, nel caso $c < 1/4$, abbiamo che

$$f'(x_+) = 1 + \sqrt{1-4c} > 1 \qquad f'(x_-) = 1 - \sqrt{1-4c}\,.$$

Dunque, $|f'(x_-)| < 1$ se e solo se $\sqrt{1-4c} < 2$, ovvero se e solo se $1-4c < 4$ ovvero se $c > -3/4$. Riassumendo:

1. se $c > 1/4$, per ogni valore di partenza, iterando f si tende all'infinito
2. se $c = 1/4$ abbiamo un unico punto fisso reale di tipo boh (vale $f'(1/2) = 1$)
3. se $c \in (-3/4/, 1/4)$ abbiamo un punto fisso attrattivo e un punto fisso repulsivo
4. se $c = -3/4$ abbiamo un punto fisso repulsivo e un punto fisso boh
5. se $c < -3/4$ abbiamo due punti fissi repulsivi.

Nel caso (1) abbiamo già capito cosa succede e, nel caso (3), ci aspettiamo che succeda quel che succedeva, noiosamente, per $c = 0$: l'intervallo

[7] Per chi voglia farsi il conto, la nuova $f(x)$ sarà sempre $f(x) = x^2$ e la sua derivata in 0 sarà sempre 0, dunque anche ∞ è un punto fisso super-attrattivo!

$(-x_+, x_+)$ verrà attratto da x_-, per $|a| > x_+$ tenderemo all'infinto, x_+ sarà fisso e $-x_+$ finirà su x_+ dopo un'iterazione.

Qualche esperimento grafico ci convince che il caso (2) si comporta come il caso (3): l'intervallo $(-1/2, 1/2]$ si contrae in $1/2$, il punto $-1/2$ diventa $1/2$ alla seconda iterazione e se $|a| > 1/2$ la successione va all'infinito.

Il risultato finale, nel caso $c = -3/4$, è ancora simile, dividendo la retta tra l'intervallo $(-3/2, 3/2)$, i suoi estremi e il suo complementare.

Prima però di lanciarci ad analizzare il caso (5), vediamo di formalizzare i primi 4. Consideriamo quindi la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}^2 + c \quad \text{se} \quad n \geq 1 \\ a_0 = a \end{cases}$$

2.1 Il caso $c > 1/4$

Si ha $a_{n+1} = a_n^2 + c > a_n$ (e ciò è equivalente al fatto che non vi siano punti fissi: la retta e la parabola non si intersecano!). Quindi la successione a_n è sempre crescente; dove può fermarsi? Beh, se esiste un numero L tale che a_n tende ad L, si dovrà anche avere che a_n^2 tenda a L^2 e dunque che $L = L^2 + c$, ma tale equazione non ha soluzioni! Dunque a_n cresce senza mai fermarsi e dunque arriva a ∞.

2.2 Il caso $0 \leq c < 1/4$

Come sopra, chiamiamo x_-, x_+ le due soluzioni di $x^2 - x + c = 0$; avremo che $0 \leq x_- < x_+$ e dunque $f(x)$ è crescente sull'intervallo (x_-, x_+). Di conseguenza, se $x_- \leq a_n < x_+$, allora $f(x_-) < f(a_n) < f(x_+)$, cioè $x_- < a_{n+1} < x_+$. Inoltre, su tale intervallo il grafico di $f(x)$ è sotto la bisettrice, dunque $f(x) < x$, ovvero $a_{n+1} < a_n$.

In questo caso, a_n decresce strettamente e deve rimanere tra x_- e x_+; non ha altre possibilità se non quella di avvicinarsi sempre più a x_-. Partendo invece nell'intervallo $[0, x_-)$, si avrà che per gli stessi motivi si deve rimanere entro tale intervallo, ma la successione sarà crescente e dunque come sopra a_n tenderà a x_-.

Per parità della funzione $f(x)$, partendo tra $-x_+$ e 0 si finirà, dopo uno step, tra 0 e x_+, potendo ripetere il ragionamento sopra. Dunque per $|a| < x_+$, la successione tende a x_-, per $|a| = x_+$, la successione si stabilizza su x_+.

Applicando poi l'idea del caso $c > 1/4$, si vede che per $|a| > x_+$ la successione tende all'infinito.

2.3 Il caso $-3/4 < c \leq 0$

Qui abbiamo che se $x_- < a_n < x_+$, allora $f(0) \leq a_{n+1} < x_+$ (poiché la funzione $x^2 + c$ è decrescente su $(x_-, 0)$ e crescente $(0, x_+)$). E si ha che $|c| \leq x_+$ se e solo se $-2 \leq c \leq 1/4$, dunque anche nel caso in esame. Qui però non possiamo sempre dire che partendo dall'intervallo (x_-, x_+) vi restiamo dentro; infatti, sappiamo solo che resteremo all'interno di $(-x_+, x_+)$. In tale intervallo, a sinistra di x_- otteniamo che $a_{n+1} > a_n$ e a destra di x_- otteniamo che $a_{n+1} < a_n$; si può dimostrare che, da un certo punto in poi, la nostra successione si dividerà in due, con i termini pari da una parte di x_- e i termini dispari dall'altra, entrambe le *sottosuccessioni* che tendono a x_-.

Come sopra, quindi, l'intervallo $(-x_+, x_+)$ si contrarrà su x_- e via dicendo.

2.4 Casi $c = 1/4$, $c = -3/4$

Lasciamo questi casi allo studente studioso, spoilerando il finale: succederà ancora che l'intervallo $(-x_+, x_+)$ si contrarrà su x_-, mentre al suo esterno tutto fuggirà verso l'infinito.

2.5 Hic sunt leones: $c < -3/4$

Dai conti che già abbiamo fatto, sappiamo che, se $-2 \leq c \leq 1/4$, allora $-x_+ \leq c = f(0)$ e dunque, se la successione cade nell'intervallo $(-x_+, x_+)$, vi rimane.

Però, se $-2 \leq c < -3/4$, non vi sono punti fissi attrattivi e dunque, non appena la successione si avvicina ad un punto fisso, ne viene respinta, aumentando la propria distanza da esso. Quindi è ragionevole supporre che non potrà mai raggiungere tali punti dai punti vicini... e dunque, che succede? Beh, ad esempio, per $c = -1$ ci possiamo accorgere che, se $a_0 = 0$, si ha $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, etc e dunque c'è un *periodo* o *ciclo* (in questo caso, con periodo pari a 2: $0, -1$). Non è detto che il periodo si manifesti immediatamente, ad esempio per $a = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ abbiamo la seguente successione

$$\sqrt{1+\sqrt{2}},\ \sqrt{2},\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1, \ldots$$

e dunque c'è un antiperiodo prima del periodo vero e proprio. Notiamo però che i punti da cui può iniziare un periodo lungo k sono tra le soluzioni di

$$f(f(\cdots(f(x))\cdots)) = x$$

dove a sinistra f è composta con se stessa k volte; questa equazione è un polinomio di grado 2^k e dunque questo è il massimo numero possibile di cicli. A loro volta, le partenze degli antiperiodi prima di un dato periodo sono soluzioni di un'equazione polinomiale di grado 2^h (dove h è la lunghezza dell'antiperiodo) e dunque ancora sono al più 2^h. Quindi i punti di periodi e antiperiodi sono al più tanti quanti i numeri razionali, cioè non possono comporre tutto l'intervallo $(-x_+, x_+)$. Per capire cosa succede agli altri punti, almeno nel caso $c = -1$, studiamo un attimo la funzione $g(x) = f(f(x))$, per la quale $0, -1$ sono punti fissi: si ha $g(x) = x^2(x^2 - 2)$ e $g'(x) = 4x(x^2 - 1)$, dunque $0, -1$ sono punti fissi (super-)attrattivi. Il che vuol dire che, se guardiamo solo le iterate pari o le iterate dispari, esse tenderanno a uno e all'altro, mentre la successione, in totale, oscillerà tra l'uno e l'altro. Ad esempio, partendo da $a = 0.1$ otteniamo questi primi valori:

$$0.1,\ -0.99,\ -0.01\ldots,\ -0,9996\ldots,\ -0.0007\ldots,\ -0.9999993\ldots,\ -0.000001\ldots$$

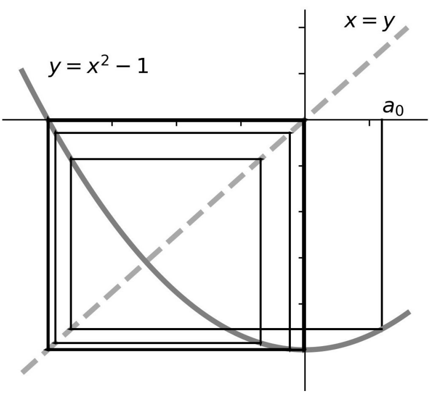


Figura 6: Orbita che si avvicina al ciclo $0, -1$.

e come si vede, si alternano due successioni, una che converge a 0 ed una che converge a -1. Da notare che, invece, la funzione $f(f(f(x)))$ non ha punti fissi a parte x_- e x_+ e dunque non vi sono cicli periodici di lunghezza 3.

Non è nemmeno detto che succeda sempre questo: consideriamo $c = -2$. Ci sono due punti fissi, $x_- = -1$ e $x_+ = 2$, e ci sono due punti di periodo due

$$\beta_- = (-1 - \sqrt{5})/2$$
$$\beta_+ = (-1 + \sqrt{5}))/2$$

ottenuti come punti fissi di $g(x) = f(f(x)) = x^4 - 4x^2 + 2$.

Tali punti fissi sono però repulsivi (la derivata di g in $\beta_\pm$ è -4) e dunque non avremo la situazione di prima in cui i valori della successione "convergono al ciclo periodico". Ad esempio, per $a = \beta_- + 0.01$ otteniamo i seguenti primi valori (troncati alle prime due cifre dopo la virgola)

$$-1.60, 0.58, -1.66, 0.74, -1.44, 0.09, -1.99, 1.97, 1.88, \ldots$$

e come si vede non sembra esserci nessuna intenzione di avvicinarsi al ciclo $\beta_-,\ \beta_+$ ($-1.62,\ 0.62$ le prime cifre dopo la virgola). Inoltre, sempre per $c = -2$, possiamo trovare cicli arbitrariamente lunghi: per $k \geq 3$, dal valore

$$2 - 4\sin^2\left(\frac{2\pi}{2^k - 1}\right)$$

parte un periodo lungo k, fatto di punti fissi repulsivi per la funzione ottenuta componendo f con se stessa k volte.

Dunque, partendo vicino a uno di questi valori, si osserverà come prima un comportamento *caotico*, in tutto l'intervallo $(-2, 2)$ (da cui però ancora una successione non può uscire).

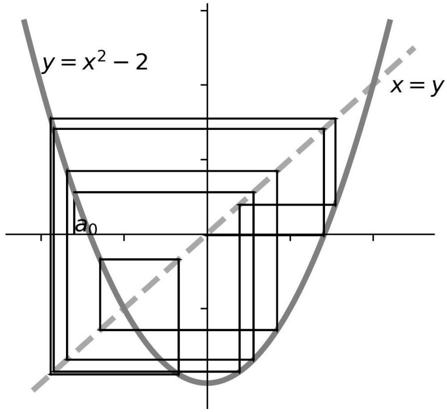


Figura 7: Orbita caotica da $a_0 = -1.6$.

Infine, vediamo brevemente che per $c = -6$ otterremo ad esempio due punti fissi repulsivi ($x_- = -2$ e $x_+ = 3$), un periodo lungo 2 (fatto dai punti $(-1 \pm \sqrt{21})/2$, anch'essi repulsivi), 6 punti periodici di periodo 3 (e quindi 2 cicli lunghi 3) di cui già non è possibile trovare una espressione esatta. Vi sono anche cicli di lunghezza maggiore, altrettanto impossibili da scrivere esplicitamente. Osserviamo però che, ad esempio, se $|a_n| < \sqrt{3}$, otterremo $|a_{n+1}| > 3 = x_+$, e dunque, iterando, avremo che a_n tende all'infinito, per tutti i valori di partenza in $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$. In questo caso, succede una cosa molto particolare: proviamo a trovare i punti che *non vanno all'infinito*. Notiamo intanto che se $|a_n| > 3$, allora $|a_{n+1}| = a_n^2 - 6 > 3$ quindi anche in questo caso, se si parte con $|a| > 3$, si tende a infinito. Dunque, una successione che non va all'infinito deve sempre restare in $[-3, 3]$, ma se $a_1 \in [-3, 3]$, si può calcolare facilmente che a_0 poteva stare solo in $[-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$; se poi a_2 sta in $[-3, 3]$, allora a_1 doveva stare in $[-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$ e dunque a_0 doveva stare in

$$\left[-3, -\sqrt{6+\sqrt{3}}\right] \cup \left[-\sqrt{6-\sqrt{3}}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{6-\sqrt{6}}\right] \cup \left[\sqrt{6+\sqrt{3}}, 3\right] .$$

Provando a proseguire, notiamo la costruzione è la seguente: partiamo dall'intervallo $I = [-3, 3]$ e togliamo un pezzo centrale, lungo $1/\sqrt{3}$ volte I;

Figura 8: Primi passi della costruzione dell'insieme dei punti che non vanno all'infinito, per $c = -6$, cioè di un insieme di Cantor.

il risultato sono due intervalli e ad ognuno di essi togliamo un segmento centrale di lunghezza $1/\sqrt{3}$ volte la loro lunghezza, ottenendo 4 intervalli; ad ognuno di essi ancora togliamo la stessa cosa. Il *limite* di questo procedimento è un insieme, detto *insieme di Cantor*[8], che non contiene nessun intervallo, ma non è vuoto. È l'insieme dei punti che non vanno all'infinito per $c = -6$!

Insomma, per $c < -3/4$, succedono davvero cose strane...

3 Vera complessità

Ma le vere cose strane succedono quando si abbandona quell'innaturale costrizione che sono i numeri reali.

Consideriamo l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi e definiamo la successione

$$\begin{cases} z_n = z_{n-1}^2 + (c_0 + ic_1) & \text{se} \quad n \geq 1 \\ z_0 = a_0 + ia_1 \end{cases}$$

Ad ogni numero complesso z possiamo associare un punto del piano (x, y) di modo che $z = x + iy$, dove x e y sono numeri reali; se abbiamo due numeri complessi, $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, le operazioni di somma e prodotto hanno questo aspetto:

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \qquad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

Allora, l'operazione di elevamento al quadrato sembra già più minacciosa qui, infatti $z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ e dunque stiamo di fatto studiando la trasformazione $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.

[8]Quello originale, proprio di Cantor, sarebbe quello che ogni volta toglie un intervallo centrale lungo $1/3$ di quello prima, ma per ottenerlo avremmo dovuto guardare a $c = -45/16$...

Notiamo però una cosa: se $z = r\cos\alpha + ir\sin\alpha$, per $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ e α un angolo (quindi inteso a meno di multipli di 2π) allora

$$z^2 = r^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + ir^2 2\sin\alpha\cos\alpha = r^2\cos(2\alpha) + ir^2\sin(2\alpha)\ .$$

Ad esempio, partendo da $1+i$ ed iterando la funzione $f(z) = z^2$, otteniamo

$$1 + i \mapsto (1+i)^2 = 2i \mapsto -4 \mapsto 16 \mapsto \ldots$$

oppure, partendo da $0.1 + 0.2i$, otteniamo

$$0.1 + 0.2i \mapsto -0.03 + 0.04i \mapsto -0.0007 - 0.0024i \mapsto \ldots\ .$$

Anche qui, possiamo pensare (formalmente allo stesso modo di $\mathbb{R}$, quindi con le stesse formule), di "chiudere" $\mathbb{C}$ aggiungendo un punto all'infinito (∞) e ottenendo una sfera, di solito chiamata $\mathbb{CP}^1$, tramite la proiezione stereografica. Dunque, ha senso dire che una successione "tende all'infinito" senza aggiungere altro, quando il *modulo*[9] di z_n tende all'infinito come numero reale positivo.

Per comodità, continueremo a scrivere $a = a_0 + ia_1$ per il punto iniziale e $c = c_0 + ic_1$ per il parametro.

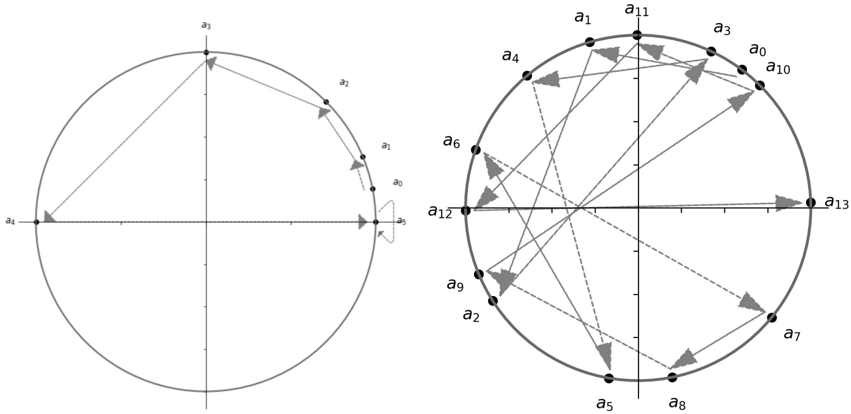
3.1 Il caso noioso

Se poniamo $c = 0$, stiamo, come all'inizio, facendo i quadrati successivi; guardando i moduli, possiamo ragionare come all'inizio: se $|a| < 1$, la successione z_n tende a 0 (perché il suo modulo tende a 0), se invece $|a| > 1$ la successione tende a ∞. Se però $|a| = 1$, allora $|z_n| = 1$ per ogni n... ancora avremo che $a = 1$ è un punto fisso e che $a = -1$ va su un punto fisso, ma, ad esempio, avremo dati iniziali che ci mettono quanto vogliamo ad arrivare su un punto fisso:

$$a = \cos\left(\frac{2\pi}{2^k}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{2^k}\right)$$

si comporta così: ogni volta che eleviamo al quadrato, otteniamo un numero della stessa forma dove però c'è $k-1$ al posto di k; in k passi si arriva a $k = 0$, che è 1. E poi ci sono un sacco di punti il cui quadrato continuerà ad avere modulo 1, ma non diventeranno mai 1. Ad esempio, provate a partire da $(3/5) + i(4/5)$ e vedete cosa succede...

[9] $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, cioè la distanza di (x, y) dall'origine



(a) $\cos(\pi/16) + i\sin(\pi/16)$ **(b)** $(3/5) + i(4/5)$

Figura 9: Orbite di punti della circonferenza unitaria tramite $z \mapsto z^2$.

La situazione è dunque la seguente: fuori dalla circonferenza di raggio 1, tutti i punti vanno verso ∞, dentro la circonferenza di raggio 1, tutti i punti vanno verso 0, sulla circonferenza i punti si muovono in modo arbitrariamente complicato (caotico!) senza, in generale, andare da alcuna parte.

Una regione *connessa*[10] di piano in cui se la successione che parte da un punto ha un certo comportamento[11], le successioni che partono dai punti vicini si comportano allo stesso modo [12], si dice *componente di Fatou* (della successione o, più semplicemente in questo caso, della funzione $f(z)$ usata per creare la successione); l'insieme complementare dell'unione tutte le componenti di Fatou, cioè l'insieme in cui c'è un comportamento "non uniforme" delle successioni rispetto ai punti di partenza[13], si dice *insieme di Julia*.

Nel caso (noioso?) di $f(z) = z^2$, abbiamo due componenti di Fatou, l'esterno e l'interno della circonferenza unitaria, che è il nostro insieme di Julia. Notate che (in questo e in ogni altro caso), l'insieme di Julia è il

[10] cioè fatta di un pezzo solo

[11] ad esempio: tende ad un dato valore, tende a un ciclo periodico,...

[12] tendono allo stesso valore o allo stesso ciclo periodico, ...

[13] Spesso si utilizza l'aggettivo *caotico*, riferendosi al fatto che il caos è una grande variazione di risultati dovuta a una piccola variazione di situazioni iniziali

"bordo comune" delle componenti di Fatou; il che ha senso: per passare da una zona dove vige un certo comportamento al limite ad una dove ne vige uno diverso, bisogna attraversare una transizione "caotica".

Va infine detto che spesso si considera un terzo insieme, il cosiddetto *insieme di Julia pieno*, cioè il complementare della componente di Fatou che è attratta dall'infinito, cioè l'insieme di tutti i punti per i quali la successione resta limitata, non tende all'infinto. Nel nostro caso, sarebbe il cerchio di raggio 1.

3.2 Art attack!

Un ovvio vantaggio del lavorare sui numeri complessi è il poter fare disegni nel piano e non sulla retta. Ecco dunque i disegni di alcuni insiemi di Julia pieni, per i valori di c reali che avevamo studiato prima. Riuscite a ritrovare alcune caratteristiche (sui reali) delle successioni associate?

In ognuno di questi disegni, l'insieme di Julia vero e proprio è il "bordo" della zona nera (che, ad esempio, per $c = -2, -6$ è tutta la zona nera), mentre l'interno è fatto da componenti di Fatou in cui i punti non tendono all'infinito, ma a un limite finito (un punto fisso attrattivo).

Poiché su $\mathbb{C}$ l'algebra funziona quanto su $\mathbb{R}$ (anzi, meglio![14]), per ogni valore di c possiamo calcolare i punti fissi z_+, z_- risolvendo $z^2 + c = z$ e possiamo determinare se sono attrattivi o repulsivi calcolando $|f'(z_\pm)|$, dove $f'(z) = 2z$. Quindi, a differenza di prima, avremo sempre due punti fissi (tranne che per $c = 1/4$, dove avremo due radici coincidenti), ma come prima avremo un punto fisso attrattivo solo se $|2z_-| < 1$ o $|2z_+| < 1$. Avere un punto fisso attrattivo corrisponde ad avere una componente di Fatou in cui i punti non vanno all'infinito e dunque corrisponde ad avere un "interno" per l'insieme di Julia pieno.

Come detto, $z_\pm = (1 \pm \sqrt{1-4c})/2$; sia w la radice quadrata di $1-4c$ con parte reale maggiore o uguale a 0. Allora z_- sarà il punto con derivata in modulo più piccola. Tale derivata sarà $1 - w$. L'insieme delle c per cui c'è un punto fisso attrattivo è perciò

$$\{c \ : \ |1-w| < 1\} = \{c = -(w^2-1)/4 \ : \ |1-w| < 1\};$$

in tale insieme, w varia in un cerchio di centro 1 (cioè $(1,0)$ nel piano) e raggio 1 e la regione che ci interessa è quella ottenuta calcolando, per ogni tale w, il numero complesso $-(w^2-1)/4$. Il risultato è la curva di Figura 10, detta *cardioide*.

[14]Su $\mathbb{C}$, ogni polinomio di grado n ha esattamente n radici, se contate con molteplicità!

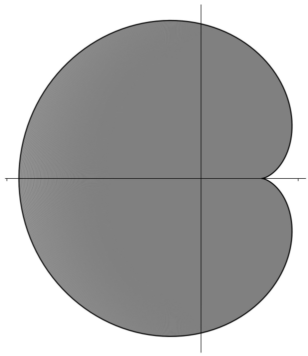


Figura 10: Una cardioide.

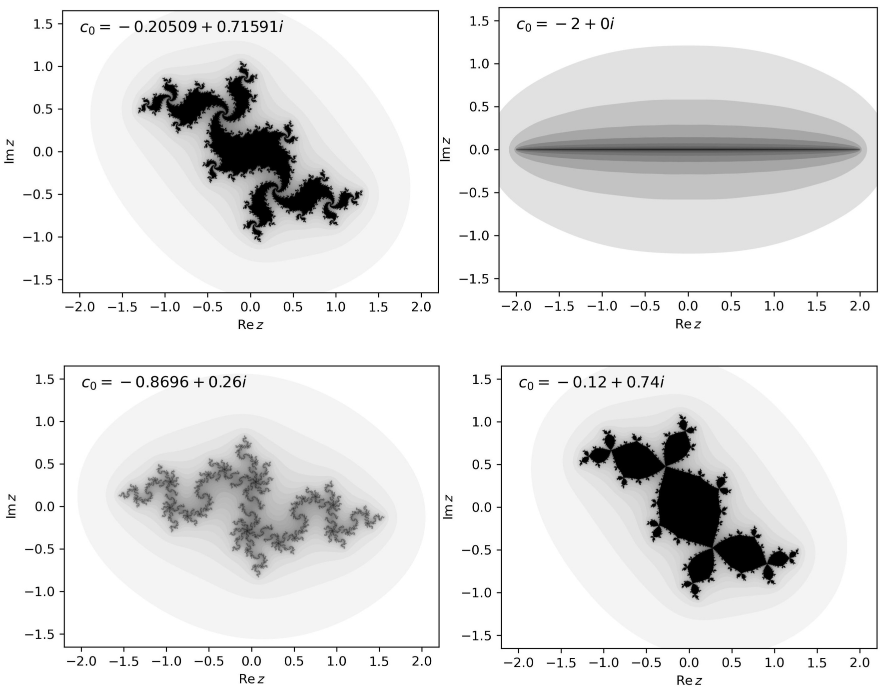


Figura 11: Insiemi di Julia

Abbiamo visto prima, però, che ci possono essere fenomeni più complicati, ad esempio un ciclo periodico attrattivo; supponiamo di avere un ciclo di lunghezza 2, fatto da $z_\circ$ e $z_\dagger$: $f(z_\circ) = z_\dagger$ e $f(z_\dagger) = z_\circ$, allora $z_\circ$ e $z_\dagger$ sono attrattivi per $g(z) = f(f(z))$ se $g'(z_\circ) = f'(f(z_\circ))f'(z_\circ) = f'(z_\dagger)f'(z_\circ) = 4z_\circ z_\dagger = g'(z_\dagger)$ ha modulo minore di 1.

I punti di periodo 2 sono le soluzioni di $f(f(z)) = z$, cioè di $z^4 + 2cz^2 - z + c^2 + c = 0$ che si fattorizza come $(z^2 + c - z)(z^2 + z + 1 + c) = 0$; le soluzioni del primo fattore sono i punti fissi e ci interessano quelle del secondo. Il loro prodotto è $1 + c$ e dunque formeranno un ciclo attrattivo se $|1+c| < 1/4$. Questa condizione descrive un cerchio di centro $(-1, 0)$ e raggio $1/4$. Partendo da tale cerchio, otterremo che non ci sono punti con un limite finito, ma ci sono punti attratti da questo ciclo di lungehzza 2.

Ad esempio, se $c = 1$ e $|z_0| = |a| < 1/3$, allora $|z_1 + 1| = |a^2| < 1/9$ (e anche $|z_1| < 10/9$) e dunque $|z_2| = |z_1^2 - 1| < |z_1 - 1| \cdot |z_1 + 1| < 10/81 < 1/3$. Quindi se parto abbastanza vicino a 0, vengo attratto da 0 ai passi pari e da -1 ai passi dispari. Dunque, c'è una componente di Fatou che contiene 0 e c'è una componente di Fatou che contiene -11. Ve ne sono altre, come si può capire dal disegno per $c = 1$, anche se nessuna contiene un punto attrattivo, ma solo cicli periodici attrattivi.[15]

Se c è tale che non vi siano punti, né cicli attrattivi, possiamo ancora avere delle componenti di Fatou in cui i punti non vanno all'infinito, ad esempio succede per $c = 1/4$, dove l'unico punto fisso è neutro $f'(1/2) = 1$. In questo caso, il puunto fisso è nell'insieme di Julia, in quanto, da un lato i punti scappano all'infinito, dall'altro tendono verso di lui.

Inoltre, possiamo avere componenti di Fatou ancora più strane, in cui i punti "girano" senza mai ripassare da dove sono già stati, ma rimanendo dentro una certa regione.

Infine, abbiamo valori, come $c = i$ o $c = -2$ per cui l'insieme di Julia pieno non ha un interno e coincide con Julia, ma è ancora un pezzo unico (seppure non si riesca a dire "una linea", vista la sua natura poco disegnabile[16]), ma se prendiamo valori ancora più lontani da 0, come $c = -6$, troviamo solo *polvere*, insiemi che non contengono alcun intervallo e sembrano fatti di infiniti punti staccati.

[15] Tutte le "zone piene" dell'insieme di Julia pieno vanno, dopo una iterazione, sulla componente di Fatou di 0 o su quella di -1 e tutti gli altri punti periodici sono sul bordo, cioè nell'insieme di Julita, poiché spostandosi poco da loro si cambia drasticamente comportamento, andando all'infinito o andando verso il ciclo attrattivo lungo 2.

[16] Gli insiemi di Julia come per $c = i$ sono detti *dendriti*

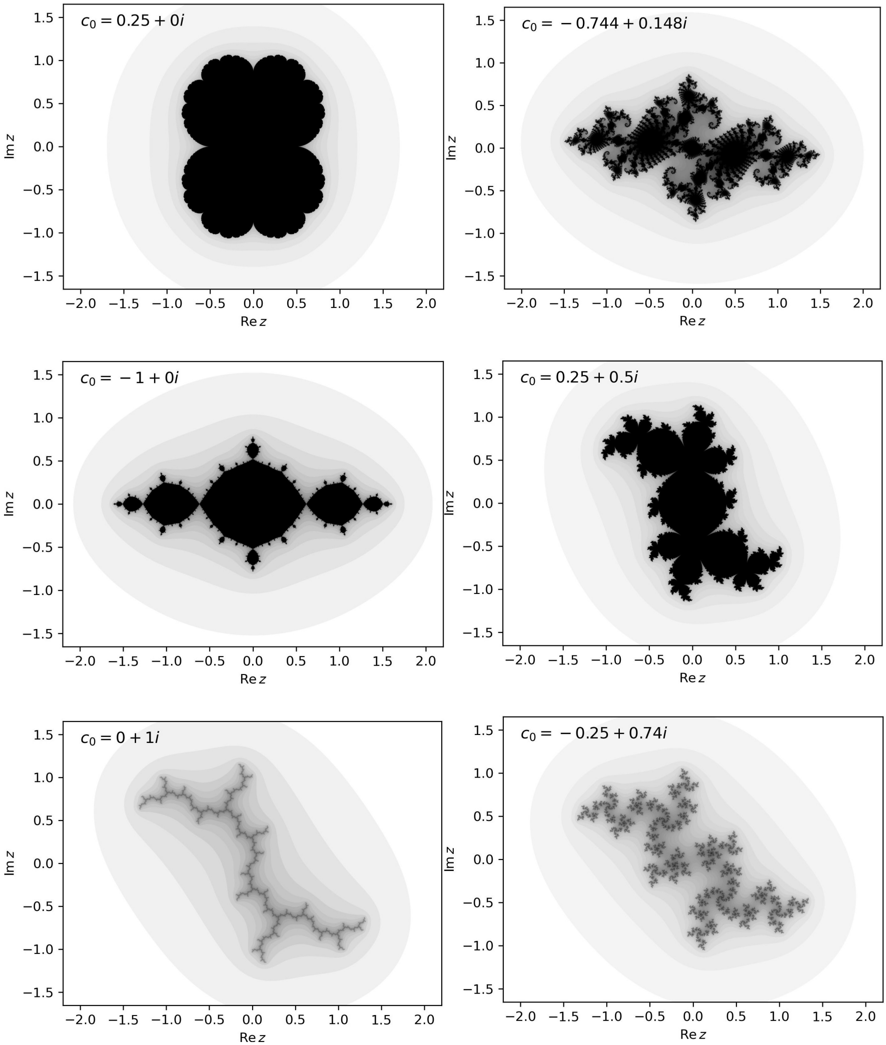


Figura 12: Insiemi di Julia - parte 2

3.3 Matrioske

Notiamo anche che, in molti casi, gli insiemi di Julia hanno una natura frattale, cioè contengon parti che sono una loro versione rimpicciolita.

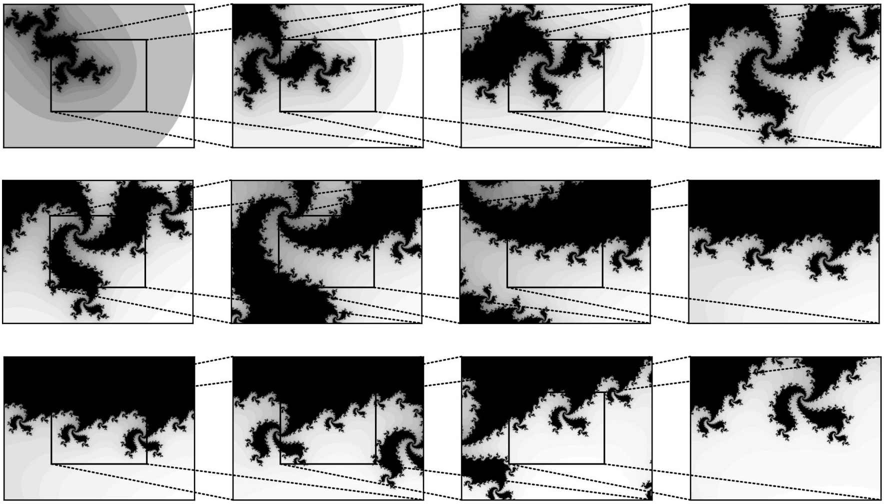


Figura 13: Ingradimenti successivi dell'insieme di Julia per $c = 0.205 + 0.716i$, centrati nel punto $1 - 0.67i$.

Intuitivamente, questo è dovuto al fatto che la funzione $f(z) = z^2 + c$ è *conforme*; questo vuol dire che preserva gli angoli tra curve (tranne che in 0, dove $f'(z) = 0$). Questo può essere verificato solo per $c = 0$, visto che modificare c equivale a comporre con una traslazione nel piano complesso, che non modifica alcun angolo.

Consideriamo la funzione $f(z) = z^2$ e, a titolo di esempio, prendiamo una retta per l'origine e una circonferenza centrata nell'origine, che sono due curve ortogonali; una retta per l'origine si scirve come $\{tz_0 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ e dunque i quadrati dei suoi punti sono gli elementi di $\{t^2 z_1^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$, cioè una semiretta. Una circonferenza centrata nell'origine di raggio r, tramite $f(z) = z^2$ viene mandata in una circonferenza centrata nell'origine di raggio r^2. Dunque, rimangono ortogonali. Questa non è una dimostrazione, ovviamente, ma cerca di farvi capire in che senso la mappa $f(z)$ "conserva gli angoli".

4 Keeping it all together

Sarebbe ottimo avere una sorta di mappa del piano complesso che descrive come cambiano gli insiemi di Julia a partire dal c che scegliamo.

Questa mappa è l'*insieme di Mandelbrot*. Tutto parte da un teorema dovuto a Julia e Fatou (eh sì, sono esistiti davvero): l'insieme di Julia di $f(z) = z^2 + c$ è connesso se e solo se 0 appartiene all'insieme di Julia pieno, cioè se e solo se la successione che parte da 0 è limitata. E dunque definiamo l'insieme di Mandelbrot proprio come l'insieme dei c per cui succede questo.

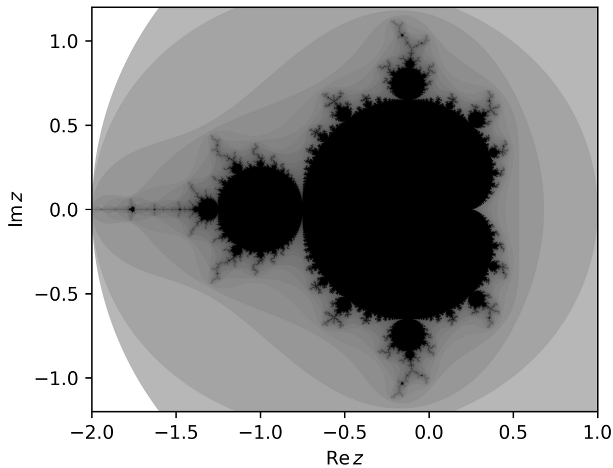


Figura 14: In nero, lo stupendo insieme di Mandelbrot

Una prima cosa da notare è che, come per i reali, possiamo subito dimostrare che se $|c| = 2 + h$ con $h > 0$, abbiamo che $|c^2 + c| \geq |c^2| - |c| = (4 + 4h + h^2) - (2 + h) = 2 + 3h + h^2 \geq 2 + 3h$; se poi $|z_n| = 2 + mh$, allora $|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c|^2 = (2 + mh)^2 - (2 + h) \geq 2 + 2(m-1)h$ e da qui è chiaro che se $|c| > 2$, allora c non sta nell'insieme di Mandelbrot, che dunque è contenuto nel disco di raggio 2.

Noterete poi che tale insieme contiene la cardioide delle c per cui c'è un punto fisso attrattivo e il disco delle c per c'è un ciclo di lunghezza 2 attrattivo. Gli altri pezzi "pieni" del Mandelbrot corrispodono a insiemi del parametro c per cui vi sono cicli attrattivi di lunghezza maggiore. Ad esempio i due pallini sopra e sotto la cardioide corrispondono a valori di c per cui c'è un ciclo attrattivo di lungehzza 3 (e questo dice che non vi sono valori reali per cui questo succede). Vi sono poi parti di tale insieme che non ci azzarderemmo a chiamare "piene", ad esempio tutti i tentacoli che si protendono verso l'alto o verso sinistra sull'asse reale; su di essi si trovano valori come $c = i$ o $c = -2$, per cui l'insieme di Julia pieno non ha un interno. Fuori dal Mandelbrot, infine, troviamo quei valori per cui l'insieme di Julia si disgrega in insiemi di Cantor, come $c = 6$. Molte sono le proprietà curiose dell'insieme di Mandelbrot: è fatto di un pezzo solo (nonostante i "filamenti" che si propagano dai bulbi), è frattale vicino a certi punti, il suo bordo è, in un certo senso, 2-dimensionale. Inoltre, non è ovvio che ci si debba limitare alle mappe quadratiche, si possono creare insiemi di Mandelbrot per altre famiglie dipendenti da un parametro, ad esempio $x^3 + c$ o cose più fantasiose.

Bibliografia

[1] https://e.math.cornell.edu/people/belk/dynamicalsystems/NotesJuliaMandelbrot.pdf

[2] https://complex-analysis.com/content/julia_set.html

[3] https://images.math.cnrs.fr/L-ensemble-de-Mandelbrot/

[4] https://www.dynamicmath.xyz/mandelbrot-julia/

Corsa al cento

*di **Francesco Pio Numero**, studente triennale del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa*

Vi presentiamo un semplice gioco, sperando che vi divertiate a rifletterci un po' e magari a inventare qualche variante.

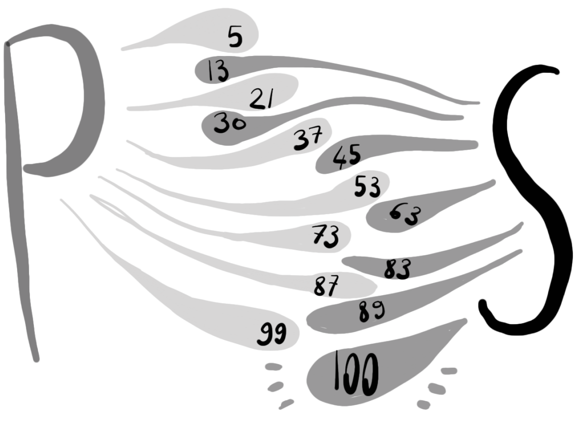
L'obiettivo del gioco è arrivare per primi a dire "Cento".

Due giocatori si sfidano.

I due giocatori alternandosi dovranno dire un numero naturale, secondo questa regola: se un giocatore dice il numero x l'altro giocatore potrà dire il numero $x + h$, con h compreso fra 1 e 10. Così fino alla fine del gioco, che termina quando un giocatore arriva per primo a dire 100.

Per far iniziare il gioco, il primo giocatore dovrà dire un numero da 1 a 10.

Ad esempio, indicando con P il primo giocatore e con S il secondo giocatore, una partita potrebbe essere la seguente:



Proviamo a pensare se esiste una strategia vincente per uno dei giocatori. Mettiamoci per esempio nei panni di P e studiamo il gioco percorrendolo a ritroso.

Se P dice cento ha vinto, ma vince anche se costringe S a dire un numero che consentirà poi a P di dire 100. Per esempio, se il primo giocatore dice 89, ovvero 100 meno 11, costringe il suo avversario a dire un numero da 90 a 99 e questo lo porterà in ogni caso a poter dire 100. Quindi P vince se riesce a dire 89... intravedete adesso una strategia vincente per P?

Se voi foste P, quale sarebbe la vostra prima mossa?

Vi proponiamo adesso, per qualche ulteriore riflessione, due varianti del gioco:

Variante A) Il primo giocatore dovrà dire un numero da 2 a 10 (non gli è concesso dire 1). Con questa restrizione, vorreste essere P oppure S?

Variante B) Si gioca con le regole standard, ma vince chi dice 99. In questo caso esiste una strategia vincente per uno dei due giocatori?

Alcune curiosità

- Quello che vi abbiamo appena illustrato è un esempio di "gioco finito ad informazione perfetta" tra due giocatori che muovono alternativamente, in cui il caso non influenza il processo decisionale. Per questa famiglia di giochi si riesce a dimostrare che uno dei due giocatori possiede una strategia vincente (ma attenzione, una cosa è sapere che una strategia vincente esiste, un'altra è sapere qual è...). Date un'occhiata, tanto per cominciare, al link in bibliografia sul teorema di Zermelo-Kuhn.

- In un noto quiz televisivo dei primi anni duemila, il conduttore proponeva questo gioco ad alcuni dei concorrenti che chiamavano da casa, offrendo loro in caso di vincita una cena con un'attrice. Nessuno mai vinse quella cena, forse perché nessun matematico ha mai chiamato.

Bibliografia

[1] `https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Zermelo-Kuhn`

I problemi del giornalino

*una rubrica a cura di **Davide Lombardo**,*
ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

1 Divertissement

1.1 Successione crescente

Sia $x_0 > 1$ un numero reale fissato. Si consideri la successione

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

definita per ricorrenza dalla condizione $x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2}$ per ogni indice $n \geq 0$ (quindi $x_1 = \frac{1+x_0^2}{2}$, $x_2 = \frac{1+x_1^2}{2}$, $x_3 = \frac{1+x_2^2}{2}$, e così via). Dimostrare che esiste un indice k tale che $x_k > 2$.

1.2 Contando multipli di 11

Determinare quanti sono gli interi positivi multipli di 11 che, nella usuale rappresentazione decimale, si scrivono con 6 cifre, le prime quattro delle quali sono $\{1, 2, 3, 9\}$ in un qualche ordine.

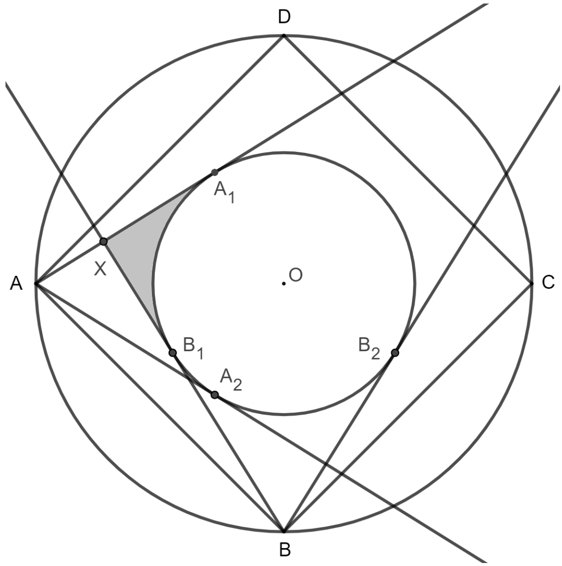
1.3 Al convegno di matematica

Ad un convegno di matematica partecipano invitati da n nazioni. Per promuovere gli scambi culturali, a cena tutti i partecipanti siedono intorno ad un tavolo rotondo, con la seguente restrizione: se due persone P_1, P_2 provengono dalla stessa nazione, allora la persona che siede alla destra di P_1 proviene da una nazione diversa rispetto alla persona che siede alla destra di P_2. Dimostrare che al convegno partecipano al massimo n^2 matematici, e dare un esempio esplicito di disposizione intorno al tavolo che rispetta le regole del convegno quando $n = 4$ e ci sono esattamente 16 partecipanti.

1.4 Due circonferenze concentriche

Consideriamo due circonferenze concentriche ω_1, ω_2, con il raggio di ω_1 inferiore a quello di ω_2. Sia $ABCD$ un quadrato inscritto in ω_2, e siano A_1, A_2 i punti in cui le tangenti uscenti da A toccano ω_1 (rispettivamente, siano B_1, B_2 i punti in cui le tangenti uscenti da B toccano ω_1), come in figura. Sia infine X l'intersezione fra AA_1 e BB_1.

Assumendo che i raggi di ω_1 ed ω_2 siano rispettivamente 3 e 5, si calcolino l'area della regione ombreggiata e l'area del triangolo ABX.



2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

Vogliamo dimostrare il seguente risultato, da cui otterremo poi una sorprendente conseguenza.

Teorema 1. *Sia α un numero irrazionale positivo. I numeri della forma $m - n\alpha$, con m, n interi* ***positivi****, sono densi in $\mathbb{R}$, ovvero per ogni numero reale x e ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un numero della forma $m - n\alpha$ che disti meno di ε da x.*

Denotiamo con $\{x\}$ la parte frazionaria del numero reale x (ovvero $\{x\} = x - [x]$, dove $[x]$ è il più grande intero minore o uguale ad x; ad esempio, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1 = 0.4142...$).

1. ($\star$) Dimostrare che esistono infiniti numeri razionali $\frac{p}{q}$ tali che

   $$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

   Indicazione. Può essere utile considerare la parte frazionaria dei numeri $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$, dove n è un intero positivo fissato arbitrariamente.

   Nota. Questo risultato si chiama a volte *teorema di approssimazione di Dirichlet* [1].

2. Fare vedere che il seguente risultato implica il Teorema 1:

   Teorema 2. *Sia α un numero irrazionale positivo. I numeri della forma $m - n\alpha$, con m, n interi* ***di segno qualsiasi****, sono densi in $\mathbb{R}$, ovvero per ogni numero reale x e ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un numero della forma $m - n\alpha$ che disti meno di ε da x.*

3. Dimostrare che è sufficiente far vedere che, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni numero reale $y \in (0, 1)$, esiste un intero positivo n tale che $|y - \{n\alpha\}| < \varepsilon$.

4. Concludere la dimostrazione del Teorema 2.

5. Dimostrare che il logaritmo in base 10 di 2 è un numero irrazionale.

6. Fissiamo una qualsiasi sequenza finita di cifre (ad esempio, 2023). Dimostrare che esiste una potenza di 2, ovvero un numero della forma 2^n, le cui prime cifre siano proprio quelle assegnate.

   Indicazione. Prendendo l'esempio di 2023, si osservi che la condizione voluta è equivalente a

   $$2023 \cdot 10^m \leq 2^n < 2024 \cdot 10^m$$

   per qualche coppia di interi $n \geq 1, m \geq 0$. Passando ai logaritmi in base 10...

Nota. Il Teorema 1 è una versione debole del cosiddetto *teorema di equidistribuzione* [2]. Questo risultato è una delle basi della teoria dell'*approssimazione diofantea*, ovvero dello studio di come approssimare arbitrari numeri reali con numeri di forme particolari (ad esempio, numeri razionali, come nel caso del teorema di Dirichlet).

Curiosità. La più piccola potenza di 2 che inizia con le cifre 2023 è $2^{10103} = 2023234\ldots$. Questo è un numero con 3042 cifre!

Bibliografia

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet's_approximation_theorem`

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Equidistribution_theorem`

Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una lista di libri, pagine web, canali YouTube e film incentrati sulla matematica per stimolare ulteriormente la vostra curiosità. Alcuni dei libri che vi consigliamo contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti "più leggeri".

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.
- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi.
- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann.
- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico.
- D. Guedj, *Il teorema del pappagallo*, TEA: romanzo ambientato a Parigi in cui le vicende del protagonista si intrecciano con i principali problemi della storia della matematica, dalla duplicazione del quadrato al teorema di Fermat, fino ai problemi più recenti.
- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan.
- D. R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach. Un'eterna ghirlanda brillante. Una fuga metaforica su menti e macchine nello spirito di Lewis*

Carroll, Adelphi: saggio divulgativo in cui l'autore evidenzia collegamenti tra matematica, musica, biologia, IA e arte.

- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore.
- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.
- G. Lolli, *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.
- A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo.
- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.
- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni.
- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Ci siamo qui limitati a proporre una bibliografia essenziale: di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- D. Aronofsky, π – *Il teorema del delirio*, 1998.

SCAN ME

Visita il canale youtube del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa all'indirizzo `https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw/`!

- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.
- A. Giannarelli, *Non ho tempo*, 1973.
- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001.
- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.
- T. Melfi, *Il diritto di contare*, 2016.
- M. Tyldum, *The imitation game*, 2014.
- G. Van Sant, *Will Hunting – Genio ribelle*, 1997.
- M. Webb, *Gifted – Il dono del talento*, 2017.

Adesso vi proponiamo una lista di canali YouTube legati alla matematica per scoprire un sacco di curiosità e perché no, trovare ottimi spunti per approfondimenti:

- `https://www.youtube.com/c/3blue1brown`
- `https://www.youtube.com/c/Mathologer`
- `https://www.youtube.com/user/numberphile`
- `https://www.youtube.com/c/ThinkTwiceLtu`
- `https://www.youtube.com/user/blackpenredpen`
- `https://www.youtube.com/c/DrPeyam`
- `https://www.youtube.com/@MATHsegnale`

A proposito, potete trovare su YouTube il canale del nostro dipartimento! Fateci visita (e, perché no, iscrivetevi!) all'indirizzo

`https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw`

seguendo il link o inquadrando il QR presente in alto su questa pagina. Troverete presto una varietà di contenuti: per cominciare, vi consigliamo il nuovo video di presentazione del nostro dipartimento

- `https://www.youtube.com/watch?v=afZql__Shmo`

e il video "Studiare Matematica a Pisa", che trovate a questo link:

- `https://www.youtube.com/watch?v=pfh4IyDjbWY`

Non perdetevi poi la nostra intervista ad Alessio Figalli, medaglia Fields per la Matematica, in occasione della Settimana Matematica 2019:

- `https://www.youtube.com/watch?v=i6ha2pLLUuA`

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:
  `http://maddmaths.simai.eu/`
- Versione on-line del giornalino:
  `https://www.dm.unipi.it/terza-missione/home-orientamento/il-giornalino-degli-open-days/`
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
  `http://www.dm.unipi.it/webnew/`
- Sito delle olimpiadi di matematica:
  `http://olimpiadi.dm.unibo.it/`
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
  `http://www.sns.it/`
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:
  `https://poisson.phc.dm.unipi.it/`

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito:

`http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento`