I Problemi del Giornalino

una rubrica a cura di **Davide Lombardo**

Indice

1 Divertissement

1 Il campionato di biliardino

Nel campionato provinciale di biliardino di Pisa ogni squadra ha vinto almeno cinque partite. Dimostrare che c'è una squadra che ha perso almeno cinque partite.

(Le regole del campionato prevedono che ognuna delle partite possa terminare con una vittoria di una delle due squadre oppure con un pareggio.)

2 I quadrati sono meglio

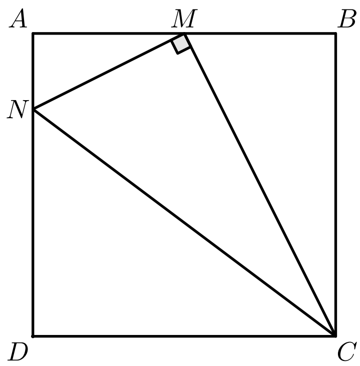
Dimostrare che per ogni scelta di 3 numeri reali a, b, c si ha $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

3 La cifra 1 basta e avanza!

Sia n un intero positivo dispari la cui espressione decimale non termina per 5. Dimostrare che c'è un multiplo di n che in base dieci si scrive utilizzando solo la cifra 1.

4 Un'uguaglianza di angoli

Sia $ABCD$ un quadrato, chiamiamo M il punto medio di AB e N un punto sul lato AD in modo che $\widehat{NMC}$ sia retto (come in figura). Dimostrare che $\widehat{BCM} = \widehat{MCN}$.



5 Cammini nel piano

Una formica parte dall'origine del piano cartesiano e ogni secondo si muove di 1mm a destra o di 1mm verso l'alto. Quanti percorsi diversi la portano, dopo $d + a$ secondi, a trovarsi nel punto di coordinate (d, a)?

6 Monete alla cieca

Alessandra partecipa ad un gioco a premi: viene portata bendata di fronte ad un tavolo, sul quale – le viene detto – ci sono 100 monete, di cui 80 mostrano "testa" e le altre 20 "croce". Le viene chiesto di manipolare le monete come vuole (ma naturalmente senza togliersi la benda!) e, alla fine delle sue operazioni, separare le monete in due gruppi in modo tale che il numero di "teste" in un gruppo sia uguale al numero di "teste" nell'altro. Ce la farà? Sapreste aiutarla?

7 Un po' di geometria

Sia ABC un triangolo con $\widehat{BAC} > \widehat{ACB}$ e sia D il punto di BC tale che $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$. Gli assi di AD e AC si intersecano nel punto E. Provare che l'angolo $\widehat{BAE}$ è retto.

8 Una curiosa coincidenza

1. Si può osservare che $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$ e $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$. Si tratta di un fenomeno isolato o queste uguaglianze fanno parte di uno schema generale?

2. Trovare tutti gli interi positivi n tali che $n(n+1)(n+2)(n+3)$ sia un quadrato perfetto (ovvero sia il quadrato di un intero).

9 Divisibilità

Sia n un intero positivo. Consideriamo i numeri fra 1 e $2n$: dimostrare che, comunque si scelgano $n+1$ di questi $2n$ interi, se ne sono presi due che non hanno divisori in comune (due interi a e b *non hanno divisori in comune* se l'unico intero positivo che divide sia a che b è 1).

Più difficile: dimostrare anche che comunque si prendano $n+1$ interi nell'insieme $\{1, \ldots, 2n\}$ se ne sono scelti due tali che uno divide l'altro.

10 Ci sarà un primo?

Sia $n = 2019!$, ovvero il prodotto dei numeri interi positivi fra 1 e 2019. Consideriamo i 2018 interi compresi fra $n+2$ e $n+2019$: è vero o no che uno di questi 2018 numeri è primo?

11 Pianificazione stradale

Nello stato di Francuvia ci sono 2020 città, ognuna delle quali è collegata con una strada diretta ad almeno 1010 altre città. Dimostrare che per ogni coppia di città, chiamiamole A e B, o sono collegate direttamente da una strada, oppure esiste una terza città, diciamo C, che è collegata ad entrambe (in altri termini, è possibile raggiungere ogni città da ogni altra città passando per al massimo una terza città).

12 Una sequenza esplosiva

Consideriamo la sequenza di interi positivi il cui primo termine è $a_0 = 3$ e in cui l'$(n+1)$-esimo termine a_{n+1} è dato da $2a_n^2 - 1$ (la sequenza inizia quindi $a_0 = 3, a_1 = 17, a_2 = 577, a_3 = 665857, \ldots$). Trovare una "formula chiusa" per a_n (cioè una una espressione per a_n che non coinvolga i termini intermedi $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$).

13 Excentri

Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta; chiamiamo M il punto medio dell'arco di Γ di estremi B, C che non contiene il punto A. Indichiamo con I l'incentro di ABC e con I_a l'excentro opposto al vertice A (ovvero il punto d'incontro della bisettrice dell'angolo interno in A e degli angoli tra BC e i prolungamenti di AB e AC dalla parte di B e C rispettivamente). Dimostrare che M è il punto medio di II_a.

14 Vladimir e Arnold

Vladimir e Arnold partono contemporaneamente, al sorgere del sole, dalle loro rispettive abitazioni, poste nei punti A e B. Entrambi camminano a velocità costante (ma diversa per i due protagonisti) per tutto il giorno, lungo la medesima strada, l'uno da A a B, e l'altro da B ad A. A mezzogiorno in punto si incrociano, si salutano, e continuano per la loro strada senza mai fermarsi né cambiare velocità. Vladimir arriva a destinazione, ovvero al punto B, alle 4 di pomeriggio, mentre Arnold, più lento, raggiunge A alle 9 di sera. A che ora è sorto il sole?

Nota. Vuole la tradizione che il grande matematico Vladimir Igorevič Arnol'd abbia risolto questo problema all'età di 12 anni, e ne sia rimasto talmente impressionato da citarlo spesso come uno dei suoi problemi preferiti. Arnol'd impiegò un'intera giornata a risolverlo, quindi non demoralizzatevi se impiegate qualche tempo!

15 Un esagono speciale

Esiste un esagono con tutti gli angoli uguali e lati di lunghezze 1, 2, 3, 4, 5, 6 (non necessariamente in quest'ordine)?

16 16 cifre e un quadrato

Sia n un numero intero positivo di almeno 16 cifre (in base 10). Dimostrare che possiamo scegliere un insieme di una o più cifre consecutive il cui prodotto è un quadrato perfetto (ovvero il quadrato di un numero intero).

17 Se 100 cerchi non bastano, prova con 400

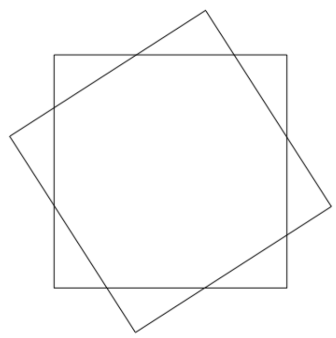
Un rettangolo R nel piano contiene 100 cerchi di raggio 1, a due a due disgiunti, con la proprietà che non è possibile disegnare un ulteriore cerchio con centro contenuto nel rettangolo e disgiunto da quelli già presenti. Dimostrare che è possibile disegnare 100 cerchi di raggio 2, non necessariamente disgiunti, che coprano completamente la superficie del rettangolo. Dimostrare anche che è possibile ricoprire il rettangolo con 400 cerchi di raggio 1 (non disgiunti).

18 Dadi

Lanciamo 100 normali dadi a 6 facce (equilibrati) e sommiamo i risultati. Qual è la probabilità che la somma sia pari?

19 Due quadrati

Consideriamo due quadrati identici, entrambi di lato 1 e con il medesimo centro, come ad esempio quelli in figura.



Mostrare che (qualunque sia la posizione relativa di un quadrato rispetto all'altro) l'area dell'intersezione è strettamente maggiore di $\frac{3}{4}$.

20 Ancora quadrati

Ricordiamo che un numero intero si dice *quadrato perfetto* se la sua radice quadrata è a sua volta intera. Fissiamo una sequenza finita di cifre (per esempio 1793). Dimostrare che esiste sempre un quadrato perfetto la cui espressione decimale inizia con la sequenza di cifre assegnata (per esempio, $1793099025 = 42345^2$).

21 Polinomi di polinomi di polinomi...

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi.

1. Siano a, b interi distinti. Dimostrare che $b - a$ divide $P(b) - P(a)$.
2. ($\star$) Sia t un intero tale che $P(P(P(P(\dots P(t)\dots)))) = t$ (il numero di applicazioni del polinomio non è noto). Dimostrare che allora $P(P(t)) = t$.

22 Interi consecutivi

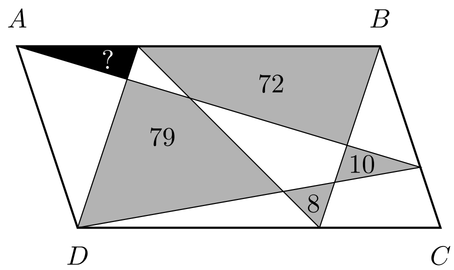
Trovare gli interi positivi n per cui vale la seguente proprietà: la somma di n interi positivi consecutivi è sempre divisibile per n.

Nota. Può essere utile ricordare che la somma dei primi n interi positivi è $\frac{n(n+1)}{2}$.

23 Un gioco da bambini

Secondo una storia ripresa da diversi siti internet, questo problema è stato proposto in Cina per identificare studenti delle elementari particolarmente portati per la matematica. Indipendentemente dall'origine del problema, sapete calcolare l'area della regione nera, sapendo che $ABCD$ è un parallelogramma e che le aree delle regioni grigie sono quelle indicate?

Nota. il disegno non è in scala.



24 Una lunga lista di numeri

Permutando in tutti i modi possibili le cifre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ si possono ottenere $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ numeri diversi. Elenchiamoli tutti in ordine crescente: quale numero occupa la posizione 2021 in questa lista?

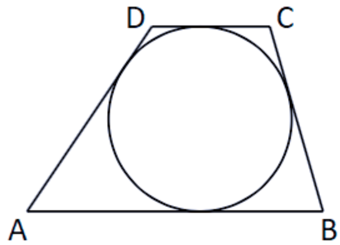
25 Somma infinita

Consideriamo la successione $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ e la successione $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Quando n diventa molto grande, b_n si avvicina arbitrariamente ad un certo valore, senza mai superarlo. Qual è questo valore?

(Per chi conosce questo linguaggio: qual è la somma della serie $\sum_{n \geq 1} \dfrac{n}{2^n}$?)

26 Cerchio inscritto

Un cerchio di raggio 12 tocca tutti i quattro lati di un quadrilatero $ABCD$ in cui il lato AB è parallelo al lato CD. Sapendo che $BC = 25$ e l'area di $ABCD$ è 648, determinare la lunghezza del lato DA.



27 Una trasmissione radiofonica

Nell'ultima parte della fortunata emissione serale *Radio(a)Matrice* i conduttori Alberto e Barbara rispondono alle molte telefonate del pubblico. All'insaputa degli ascoltatori, Alberto e Barbara hanno fatto una scommessa: ogni giorno essi annotano, per ogni chiamata, se l'interlocutore abbia più di 40 anni (X) o meno (Y). Alla fine della serata, se nella lista delle chiamate la combinazione XX compare *prima* della combinazione YX vince Alberto; se viceversa YX compare *prima* di XX vince Barbara (se nessuna delle due combinazioni è realizzata, per quella sera nessuno dei due vince). Quindi, ad esempio, se una sera le telefonate registrate sono state **XX**XYXYYXYYX vince Alberto, e se un'altra sera le telefonate sono YY**YX**YXXYXXYXY vince Barbara. Dopo che questa scommessa si è protratta per un anno, Alberto osserva che Barbara ha vinto circa il triplo delle volte rispetto a lui! Tenuto conto che il 50% delle telefonate proviene da ascoltatori con più di 40 anni e il 50% proviene da ascoltatori con meno di 40 anni (e quindi le sequenze XX e YX sono ugualmente probabili), sapreste spiegare a cosa sia dovuta la notevole differenza nel numero di vittorie dei due conduttori?

28 Un'equazione, ma due incognite

Sapendo che x e y sono numeri reali tali che

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$$

si calcoli il valore di $x + y$.

29 Quadrati, quadrati, quadrati...

Trovare tutte le coppie (x, y) di interi non negativi tali che

$$x^2 + y^2 = (xy - 7)^2.$$

30 Polinomio misterioso

Il polinomio $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ verifica $p(1) = p(2) = p(3) = 0$. Quanto vale $p(12) + p(-8)$?

31 Testa o croce?

Simona possiede 1024 monete (non truccate). Dopo averle lanciate una volta su un tavolo, ottenendo un certo numero di *teste* e un certo numero di *croci*, riprende in mano tutte quelle che mostrano un risultato *croce* e le lancia nuovamente. Ripete quindi questa operazione fino ad un massimo di altre 8 volte (o finché tutte le monete mostrano un risultato *testa*), riprendendo in mano ogni volta tutte le monete che mostrano un risultato *croce* e lanciandole nuovamente. In questo modo, ogni moneta viene lanciata fino ad un massimo di 10 volte. Qual è la probabilità che al termine di tutti questi lanci tutte le monete mostrino il risultato *testa*? Questa probabilità è numericamente vicina ad un qualche numero 'noto'?

32 Uno, due, quattro

Trovare tutti gli interi x, y, z tali che $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

33 Quadrilatero inscritto

Sia $PQRS$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza e tale che $\angle PSR = 90°$. Siano H e K i piedi delle perpendicolari tracciate da Q alle rette PR e PS. Dimostrare che se il segmento HK incontra il segmento QS, allora il punto di intersezione è il punto medio di QS.

34 Fattorizzare 30^3

Determinare il numero di terne ordinate (x, y, z) di interi positivi tali che $xyz = 30^3$.

35 Un polinomio con una proprietà bizzarra

Sia n un intero positivo e sia $f(x)$ un polinomio a coefficienti reali tale che

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{e} \quad x^n f(1/x) = -f(x),$$

dove la prima condizione vale per ogni numero reale x e la seconda vale per ogni numero reale diverso da 0. Dimostrare che $f(x)$ è divisibile per $x(x^2 - 1)$.

36 Un punto a caso

Sia ABC un triangolo e D un punto qualsiasi interno al lato AC. Consideriamo la circonferenza ω_C circoscritta al triangolo BDC: la tangente in D a tale circonferenza incontra la retta AB nel punto C_1. Similmente, la tangente in A alla circonferenza ω_A circoscritta al triangolo BDA incontra la retta BC in A_1. Dimostrare che:

1. $\angle ABC + \angle A_1DC_1 = 180°$;
2. A_1C_1 è parallela a AC.

37 Il solitario di Marina

Marina gioca al seguente solitario. Fissato un intero positivo $N \geq 3$ (che Marina sceglie all'inizio del gioco), il solitario si svolge su una lunga striscia di carta, divisa in caselle, numerate da sinistra a destra con gli interi da $-N$ a N (cioè $-N, -(N-1), \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, N-1, N$). Inizialmente, la casella 0 contiene N monete e tutte le altre caselle sono vuote. Ad ogni mossa, Marina può scegliere una casella che contenga almeno 3 monete, e spostare due di tali tre monete di una casella verso destra, e la terza di una casella verso sinistra. Se nessuna casella contiene almeno 3 monete, non si può più muovere.

Marina vince se, dopo un certo numero di mosse, le monete sono così distribuite: per un certo indice i, le caselle $i, i+1, i+2, \ldots, i+N-3$ contengono una moneta, e la casella $i+N-2$ contiene 2 monete (ovvero le monete occupano una sequenza di caselle adiacenti, che contengono ciascuna una moneta, salvo quella più a destra, che ne contiene due). Supponiamo che Marina riesca a vincere al suo solitario: dimostrare che allora N è una potenza di 2, e determinare in funzione di N quale casella contiene 2 monete alla fine del gioco.

Esempio. Per $N = 4$, il solitario termina in una mossa: Marina sposta una moneta a sinistra e due a destra, trovandosi con $0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 0$. Nella notazione dell'esercizio, le monete sono nelle caselle $i = -1$, $i + 1 = 0$, e $i + 2 = 1$, e Marina ha vinto.

38 Successione crescente

Sia $x_0 > 1$ un numero reale fissato. Si consideri la successione

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

definita per ricorrenza dalla condizione $x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2}$ per ogni indice $n \geq 0$ (quindi $x_1 = \frac{1+x_0^2}{2}$, $x_2 = \frac{1+x_1^2}{2}$, $x_3 = \frac{1+x_2^2}{2}$, e così via). Dimostrare che esiste un indice k tale che $x_k > 2$.

39 Contando multipli di 11

Determinare quanti sono gli interi positivi multipli di 11 che, nella usuale rappresentazione decimale, si scrivono con 6 cifre, le prime quattro delle quali sono $\{1, 2, 3, 9\}$ in un qualche ordine.

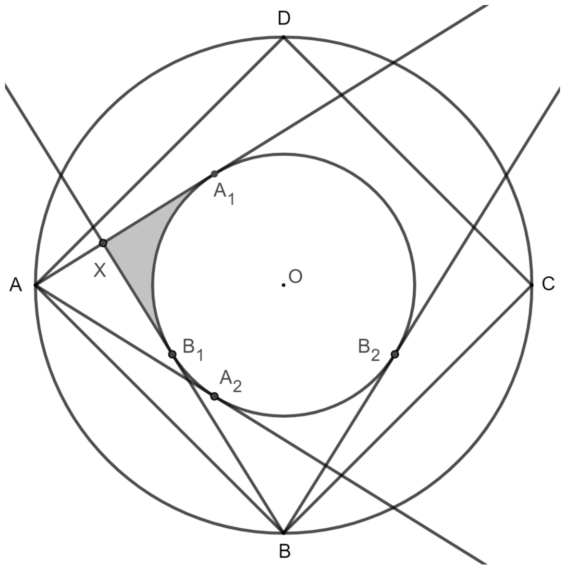
40 Al convegno di matematica

Ad un convegno di matematica partecipano invitati da n nazioni. Per promuovere gli scambi culturali, a cena tutti i partecipanti siedono intorno ad un tavolo rotondo, con la seguente restrizione: se due persone P_1, P_2 provengono dalla stessa nazione, allora la persona che siede alla destra di P_1 proviene da una nazione diversa rispetto alla persona che siede alla destra di P_2. Dimostrare che al convegno partecipano al massimo n^2 matematici, e dare un esempio esplicito di disposizione intorno al tavolo che rispetta le regole del convegno quando $n = 4$ e ci sono esattamente 16 partecipanti.

41 Due circonferenze concentriche

Consideriamo due circonferenze concentriche ω_1, ω_2, con il raggio di ω_1 inferiore a quello di ω_2. Sia $ABCD$ un quadrato inscritto in ω_2, e siano A_1, A_2 i punti in cui le tangenti uscenti da A toccano ω_1 (rispettivamente, siano B_1, B_2 i punti in cui le tangenti uscenti da B toccano ω_1), come in figura. Sia infine X l'intersezione fra AA_1 e BB_1.

Assumendo che i raggi di ω_1 ed ω_2 siano rispettivamente 3 e 5, si calcolino l'area della regione ombreggiata e l'area del triangolo ABX.



2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

1 Il teorema di Liouville discreto

Sul piano è disegnata una scacchiera infinita, in ogni casella della quale è scritto un numero intero positivo. Questi numeri hanno una particolarità: il valore scritto in una casella della scacchiera è uguale alla media dei valori scritti nelle 4 caselle adiacenti. Dimostrare che i numeri scritti sul piano sono tutti uguali.

Commento. Funzioni di questo tipo sono dette *armoniche*; esiste una versione del teorema di Liouville anche per funzioni armoniche continue, ovvero funzioni che associano ad ogni punto del piano un numero reale, e hanno la proprietà che il valore in ogni punto è pari alla media dei valori che la funzione assume su una circonferenza centrata in quel punto. Il teorema di Liouville afferma allora che una funzione armonica limitata è costante. Questo risultato, lungi dall'essere una curiosità isolata, è invece estremamente importante nel campo della matematica noto come *analisi complessa*, e ha fra le sue conseguenze nientemeno che il celebre teorema fondamentale dell'algebra, ovvero il fatto che ogni polinomio a coefficienti reali o complessi ammetta tutte le sue radici nel campo dei numeri complessi!

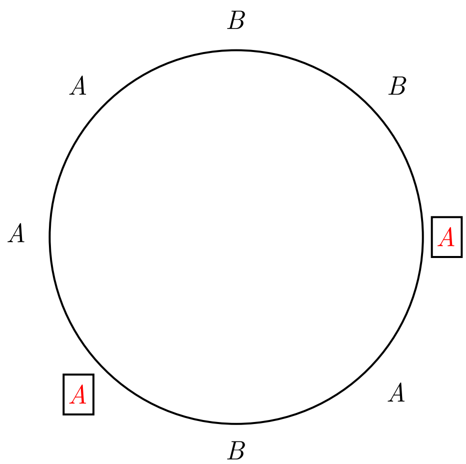
2 Il problema del ballottaggio

Alle elezioni per il rettorato dell'Università di Francuvia sono arrivate al ballottaggio le candidate Maria Agnesi (A) e Margherita Beloch (B). Maria Agnesi ha ottenuto a voti, strettamente più dei b voti di Margherita Beloch, ed ha vinto le elezioni. Durante lo spoglio dei voti, gli scrutatori hanno tenuto traccia di tutte le $a+b$ schede mentre le guardavano una per una, perciò sanno quanti voti favorevoli a ciascuna candidata erano stati scrutinati in ogni momento dello spoglio. Dimostrare che la probabilità che Maria Agnesi sia stata strettamente in vantaggio per tutta la durata dello scrutinio (ovvero che in ogni momento le schede scrutinate favorevoli ad A fossero più di quelle favorevoli a B) è $\frac{a-b}{a+b}$.

Questo è un problema famoso, che ha ricevuto molte soluzioni nel tempo (vedi Wikipedia, Bertrand's ballot theorem); qui suggeriamo due possibili approcci.

Strategia 1. Supponiamo di avere una sequenza di $a+b$ voti, di cui a per la candidata A e b per la candidata B. Pensiamo questa sequenza come 'ciclica', ovvero come scritta lungo il bordo di una circonferenza, senza un inizio e una fine precisa. Dimostrare allora che ci sono esattamente $a-b$ posizioni da cui si può iniziare a leggere la sequenza (diciamo in senso orario) in modo tale che A sia sempre in vantaggio. Ora non dovrebbe essere difficile arrivare alla conclusione!

Esempio. *Ecco un esempio del caso $a=5$ e $b=3$; quelle riquadrate sono le posizioni da cui si può partire per avere una sequenza in cui A sia sempre in vantaggio.*



Strategia 2. Rappresentiamo il processo di scrutinio come un cammino nel piano (cartesiano): ogni volta che viene scrutinato un voto per A facciamo un passo verso l'alto, e ogni volta che viene aperto un voto per B facciamo un passo verso destra. In questo modo, la condizione che A sia sempre in vantaggio vuol dire esattamente che questo cammino non interseca la diagonale $y = x$ (perché? Cosa succede se il primo voto scrutinato è per B?). Come si fa spesso in matematica, cerchiamo invece di contare i cammini che *non* ci vanno bene; chiamiamoli "cattivi". Ci sono quelli che iniziano con B (quanti sono?); e ci sono quelli che iniziano con A ma ad un certo punto intersecano la diagonale. Per ognuno di questi possiamo guardare la prima volta in cui il cammino interseca la diagonale; immediatamente prima deve essere stato scrutinato un voto per B, e al momento c'è una situazione di pareggio. *Riflettendo* su questa situazione, si può mostrare che i cammini 'cattivi' che iniziano con A sono in effetti tanti quanti i cammini che iniziano per B. E da qui è facile concludere... soprattutto se avete già fatto l'esercizio sui cammini della formica!

Commento. Il secondo approccio risolutivo è anche conosciuto come il *principio di riflessione*, e ha moltissime applicazioni in questioni non solo di combinatoria ma anche di probabilità, dove si rivela ad esempio uno strumento potente per studiare le proprietà del moto browniano.

3 La lotteria del sultano

Un sacchetto contiene 1001 palline numerate con interi positivi (distinti, ma sulla cui grandezza non sappiamo niente). Il sultano vi sfida al seguente gioco: vi è concesso estrarre una pallina dopo l'altra e leggere il numero che riporta, e dopo ogni estrazione potete decidere se fermarvi (tenendo l'ultima pallina estratta) o andare avanti, estraendo un'altra pallina. Ovviamente nel momento in cui estraete una nuova pallina scartate la precedente, e una volta estratta la milleunesima pallina siete obbligati a fermarvi.

Quando decidete di fermarvi, il sacchetto viene aperto e tutti i numeri rivelati. Se la pallina che avete in mano è quella con il numero più alto in assoluto avete vinto una quantità di kuruş (la moneta dei sultani) pari al vostro peso, altrimenti non avete vinto nulla. Le uniche informazioni che avete sono le regole del gioco e il numero di palline nel sacchetto.

A prima vista, sembra che le vostre probabilità di vittoria siano minime: tanto per incominciare, non avete nessuna idea di quali numeri possano essere scritti sulle palline nel sacchetto! Dimostreremo invece che in realtà esiste una strategia che permette di avere sempre una probabilità di vittoria di almeno $1/4$ – e questo perfino se invece di mille le palline fossero un milione!

Pensateci un po' prima di andare a cercare un indizio nella sezione delle soluzioni... siamo sicuri che, quando ve la diremo, concorderete che si tratta di una strategia molto ragionevole!

Lavoriamo con un numero generico n di palline. L'idea è quella di fissare una soglia $r < n$, guardare (e scartare) le prime r palline estratte – tanto per "farsi un'idea" di quanto siano grandi i numeri "tipici" scritti sulle palline – e poi fermarsi non appena si estrae una pallina con un numero più grande di tutti quelli visti fino a quel momento (se si trova... altrimenti vuol dire che la pallina migliore era fra le prime r, e purtroppo è andata!). Vogliamo ora scegliere r per avere una ragionevole speranza di vittoria.

1. Dimostrare che con questa strategia, se le palline totali sono n e le palline che guardiamo per farci un'idea sono r, la probabilità di vittoria è
$$\frac{r}{n}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{r}{n}(H_{n-1}-H_{r-1}),$$
dove il simbolo H_n indica la somma $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.
Indicazione. Come si calcola questa probabilità? Immaginiamo di continuare a estrarre fino alla fine (anche dopo aver deciso di fermarci, tanto per vedere come sarebbe andata) e dividiamo in casi a seconda di quando estraiamo la pallina con il numero più alto. Se è la prima che estraiamo non c'è niente da fare. Nemmeno se è la seconda, o la terza, o la r-esima. Se è la i-esima con $i > r$ può ancora andarci bene: serve però che non ci siamo già fermati! Quindi serve che la migliore fra le prime $i-1$ palline sia uscita fra le prime r, altrimenti ci saremmo accontentati...
2. Mostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. Supponendo (tanto per fissare le idee) che $n = 2k+1$ sia dispari, dimostrare che possiamo scegliere r in modo che la nostra probabilità di vittoria sia almeno $1/4$.

Commento. Questo è un problema famoso, spesso citato come *il problema delle segretarie* o anche, vista una diffusa formulazione più romanzesca del quesito, *il problema della dote del sultano.* La scelta di r suggerita qui sopra, per quanto consenta di avere una probabilità di vittoria non trascurabile, non è la migliore: la strategia ottimale richiede infatti di guardare le prime $r \approx \frac{n}{e}$ palline, e per n grande garantisce come probabilità di vittoria uno strabiliante 36% (qui e è la costante di Eulero, o numero di Nepero, $e = 2.71828...$, e 36% è un'approssimazione di $1/e = 0.3678...$). Questo problema rientra nell'ambito di quella che viene chiamata *teoria dell'arresto ottimo*, uno strumento importante non solo per considerazioni astratte ma anche nelle applicazioni, ivi compreso – per esempio – lo studio matematico delle transazioni finanziarie.

Inoltre, con tecniche più raffinate si può dimostrare che quando n è grande la differenza $H_{2n} - H_n$ è approssimativamente uguale a $\log(2n) + \gamma - (\log n + \gamma) = \log 2 \approx 0.693...$, quindi (quando n è grande) la 'vera' probabilità di vittoria garantita dalla strategia appena descritta è circa $\frac{1}{2}\log 2 \approx 0.3465...$, ovvero quasi il 35%!

4 Una curiosa proprietà aritmetica

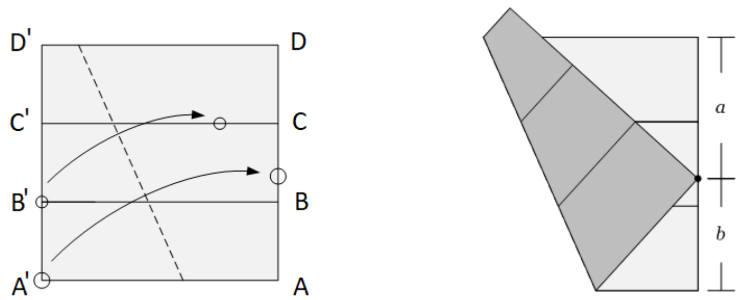
Sia n un intero positivo e a un intero coprimo con $2n$ (due interi positivi a e b si dicono *coprimi* se non hanno divisori comuni). Consideriamo l'insieme
$$S_a = \{ai \bmod 2n : i = 1, \ldots, n\},$$
dove $k \bmod 2n$ indica il resto di k nella divisione per $2n$, preso nell'intervallo $[0, 2n-1]$ (quindi, per esempio, $135 \bmod 12 = 3$). Sia poi b un intero tale che $ab \bmod 2n = 1$ e sia $S_b = \{bj \bmod 2n : j = 1, \ldots, n\}$.

1. Sia N_a il numero di elementi di S_a compresi fra 0 e $n-1$, e sia Σ_a la somma degli elementi di S_a. Dimostrare che
$$\Sigma_a = \frac{3n^2 - n}{2} - nN_a.$$
2. Sia Σ_b la somma degli elementi di S_b. Dimostrare che $\Sigma_a = \Sigma_b$.

5 Origami

Potreste aver sentito dire che i tre problemi classici dell'antichità – quadratura del cerchio, trisezione dell'angolo e duplicazione del cubo – sono irresolubili usando solo riga e compasso. Quello che è molto meno noto è che due di questi tre problemi (trisezione dell'angolo e duplicazione del cubo) sono risolubili... con gli origami! Per esempio, supponiamo di avere un cubo di lato 1, e di voler costruire un cubo di volume doppio. Chiaramente il lato di questo nuovo cubo dovrà essere $\sqrt[3]{2}$: quello che vogliamo mostrare è che – usando gli origami – è possibile partire da un segmento di lunghezza 1 (il lato del cubo originale) e costruire un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$. Per semplicità, ci autorizziamo ad utilizzare *anche* una riga, che non sarebbe necessaria, ma semplifica la discussione. Supponiamo allora di partire con un foglio di carta quadrato di lato 1; la costruzione prevede due passi:

1. Come prima cosa dividiamo il foglio in tre strisce orizzontali della medesima altezza (sapete farlo con la riga[1]? Sapete farlo con un origami?).
2. In secondo luogo pieghiamo il foglio in modo da portare l'angolo in basso a sinistra A' a coincidere con un punto sul lato destro *e contemporaneamente* il punto B' a coincidere con un punto sul segmento $C'C$:



A questo punto il lato AD si trova ad essere diviso in due parti, di lunghezze a e b.

1. Dimostrare che $a/b = \sqrt[3]{2}$
2. Trovare una costruzione (con riga e compasso) che, dato un segmento di lunghezza 1 (per esempio il lato $A'D'$) e un segmento parallelo diviso in due parti con rapporto $\sqrt[3]{2}$ (per esempio il lato AD), produca un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$.

6 Il giardino di Minkowski

I primi due esercizi di questa sezione sono il punto di partenza di un'area della matematica nota come *geometria dei numeri*. Sorprendentemente, infatti, si tratta di strumenti sviluppati per studiare questioni aritmetiche! Qui ci limiteremo a darne un'interessante applicazione geometrica, ma garantiamo che questi risultati hanno trovato impieghi davvero imprevisti in varie aree della matematica.

1. ($\star$) Sia M un insieme nel piano (cartesiano) di area maggiore di 1. Dimostrare che M contiene due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tali che $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ siano interi.
2. (Teorema del corpo convesso di Minkowski) Sia M un insieme nel piano che rispetti le seguenti proprietà:
   (a) M è simmetrico rispetto all'origine (ovvero per ogni punto (x, y) che stia in M anche il punto $(-x, -y)$ sta in M);

[1] Se serve, potete immaginare che il quadrato 1×1 sia solo parte di un foglio di carta più grande: non vi preoccupate se la vostra costruzione esce dal foglio.

(b) M è convesso (ovvero, dati due punti m_1, m_2 in M, l'intero segmento che congiunge m_1 con m_2 è contenuto in M);

(c) M ha area strettamente maggiore di 4.

Dimostrare che allora c'è un punto (x, y) del piano, a coordinate intere e diverso da $(0, 0)$, contenuto in M.

Suggerimento. Applicare il punto precedente all'insieme "$\frac{1}{2}M$", ovvero l'insieme $\{(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) : (x, y) \in M\}$ (a parole: l'insieme M, riscalato di un fattore $\frac{1}{2}$ con centro l'origine).

3. Stiamo osservando la piantina di un giardino (essendo matematici, abbiamo disegnato un piano cartesiano sulla cartina). Nell'origine O del piano cartesiano si trova un gazebo. Inoltre, in ogni punto a coordinate intere (tranne l'origine) contenuto nel cerchio di centro O e raggio 50 è piantato un albero, che è semplicemente un cilindro di raggio r (quindi sulla piantina appare come un cerchio di raggio r). Dimostrare che se $r > \frac{1}{50}$ allora una persona seduta nel gazebo vede un albero in qualsiasi direzione guardi (matematicamente: ogni retta per l'origine interseca uno dei cerchi di raggio r che abbiamo tracciato).

Nota. Nella situazione del punto (3), si può verificare che se $r < \frac{1}{\sqrt{2501}} \approx \frac{1}{50.01}$, allora guardando in direzione del punto di coordinate $(50, 1)$ non si vede alcun albero. Il risultato di (3) è quindi estremamente raffinato!

7 Le funzioni binomiali

Molti di voi conosceranno i coefficienti binomiali: dati due interi m, n con $0 \leq m \leq n$, si definisce il *coefficiente binomiale* $\binom{n}{m}$ come il numero di modi di scegliere m oggetti in un insieme di n (o, più formalmente, come il numero di sottoinsiemi di cardinalità m di un insieme con n elementi). Il valore di $\binom{n}{m}$ è $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, dove $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ è il prodotto dei primi n interi positivi (chiamato n *fattoriale*; per convenzione, $0! = 1$). Riscrivendo il coefficiente binomiale come

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

diventa chiaro che, per un valore di m fissato, $\binom{n}{m}$ è un polinomio nella variabile n. Estendiamo allora la definizione di coefficiente binomiale ponendo per definizione, per ogni x numero reale,

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{m!}.$$

Ad esempio, $\dbinom{x}{3} = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}$ e $\dbinom{x}{4} = \dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$; per convenzione si pone $\binom{x}{0} = 1$ per ogni x.

1. Dimostrare che la formula $\dbinom{x+1}{m+1} - \dbinom{x}{m+1} = \dbinom{x}{m}$ vale per ogni intero $m \geq 0$ e ogni numero reale x.

2. Sia $p(n)$ la somma dei quadrati dei primi n interi positivi. Osservando che $p(n+1) - p(n) = (n+1)^2$, trovare una formula per $p(n)$. E se considerassimo la somma dei cubi?

3. ($\star$) Consideriamo un polinomio $q(x)$ a coefficienti reali con la seguente proprietà: per ogni intero n, il valore $q(n)$ è a sua volta intero. Scriviamo $q(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0$, in modo che a_d sia il coefficiente in $q(x)$ del monomio di grado massimo. Dimostrare che $d! \cdot a_d$ è un numero intero.

Indicazione per il punto 3. Si potrebbe considerare la differenza $q(x+1) - q(x)$...

Nota. I polinomi considerati in questo problema, chiamati a volte *funzioni binomiali*, si rivelano molto utili in varie aree della matematica, fondamentalmente in virtù della seguente proprietà (che volendo potreste provare a dimostrare): ogni polinomio che assume valori interi quando calcolato per valori interi della variabile si scrive come combinazione (a coefficienti interi) delle funzioni binomiali.

8 Funzioni simmetriche

Sia (a, b, c) una soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 28 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 108. \end{cases} \tag{1}$$

Consideriamo il polinomio

$$(t-a)(t-b)(t-c) = t^3 + c_1 t^2 + c_2 t + c_3.$$

In quello che segue calcoleremo esattamente i coefficienti c_1, c_2, c_3 senza risolvere esplicitamente il sistema da cui siamo partiti!

1. Verificare che $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$ e dedurre il valore di $ab+bc+ca$.
2. Usando un trucco simile, determinare il valore di abc.
3. Osservare che $c_1 = -(a+b+c), c_2 = ab+bc+ca$ e $c_3 = -abc$ e dedurre i valori dei coefficienti c_1, c_2, c_3.

Supponiamo ora di ordinare le soluzioni a, b, c del sistema (1), che sono numeri reali, in modo che $a > b > c$.

4. $(\star)$ Calcolare $a^2b + b^2c + c^2a$.

Indicazione. Potrà essere utile l'identità algebrica

$$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 = -27p^2 - 4ps^3 + q^2s^2 + 18pqs - 4q^3,$$

dove

$$s = x+y+z, q = xy+yz+zx, p = xyz.$$

Nota. Questo esercizio si può inquadrare nel contesto della teoria delle *funzioni simmetriche*. Date n variabili $x_1, \dots, x_n$, le *funzioni simmetriche elementari* $e_1, \dots, e_n$ sono rispettivamente la somma delle variabili, la somma dei prodotti a due a due, la somma dei prodotti a tre a tre, ..., il prodotto di tutte le variabili. Quindi, ad esempio, per $n = 3$ le funzioni simmetriche elementari sono

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad e_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad e_3 = x_1x_2x_3,$$

corrispondenti alle precedenti s, q, p, mentre per $n = 4$ sono

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \quad e_4 = x_1x_2x_3x_4.$$

In generale, un polinomio si dice *simmetrico* se scambiando in maniera qualsiasi le sue variabili esso rimane immutato: per esempio, per $n = 3$ sono polinomi simmetrici

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 \quad \text{e} \quad x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 + x_1^3x_3^2 + x_1^2x_3^3 + x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^2.$$

Il teorema fondamentale delle funzioni simmetriche assicura che ogni polinomio simmetrico si può esprimere in termini delle funzioni simmetriche elementari! Ovvero, più precisamente: se $p(x_1, \ldots, x_n)$ è un polinomio simmetrico, esiste un polinomio q tale che $p(x_1, \ldots, x_n) = q(e_1, \ldots, e_n)$. Abbiamo visto questo principio in azione nel caso $n = 3$: abbiamo scritto $x^2+y^2+z^2 = e_1^2-2e_2$, e – se avete risolto l'esercizio – avrete anche scoperto come esprimere $x^3+y^3+z^3$ usando le funzioni simmetriche elementari. L'indicazione data qui sopra per il punto (4) non è altro che un caso speciale del teorema fondamentale delle funzioni simmetriche applicato al polinomio (simmetrico) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$. La teoria delle funzioni simmetriche è utile in molte aree della matematica, ed è anche un importante campo di studio in sé!

9 Fibonacci e ricorrenze

In questa sezione ci occupiamo del problema di scrivere una 'formula esplicita' per la successione di Fibonacci. Ricordiamo che questa famosa successione è definita per ricorrenza tramite la regola

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ per } n \geq 1,$$

dove l'ultima formula esprime il fatto che ogni numero di Fibonacci a partire dal terzo è la somma dei due numeri di Fibonacci precedenti. La successione inizia quindi con i termini $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8$, 13, 21, ...

1. Calcolare qualche termine della successione di Fibonacci e trovare (con l'aiuto di una calcolatrice!) i rapporti F_{n+1}/F_n per valori crescenti di n. Cosa si osserva?

   Se avete fatto davvero il punto precedente, potreste stare sospettando che F_{n+1}/F_n sia approssimativamente uguale ad una certa costante λ. Se questo fosse vero *esattamente*, allora l'n-esimo termine della successione di Fibonacci, ovvero il numero che abbiamo chiamato F_n, dovrebbe essere uguale a $c \cdot \lambda^n$ per opportuni valori di c e di λ.

2. Trovare per quali valori di $\lambda \neq 0$ vale

$$c\lambda^{n+1} = c\lambda^n + c\lambda^{n-1}$$

   per ogni $n \geq 1$ (si noti che il valore di c è irrilevante per la validità dell'equazione precedente, purché $c \neq 0$, perché si può raccogliere e semplificare da tutti i termini; si osservi anche che tale equazione corrisponderebbe a $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, se effettivamente si avesse $F_n = c\lambda^n$).

3. Siano λ_1, λ_2 i valori trovati ai punto precedente. Siano c_1, c_2 numeri reali qualunque e sia $G_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$. Si dimostri che la successione G_n soddisfa l'equazione

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$$

   per ogni $n \geq 1$.

4. Scegliendo opportunamente i valori di c_1, c_2 come al punto precedente, trovare una formula esplicita per F_n.

5. Questa formula spiega l'osservazione fatta al punto 1?

Nota. Con tecniche molto simili a quella suggerita sopra è possibile trovare 'formule esplicite' per qualsiasi *successione per ricorrenza lineare*, ovvero una successione a_n, indicizzata da $n = 0, 1, 2, \ldots$, di cui si conoscano i termini $a_0, \ldots, a_r$ e che sia poi determinata ricorsivamente da una regola del tipo

$$a_{n+r+1} = c_r a_{n+r} + c_{r-1} a_{n+r-1} + c_{r-2} a_{n+r-2} + \cdots + c_0 a_n,$$

dove $c_0, \ldots, c_r$ sono coefficienti fissati (nel caso dei numeri di Fibonacci si ha $r = 1$ e $c_0 = c_1 = 1$). Questo problema ha connessioni inaspettate con diverse aree della matematica, pura e applicata: calcolo di potenze di matrici, risoluzione di equazioni differenziali, modellizzazione di fenomeni epidemici...

10 Polinomi e quadrati

È ben noto che il quadrato di un numero reale è sempre non-negativo, e quindi lo stesso vale per una somma di quadrati di numeri reali. Supponiamo di avere un polinomio $p(x)$ con la proprietà che $p(x) \geq 0$ per ogni numero reale x: ci potremmo chiedere se per caso il *polinomio* $p(x)$ stesso si scriva come somma di quadrati, in quanto questo certamente garantirebbe che $p(x) \geq 0$ per ogni x! In questo esercizio dimostreremo che questa affermazione è vera, ma una sua generalizzazione 'ingenua' al caso di polinomi in *due* variabili non vale.

Prima di cominciare, ricordiamo che ogni polinomio a coefficienti reali si scrive come prodotto di polinomi di grado 1, cioè della forma $ax+b$, e polinomi di grado 2 senza radici reali, cioè polinomi della forma $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$ (la quantità $b^2 - 4ac$ è chiamata il *discriminante* del polinomio di secondo grado).

1. Verificare l'identità algebrica $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AD + BC)^2 + (AC - BD)^2$.
2. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali tale che $p(x) \geq 0$ per ogni x reale. Raccogliendo il coefficiente di grado più alto, scriviamolo come prodotto $p(x) = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)(x^2 - b_1x + c_1)\cdots(x^2 - b_mx + c_m)$, dove ognuno dei polinomi di secondo grado ha discriminante negativo. Dimostrare che ogni radice α_i compare un numero pari di volte.
3. Dedurre che esistono polinomi a coefficienti reali $q_1(x), q_2(x)$ tali che $p(x) = q_1(x)^2 + q_2(x)^2$.

Consideriamo ora la situazione per polinomi in due variabili. Sia

$$p(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2.$$

Questo polinomio è stato trovato dal matematico Motzkin: vedremo che $p(x, y)$ è non-negativo per ogni scelta di reali x, y, e tuttavia $p(x, y)$ non è somma di (due o più) quadrati di polinomi.

4. Verificare che

$$p(x,y) = \left(\frac{x^2y(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{xy^2(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{xy(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 \quad (2)$$

   e dedurre che $p(x, y) \geq 0$ per ogni coppia di reali x, y. Vedete un modo più diretto di ottenere lo stesso risultato?

5. Supponiamo che $p(x, y)$ si possa rappresentare come somma di quadrati di certi polinomi $q_i(x, y)$, cioè che si abbia

$$p(x, y) = q_1(x, y)^2 + \cdots + q_n(x, y)^2.$$

   Scriviamo $q_i(x, y)$ nella forma

$$\begin{gathered} A_ix^3 + B_ix^2y + C_ixy^2 + D_iy^3 \\ +E_ix^2 + F_ixy + G_iy^2 \\ +H_ix + I_iy \\ +J_i. \end{gathered}$$

   Dimostrare dapprima che $A_i = 0$ per ogni i, e successivamente che $E_i = H_i = D_i = G_i = I_i = 0$ per ogni i.

6. Dedurre che $p(x, y)$ non è somma di quadrati di polinomi.

Questo problema esplora un caso particolare di risultati di Hilbert e Artin, relativi al cosiddetto *diciassettesimo problema di Hilbert*: un polinomio in più variabili assume solo valori non-negativi se e solo se si può scrivere come somma di quadrati di *funzioni razionali*, cioè rapporti di polinomi, come fatto nella formula (2). Questo teorema è stato congetturato da Hilbert, che ha ottenuto risultati parziali in merito, e dimostrato in generale da Artin.

L'esempio qui sopra, d'altra parte, mostra che non è detto che un polinomio che assume solo valori non-negativi si riesca a scrivere come somma di quadrati di *polinomi*!

11 Le potenze di 2 sanno il tuo numero di telefono

Vogliamo dimostrare il seguente risultato, da cui otterremo poi una sorprendente conseguenza.

Teorema 1. *Sia α un numero irrazionale positivo. I numeri della forma $m - n\alpha$, con m, n interi* ***positivi****, sono densi in $\mathbb{R}$, ovvero per ogni numero reale x e ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un numero della forma $m - n\alpha$ che disti meno di ε da x.*

Denotiamo con $\{x\}$ la parte frazionaria del numero reale x (ovvero $\{x\} = x - [x]$, dove $[x]$ è il più grande intero minore o uguale ad x; ad esempio, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1 = 0.4142...$).

1. ($\star$) Dimostrare che esistono infiniti numeri razionali $\frac{p}{q}$ tali che
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$
Indicazione. Può essere utile considerare la parte frazionaria dei numeri $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$, dove n è un intero positivo fissato arbitrariamente.
Nota. Questo risultato si chiama a volte *teorema di approssimazione di Dirichlet* [1].

2. Fare vedere che il seguente risultato implica il Teorema 1:
Teorema 2. *Sia α un numero irrazionale positivo. I numeri della forma $m - n\alpha$, con m, n interi* ***di segno qualsiasi****, sono densi in $\mathbb{R}$, ovvero per ogni numero reale x e ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un numero della forma $m - n\alpha$ che disti meno di ε da x.*

3. Dimostrare che è sufficiente far vedere che, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni numero reale $y \in (0, 1)$, esiste un intero positivo n tale che $|y - \{n\alpha\}| < \varepsilon$.

4. Concludere la dimostrazione del Teorema 2.

5. Dimostrare che il logaritmo in base 10 di 2 è un numero irrazionale.

6. Fissiamo una qualsiasi sequenza finita di cifre (ad esempio, 2023). Dimostrare che esiste una potenza di 2, ovvero un numero della forma 2^n, le cui prime cifre siano proprio quelle assegnate.
Indicazione. Prendendo l'esempio di 2023, si osservi che la condizione voluta è equivalente a
$$2023 \cdot 10^m \leq 2^n < 2024 \cdot 10^m$$
per qualche coppia di interi $n \geq 1, m \geq 0$. Passando ai logaritmi in base 10...

Nota. Il Teorema 1 è una versione debole del cosiddetto *teorema di equidistribuzione* [2]. Questo risultato è una delle basi della teoria dell'*appros-simazione diofantea*, ovvero dello studio di come approssimare arbitrari numeri reali con numeri di forme particolari (ad esempio, numeri razionali, come nel caso del teorema di Dirichlet).

Curiosità. La più piccola potenza di 2 che inizia con le cifre 2023 è $2^{10103} = 2023234...$. Questo è un numero con 3042 cifre!

Riferimenti bibliografici

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet's_approximation_theorem

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Equidistribution_theorem

3 Soluzioni – Divertissement

1 Il campionato di biliardino

Ogni partita che qualcuno ha vinto è anche una partita che qualcuno ha perso. Sia n il numero di squadre del torneo: per ipotesi, il numero totale di partite vinte è almeno $5n$. Quindi anche il numero di partite perse è almeno $5n$, e quindi ogni squadra *in media* ha perso almeno 5 partite. Dal momento che il massimo di un insieme di numeri è maggiore o uguale alla media di quello stesso insieme, la squadra che ha perso il maggior numero di partite ne ha perse almeno 5.

2 I quadrati sono meglio

Chiaramente è sufficiente dimostrare che

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca.$$

D'altro canto, siccome sappiamo che i quadrati dei numeri reali sono positivi, si ha $(a-b)^2 \geq 0$, ovvero $a^2+b^2-2ab \geq 0$, da cui $a^2+b^2 \geq 2ab$. Similmente si ha anche $b^2+c^2 \geq 2bc$ e $c^2+a^2 \geq 2ac$. Sommando queste tre disuguaglianze si ottiene in effetti $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$ come voluto.

3 La cifra 1 basta e avanza!

Elenchiamo tutti i numeri $1, 11, 111, 1111, 11111, \cdots$ e per ognuno facciamo la divisione con resto per n. Siccome il resto della divisione per n è un numero intero compreso fra 0 e $n-1$, prima o poi troveremo due resti uguali fra loro. Diciamo che il numero formato da i cifre 1 e il numero formato da j cifre 1 lascino lo stesso resto r nella divisione per n, e siano q_i, q_j i rispettivi quozienti:

$$\underbrace{1\cdots1}_{i} = nq_i + r, \quad \underbrace{1\cdots1}_{j} = nq_j + r$$

Facciamo la differenza di queste due espressioni, supponendo tanto per fissare le idee che $j > i$:

$$\underbrace{1\cdots1}_{j} - \underbrace{1\cdots1}_{i} = (nq_j + r) - (nq_i + r) = n(q_j - q_i).$$

Abbiamo così trovato un multiplo di n, formato solo da cifre 0 e 1: in effetti, $\underbrace{1\cdots1}_{j} - \underbrace{1\cdots1}_{i}$ è il numero formato da $j-i$ cifre 1 seguite da i cifre 0. Riscriviamo ancora una volta l'uguaglianza che abbiamo ottenuto:

$$\underbrace{1\cdots1}_{j-i} \cdot 10^i = n(q_j - q_i).$$

Vorremmo dire che $\underbrace{1\cdots1}_{j-i}$ è multiplo di n. Osserviamo ora che se n divide $2k$ (con n dispari) allora n divide k: dato che n è dispari, il fattore 2 non gioca alcun ruolo nella divisibilità (è sufficiente pensare alla fattorizzazione – unica! – come prodotto di numeri primi). Per lo stesso motivo, se n divide $5k$, allora n divide k: in effetti l'ipotesi che la scrittura decimale di n non termini con 5 (né con 0, visto che è dispari) assicura che n non è divisibile per 5. Applicando questo ragionamento i volte, scopriamo che siccome n divide $2^i 5^i \cdot \underbrace{1\cdots1}_{j-i}$, allora n divide anche $\underbrace{1\cdots1}_{j-i}$, che è quello che volevamo.

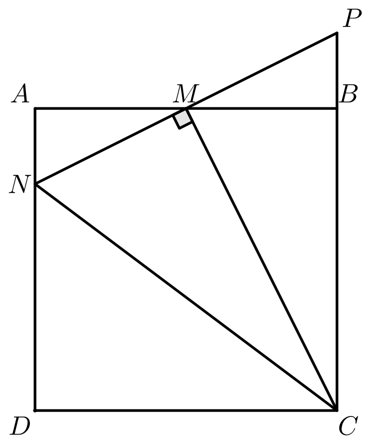
Commento. Esistono sicuramente molte altre soluzioni di questo problema; una passa dall'osservazione che il numero che (in rappresentazione decimale) è costituito da i cifre 1 si può scrivere in modo compatto come $\frac{10^i-1}{9}$. Si tratta allora di mostrare che si può scegliere i in modo tale che n divida $\frac{10^i-1}{9}$. È in effetti possibile dimostrare che se si considera la successione

$10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2, 10^3, \cdots$ e si fa la divisione con resto per $9n$ di ognuno dei suoi termini la successione dei resti risulta periodica (provare per credere!). Ma allora, siccome $10^0 - 1 = 0$ è divisibile per $9n$, c'è anche un altro termine della successione $10^i - 1$ che è divisibile per $9n$, e questo prova quanto voluto.

4 Un'uguaglianza di angoli

Proponiamo due soluzioni, una più rapida (che richiede tuttavia la costruzione di un punto aggiuntivo) e una più lunga ma più diretta.

Prima soluzione.



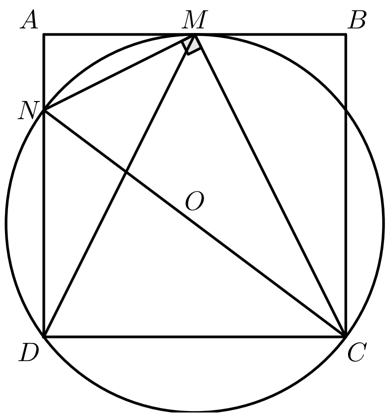
Si prolunghino il lato CB dalla parte di B ed il segmento NM dalla parte di M, e sia P la loro intersezione.
Gli angoli $\widehat{NMA}$ e $\widehat{PMB}$ sono opposti al vertice, gli angoli $\widehat{MAN}$ e $\widehat{MBP}$ sono entrambi retti e i segmenti AM e MB sono uguali per costruzione, quindi i triangoli MAN e PMB sono congruenti. I segmenti NM e MP sono allora congruenti e CM è sia altezza che mediana del triangolo PNC, che è quindi isoscele; pertanto CM è anche bisettrice, cioè $\widehat{NCM} = \widehat{MCP} = \widehat{MCB}$.

Seconda soluzione. Per semplicità scriviamo γ per la misura dell'angolo $\widehat{BCM}$. Dal momento che l'angolo in B è retto e la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, si ha $\widehat{CMB} = 90° - \gamma$. D'altro canto si ha anche

$$\widehat{NMA} + \widehat{NMC} + \widehat{CMB} = 180°$$

perché questi tre angoli insieme formano un angolo piatto, e per ipotesi $\widehat{NMC} = 90°$. Ne segue $\widehat{NMA} = 90° - \widehat{CMB} = 90° - (90° - \gamma) = \gamma$. Ne segue che i triangoli MAN e CBM sono simili, perché hanno due angoli uguali (e quindi, per differenza, anche il terzo angolo deve essere uguale). Osserviamo in particolare che $\widehat{MNA} = 90° - \gamma$.

Osserviamo che il quadrilatero $MNDC$ può essere inscritto in una circonferenza: in effetti, esso è formato da due triangoli rettangoli (MCN e CDN) con l'ipotenusa in comune: basta allora ricordare che la circonferenza circoscritta ad un triangolo rettangolo è la circonferenza che ha per diametro l'ipotenusa.



Osserviamo allora che gli angoli $\widehat{CNM}$ e $\widehat{CDM}$ insistono entrambi sull'arco CM, e quindi sono uguali. D'altro canto, $\widehat{CDM} = \widehat{MCD}$ in quanto il triangolo CMD è isoscele (M è il punto medio di AB). Complessivamente abbiamo ottenuto

$$\begin{aligned} 90^\circ - \gamma &= \widehat{MCD} = \widehat{CDM} \\ &= \widehat{CNM} = \widehat{CNA} - \widehat{MNA} \\ &= (180^\circ - \widehat{DNC}) - (90^\circ - \gamma) \\ &= \gamma + (90^\circ - \widehat{DNC}), \end{aligned}$$

ovvero

$$\widehat{DNC} = 2\gamma.$$

Osserviamo infine che $\widehat{DNC} = \widehat{BCN}$ in quanto angoli alterni per le parallele AD, BC tagliate dalla trasversale NC. Si ha quindi $\widehat{BCN} = 2\gamma$, ma d'altro canto $\widehat{BCN} = \widehat{BCM} + \widehat{MCN} = \gamma + \widehat{MCN}$, quindi $2\gamma = \gamma + \widehat{MCN} \Rightarrow \gamma = \widehat{MCN}$, che è quello che volevamo dimostrare.

5 Cammini nel piano

Immaginiamo di trascrivere su un foglio le mosse della formica: ogni volta che essa si muove verso destra scriviamo una D, e ogni volta che si muove verso l'alto scriviamo una A. Alla fine degli $a + d$ secondi avremo quindi scritto a lettere A e d lettere D, ovvero avremo un anagramma della stringa di lettere $\underbrace{A \cdots A}_{a \text{ volte}}\underbrace{D \cdots D}_{d \text{ volte}}$. Viceversa, ogni anagramma di questa stringa di lettere fornisce un set di istruzioni per la formica che la porta in effetti nel punto di coordinate (d, a). Si tratta quindi di contare gli anagrammi di $\underbrace{A \cdots A}_{a \text{ volte}}\underbrace{D \cdots D}_{d \text{ volte}}$.

Un modo di procedere è ora il seguente. Supponiamo di avere di fronte a noi una serie di $a + d$ caselle vuote:

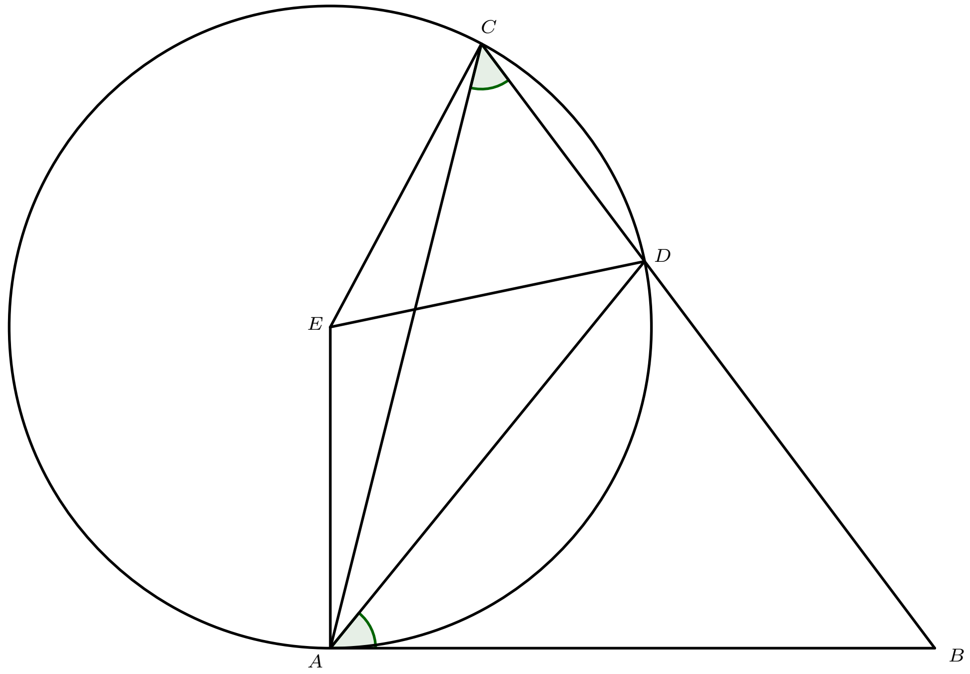
Vogliamo riempirle con a lettere A e d lettere D: naturalmente è sufficiente scegliere le a caselle dove scrivere una A, perché le caselle in cui scrivere D saranno allora automaticamente determinate. Ne segue che il numero di anagrammi è uguale al numero di scelte di a caselle fra $a + d$, ovvero il numero di anagrammi (e quindi anche il numero di percorsi) è

$$\binom{a+d}{a} = \binom{a+d}{d} = \frac{(a+d)!}{a!d!}$$

6 Monete alla cieca

Alessandra sceglie 80 monete e le capovolge tutte; come due gruppi, sceglie queste 80 monete e le rimanenti 20. Questa strategia funziona perché se le 80 monete mostravano originariamente k teste e $80-k$ croci, ora mostrano k croci e $80-k$ teste. D'altro canto, inizialmente c'erano 80 teste in tutto, di cui k nel gruppo scelto da Alessandra e $80-k$ nell'altro: alla fine, quindi, entrambi i gruppi contengono lo stesso numero di teste, ovvero $80-k$.

7 Un po' di geometria



Il punto E è il centro della circonferenza circoscritta ad ADC, quindi $\widehat{DEC} = 2\widehat{DAC}$, in quanto angoli al centro e alla circonferenza che insistono sul medesimo arco. Osserviamo poi che il triangolo CED è isoscele: si ha quindi

$$\widehat{CDE} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{DEC}\right) = 90^\circ - \widehat{DAC}.$$

Infine, i triangoli BAD e BCA sono simili, dato che hanno un angolo congruente e uno in comune: si ha in particolare $\widehat{ADB} = \widehat{BAC}$, da cui ricaviamo

$$\begin{aligned}\widehat{EDA} = \widehat{CDA} - \widehat{CDE} &= \widehat{CDA} - 90^\circ + \widehat{DAC}\\ &= 180^\circ - \widehat{ADB} - 90^\circ + \widehat{DAC}\\ &= 180^\circ - \widehat{BAC} - 90^\circ + \widehat{DAC}\\ &= 90^\circ - \widehat{BAD}.\end{aligned}$$

Dal fatto che DEA è isoscele otteniamo la tesi: infatti $\widehat{BAE} = \widehat{DAE} + \widehat{BAD} = \widehat{EDA} + \widehat{BAD} = 90° - \widehat{BAD} + \widehat{BAD} = 90°$.

8 Una curiosa coincidenza

Dopo aver calcolato $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2$ e $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 = 841 = 29^2$ qualche sospetto viene! Si può allora congetturare che $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ sia sempre un quadrato perfetto. Una buona domanda è: il quadrato *di quale numero*? Certamente $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ è più grande di $n^4 = (n^2)^2$ (ma non di moltissimo), quindi – se è un quadrato – dovrà essere il quadrato di $n^2 +$ qualcosa di piccolo: cerchiamo allora di capire se riusciamo a trovare un'uguaglianza del tipo

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+an+b)^2.$$

Vorremmo determinare a e b minimizzando i nostri calcoli. Per esempio: se la nostra uguaglianza deve funzionare per ogni n, dovrà in particolare funzionare quando $n = 0$, da cui otteniamo $1 = b^2$, ovvero $b = \pm 1$. Allo stesso modo, per $n = 1$ otteniamo $25 = (a+b+1)^2$; inoltre sappiamo che $n^2 + an + b$ dev'essere un po' più grande, e non un po' più piccolo, di n^2, per cui a dovrà essere positivo, e probabilmente $a+b+1$ dovrà essere uguale a 5 (e non -5). Provando allora con $b = 1$ otteniamo $a = 3$: la nostra congettura diventa

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2,$$

ed è ora facile verificare che in effetti queste due espressioni sono uguali (entrambe sono uguali a $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$). Quindi in effetti il prodotto di quattro interi consecutivi incrementato di 1 è sempre un quadrato perfetto!

Se ora per un qualche valore di n il numero $n(n+1)(n+2)(n+3)$ fosse un quadrato perfetto, diciamo x^2, allora avremmo che $n(n+1)(n+2)(n+3) = x^2$ e $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = y^2$, dove $y = n^2 + 3n + 1$. Indipendentemente dallo specifico valore di y, avremmo trovato due quadrati perfetti consecutivi: $y^2 = x^2 + 1$. Ma allora avremmo $y^2 - x^2 = 1$, ovvero $(y-x)(y+x) = 1$: l'unica possibilità è allora $y - x = y + x = 1$, ovvero $y = 1, x = 0$, ma questo contraddice il fatto che n sia un intero positivo.

9 Divisibilità

Iniziamo osservando che due numeri interi consecutivi, n ed $n+1$, non possono avere divisori in comune: infatti, se un intero positivo d dividesse sia n che $n+1$, allora dividerebbe la loro differenza, che però è 1, e quindi si dovrebbe avere $d = 1$. La prima domanda del problema è ora immediata: se si prendono $n+1$ interi compresi fra 1 e $2n$ se ne sono necessariamente scelti due consecutivi, che in particolare – per quanto appena detto – non hanno divisori in comune.

Per la seconda domanda, scriviamo ogni intero fra 1 e $2n$ nella forma $d \cdot 2^r$, dove d è un intero dispari. Organizziamo poi questi numeri in una tabella, dividendoli in colonne a seconda del valore di d: per esempio, per $n = 12$ la tabella è come segue.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$1 = 1 \cdot 2^0$	$3 = 3 \cdot 2^0$	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$2 = 1 \cdot 2^1$	$6 = 3 \cdot 2^1$	10	14	18	22						
$4 = 1 \cdot 2^2$	$12 = 3 \cdot 2^2$	20									
$8 = 1 \cdot 2^3$	$24 = 3 \cdot 2^3$										
$16 = 1 \cdot 2^4$											

Ora, quante colonne ha la tabella? Esattamente n: i possibili valori di d sono tutti e soli i numeri dispari fra 1 e $2n$, che sono n. Quindi quando scegliamo $n+1$ numeri fra 1 e $2n$ ne stiamo necessariamente prendendo due dalla stessa colonna! Ma questi saranno uno della forma $d \cdot 2^{r_1}$ e l'altro della forma $d \cdot 2^{r_2}$, diciamo con $r_1 < r_2$: si ha allora

$$\frac{d \cdot 2^{r_2}}{d \cdot 2^{r_1}} = 2^{r_2 - r_1},$$

che è un numero intero: come voluto, uno di questi due numeri divide l'altro!

10 Ci sarà un primo?

Certamente $n + 2$ è divisibile per 2, perché somma di due numeri pari ($n = 2019! = 2 \times 3 \times \cdots$ è divisibile per 2). Similmente $n + 3$ è divisibile per 3, perché sia $n = 3 \times (2 \times 4 \times 5 \times \cdots)$ che 3 sono multipli di 3. In generale, se $i \leq 2019$ il numero $n + i$ è multiplo di i, perché n è multiplo di i. Ne segue che nessuno dei numeri $n + 2, n + 3, \ldots, n + 2019$ è primo, perché $n + i$ è certamente più grande di i, e quindi non è primo perché ha il divisore non banale i.

Sia n il numero dato dalla sequenza di cifre fissata. Ovviamente il primo tentativo è quello di considerare $\sqrt{n}$, che però di solito non sarà un intero; possiamo allora considerare $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, la parte intera di $\sqrt{n}$, e sperare che le prime cifre di m^2 siano proprio le cifre di n. Ovviamente questo in generale non succede, e intuitivamente il motivo è che nell'approssimare $\sqrt{n}$ con $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ facciamo un errore percentuale probabilmente abbastanza grosso. Un'idea per diminuire l'errore percentuale è questa: moltiplichiamo n per 10^{2k} con k molto grande.

11 Pianificazione stradale

Se A e B sono collegate direttamente non c'è niente da dimostrare, quindi supponiamo che non sia così. Diciamo che una città è *lontana* da un'altra se non c'è una strada che le collega direttamente.

Chiamiamo S l'insieme delle 2018 città che non sono né A né B. Per ipotesi, al massimo 2020-1-1010=1009 città sono lontane da A (il -1 è dovuto ad A stessa), e una di queste è B, dunque fra le 2018 città in S al massimo 1008 sono lontane da A. Simmetricamente, al massimo 1008 sono lontane da B, e quindi in totale al massimo 2016 città sono lontane o da A, o da B. Ne segue che ci sono almeno $2 = 2018 - 2016$ città che non sono lontane né da A, né da B, ovvero che sono collegate direttamente ad entrambe: possiamo prendere come C una qualunque di queste città.

12 Una sequenza esplosiva

L'osservazione cruciale (e per niente banale) è la seguente: se un numero si scrive nella forma $x = \frac{A+1/A}{2}$, allora

$$2x^2 - 1 = \left(\frac{A + 1/A}{2}\right)^2 - 1 = \frac{A^2 + 1/A^2 + 2}{2} - 1 = \frac{A^2 + 1/A^2}{2}.$$

Quindi se riusciamo a scrivere a_0 nella forma $\dfrac{A + 1/A}{2}$ avremo $a_1 = \dfrac{A^2 + 1/A^2}{2}$, poi $a_2 = \dfrac{A^4 + 1/A^4}{2}$, e così via fino a $a_n = \dfrac{A^{2^n} + 1/A^{2^n}}{2}$. Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$3 = a_0 = \frac{A + 1/A}{2}$$

nell'incognita A; moltiplicando tutto per $2A$, questa diventa $6A = A^2 + 1$, che ha come soluzioni $A_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Osserviamo che le due soluzioni A_1 e A_2 sono l'una l'inversa dell'altra, quindi $A_1 + 1/A_1 = 1/A_2 + A_2$, e possiamo scegliere indifferentemente A_1 o A_2. In conclusione otteniamo

$$a_n = \frac{A_1^{2^n} + 1/A_1^{2^n}}{2} = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{2^n} + (3 - 2\sqrt{2})^{2^n}}{2}.$$

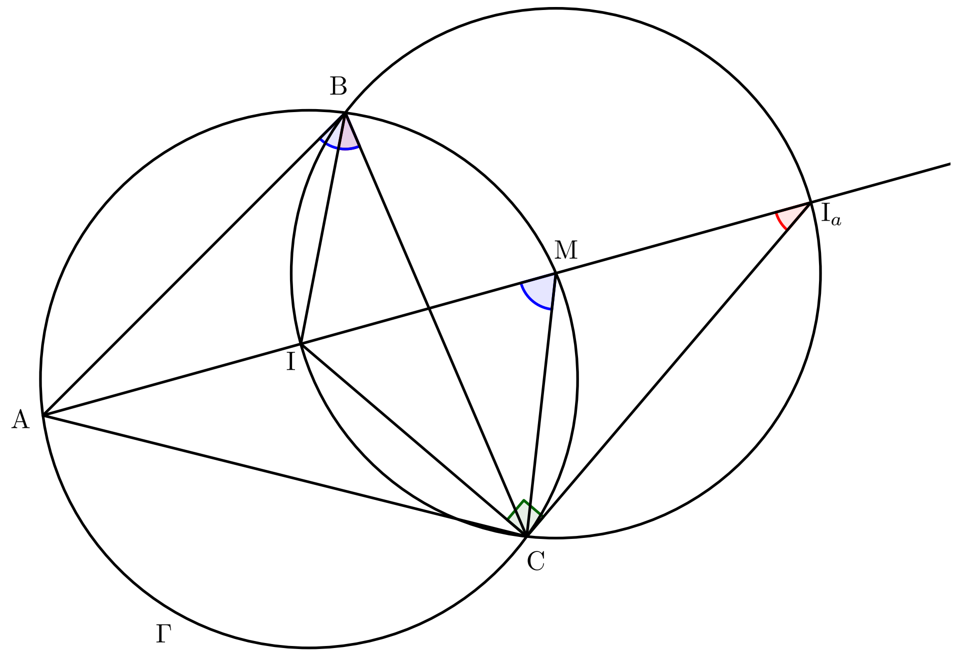
Nota. Si osservi che $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.171573...$ è un numero minore di 1, quindi le sue potenze tendono molto velocemente a 0. Ne segue che il numero intero $2a_n$ è estremamente vicino a

$(3+2\sqrt{2})^{2^n}$, che quindi (nonostante sia un numero irrazionale) deve essere estremamente vicino ad un numero intero. In effetti si ha per esempio $(3+2\sqrt{2})^8 = 1331713.999999248...$, e

$$(3+2\sqrt{2})^{16} = 1773462177793.99999999999943613119...,$$

in cui le prime *dodici* cifre dopo la virgola sono 9.

13 Excentri



Osserviamo innanzitutto che A, I, M e I_a sono allineati: da un lato M è punto medio dell'arco BC, e quindi fa parte della bisettrice di $B\widehat{A}C$, a cui appartiene anche I; dall'altro, I_a appartiene alle bisettrici degli angoli supplementari di $A\widehat{C}B$ e $A\widehat{B}C$, quindi è equidistante dai prolungamenti di AB e AC, e dunque fa parte della bisettrice di $B\widehat{A}C$. Notiamo ora che $I\widehat{C}I_a$ è retto, perché somma di angoli che sono la metà di angoli supplementari (metà di $B\widehat{C}A$ più metà dell'angolo esterno corrispondente), così come $I\widehat{B}I_a$. Ne segue che il quadrilatero $BICI_a$ è inscrivibile in una circonferenza con diametro II_a. Allora $I\widehat{I_a}C = I\widehat{B}C = \frac{1}{2}A\widehat{B}C$. Inoltre $A\widehat{M}C = I\widehat{M}C = A\widehat{B}C$, perché $A\widehat{M}C$ e $A\widehat{B}C$ insistono entrambi sulla corda AC di Γ. Abbiamo allora ottenuto che M sta su II_a (diametro della circonferenza circoscritta a $BICI_a$) e che $I\widehat{M}C = 2I\widehat{I_a}C$: ne segue che M è il centro della circonferenza circoscritta a $BICI_a$, e quindi il punto medio del diametro II_a.

14 Vladimir e Arnold

Sia t il tempo (misurato in ore) fra il sorgere del sole e mezzogiorno, e siano v_V e v_A le velocità di Vladimir e Arnold rispettivamente (misurate in unità di lunghezza all'ora). Sia inoltre C il punto lungo la strada in cui si incontrano. Sappiamo allora che in un tempo t Vladimir ha percorso il tragitto da A a C, dunque $AC = v_V \cdot t$, mentre Arnold ha percorso il tragitto da B a C, per cui $BC = v_A \cdot t$. D'altro canto, Vladimir impiega 4 ore per arrivare da C a B, dunque $BC = 4v_V$, mentre Arnold ne impiega 9 per arrivare da C ad A, quindi $AC = 9v_A$. Consideriamo ora tutte le equazioni che abbiamo ottenuto:

$$\begin{cases} AC = v_V \cdot t = 9v_A \\ BC = v_A \cdot t = 4v_V \end{cases}$$

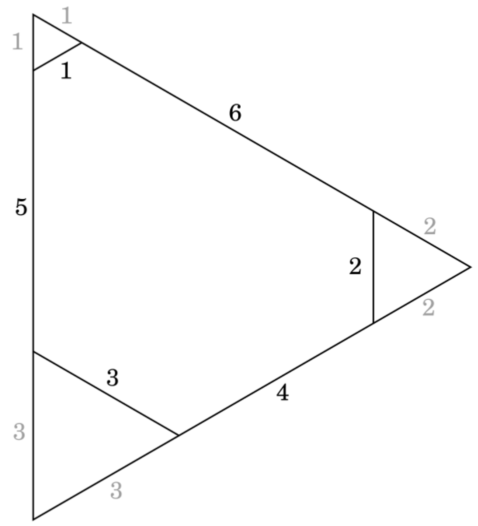
Moltiplicando queste due equazioni termine a termine otteniamo

$$AC \cdot BC = v_V \cdot v_A \cdot t^2 = 36 v_A v_V,$$

da cui evidentemente $t^2 = 36$ e $t = 6$. Quando si incontrano a mezzogiorno, Vladimir e Arnold stanno camminando da 6 ore: il sole è quindi sorto alle 6 di mattina.

15 Un esagono speciale

Senza parole:



16 16 cifre e un quadrato

Se una delle cifre è 0 è sufficiente prendere quella cifra (in effetti 0 è un quadrato perfetto), quindi possiamo supporre che nessuna delle cifre sia nulla. In tal caso, dette $c_1, c_2, \ldots, c_{16}$ le prime 16 cifre del numero, abbiamo in particolare a disposizione i 16 numeri $n_1 = c_1$, $n_2 = c_1c_2$, $n_3 = c_1c_2c_3$, e così via fino a $n_{16} = c_1c_2 \cdots c_{16}$. Ognuno di questi numeri (interi positivi) avrà una fattorizzazione in primi, ma siccome ogni cifra è un numero ≤ 9 gli unici primi che possono effettivamente intervenire nella fattorizzazione sono 2, 3, 5 e 7. Inoltre, un numero è un quadrato perfetto se e soltanto se nella sua fattorizzazione in primi ognuno degli esponenti è pari. Scriviamo allora $n_i = 2^{w_i}3^{x_i}5^{y_i}7^{z_i}$, e ad ognuno dei 16 n_i associamo l'informazione (w_i, x_i, y_i, z_i). Adesso, l'unica cosa che davvero ci interessa è la parità di questi esponenti, e possiamo quindi osservare che ci sono esattamente 16 possibili combinazioni di parità degli esponenti (scrivendo "P" e "D" per "Pari" e "Dispari" rispettivamente, la quaterna di esponenti può essere ad esempio (P, P, D, P), come per il numero $79380 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2$, o (D, D, D, P), come per il numero $30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0$). Possiamo allora considerare due casi:

1. Le 16 combinazioni di parità degli esponenti sono tutte diverse: allora, visto che ci sono 16 combinazioni possibili in tutto, una di esse deve essere (P, P, P, P), e abbiamo trovato il quadrato perfetto che volevamo;

2. Due delle 16 combinazioni sono uguali, diciamo quelle che corrispondono a n_i e ad n_j (con $i < j$). Si può allora notare che n_j/n_i è numero intero (è semplicemente il prodotto delle cifre in posizione $i+1, \ldots, j$), e che gli esponenti nella sua fattorizzazione sono tutti pari: in

effetti, scrivendo di nuovo $n_i = 2^{w_i}3^{x_i}5^{y_i}7^{z_i}$ e $n_j = 2^{w_j}3^{x_j}5^{y_j}7^{z_j}$, il rapporto n_j/n_i si scrive $2^{w_j-w_i}3^{x_j-x_i}5^{y_j-y_i}7^{z_j-z_i}$, e tutti gli esponenti sono pari in quanto differenza di due numeri con la stessa parità. D'altro canto, come già osservato n_j/n_i è il prodotto di un certo numero di cifre consecutive all'interno del nostro numero originale, e quindi una possibile soluzione al problema.

Esempio. Consideriamo il numero 3765273552834195. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
n_1 &= 3 = 2^0 3^1 5^0 7^0 \to (P, D, P, P)\\
n_2 &= 3 \cdot 7 = 2^0 3^1 5^0 7^1 \to (P, D, P, D)\\
n_3 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 = 2^1 3^2 5^0 7^1 \to (D, P, P, D)\\
n_4 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 2^1 3^2 5^1 7^1 \to (D, P, D, D)\\
n_5 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 2^2 3^2 5^1 7^1 \to (P, P, D, D)\\
n_6 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 3^2 5^1 7^2 \to (P, P, D, P)\\
n_7 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 2^2 3^3 5^1 7^2 \to (P, D, D, P)\\
n_8 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 3^3 5^2 7^2 \to (P, D, P, P)
\end{aligned}$$

Ci possiamo fermare qui: in effetti la combinazione (P, D, P, P) si è già ripetuta, in corrispondenza di n_8 ed n_1. Basta quindi considerare $n_8/n_1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5$ per trovare un quadrato perfetto, e in effetti $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 44100 = 210^2$.

17 Se 100 cerchi non bastano, prova con 400

Consideriamo un punto qualsiasi del tavolo: affermiamo che esso si trova a distanza ≤ 2 dal centro di uno dei 100 cerchi già disegnati. In effetti, detto P il punto che stiamo considerando, se la sua distanza dai centri di tutti i cerchi già presenti fosse almeno 2, allora potremmo disegnare un cerchio di raggio 1 centrato in P, e questo non intersecherebbe alcuno dei cerchi già disegnati (se due cerchi di raggio 1 si intersecano, allora i loro centri sono a distanza al massimo 2). Quanto appena dimostrato si riformula esattamente dicendo che i 100 cerchi di raggio 2 concentrici con quelli già dati coprono tutto il rettangolo, che era quanto volevamo dimostrare.

Per la seconda domanda consideriamo invece 4 copie del rettangolo originale, disposte come in figura:

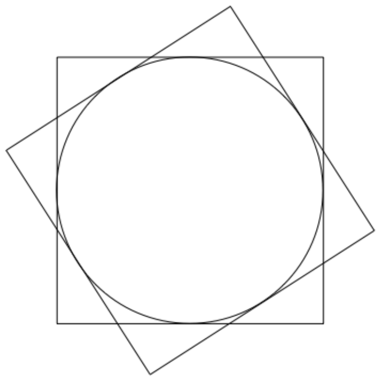
Se i lati di R erano a e b otteniamo quindi un rettangolo di lati $2a$ e $2b$, che chiamiamo $2R$. Ognuna delle 4 copie di R si copre con 100 cerchi di raggio 2 per quanto abbiamo appena dimostrato, quindi $2R$ si copre con 400 cerchi di raggio 2. Riscalando l'intera figura di un fattore $\frac{1}{2}$, il rettangolo $2R$ diventa precisamente un rettangolo di lati a e b, dunque un rettangolo congruente a quello di partenza, mentre i 400 cerchi di raggio 2 (che coprivano $2R$) diventano 400 cerchi di raggio 1 che coprono un rettangolo di dimensioni $a \times b$, come voluto.

18 Dadi

La probabilità è $\frac{1}{2}$. In effetti, immaginiamo di cominciare lanciando i primi 99 dadi e sommare i risultati. Se otteniamo un numero pari, allora la somma di tutti e 100 i risultati dei dadi sarà pari se e solo se all'ultimo lancio otteniamo un numero pari (probabilità $3/6 = 1/2$). D'altro canto, se la somma dei primi 99 è dispari, allora la somma di tutti e 100 i risultati sarà pari se e solo se l'ultimo dado dà un risultato dispari (probabilità $3/6 = 1/2$). Quindi in entrambi i casi abbiamo probabilità $\frac{1}{2}$ di ottenere una somma pari, e quindi la probabilità complessiva di ottenere una somma pari è anch'essa $\frac{1}{2}$.

19 Due quadrati

Osserviamo che i due quadrati si possono ottenere l'uno dall'altro tramite una (opportuna) rotazione intorno al loro comune centro P. Consideriamo ora il cerchio C avente centro in P e raggio $\frac{1}{2}$. Qualunque rotazione dei quadrati intorno a P lascia C inalterato, per cui è immediato rendersi conto che l'intersezione dei due quadrati contiene l'intero cerchio C. D'altro canto, C ha area $\pi r^2 = \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$. Ne segue che anche l'intersezione dei due quadrati ha area maggiore di $\frac{3}{4}$.



20 Ancora quadrati

Sia a l'intero dato dalla sequenza di cifre voluta, e scegliamo un intero positivo pari k tale che $a < 10^k$ (ad esempio si può prendere come k il numero di cifre di a, eventualmente incrementato di uno in caso fosse dispari).

Sia ora b la parte intera di $\sqrt{a} \cdot 10^{2k}$ (la parte intera di un numero reale positivo è semplicemente il numero reale privato delle sue cifre dopo la virgola). Osserviamo in particolare che $b \leq \sqrt{a} \cdot 10^{2k} < b+1$. Consideriamo allora $(b+1)^2$: si ha $(b+1)^2 > (\sqrt{a} \cdot 10^{2k})^2 = a \cdot 10^{4k}$, e d'altro canto $b+1 \leq \sqrt{a} \cdot 10^{2k} + 1$, da cui (usando anche $a < 10^k$) otteniamo

$$(b+1)^2 \leq (\sqrt{a} \cdot 10^{2k})^2 + 1 + 2(\sqrt{a} \cdot 10^{2k}) < a \cdot 10^{4k} + 1 + 2 \cdot 10^{k/2+2k}.$$

Osserviamo ora che $a \cdot 10^{4k}$ è un numero che inizia con le stesse cifre di a, seguite da $4k$ zeri, e $(b+1)^2$ è ottenuto da $a \cdot 10^{4k}$ aggiungendo un numero r minore di $1 + 2 \cdot 10^{k/2+2k}$. Quindi, a patto che $1 + 2 \cdot 10^{k/2+2k}$ sia costituito da non più di $4k$ cifre, anche r si scriverà con non più di $4k$ cifre, e quindi la somma $a \cdot 10^{4k} + r$ inizierà ancora con le stesse cifre di a (in effetti, le cifre di r vanno a sommarsi ai $4k$ zeri finali, senza interagire con le cifre di a). D'altro canto, $1 + 2 \cdot 10^{k/2+2k}$ si scrive con esattamente $\frac{k}{2} + 2k + 1$ cifre, quindi abbiamo finito purché $\frac{5}{2}k + 1 \leq 4k$, disuguaglianza che è vera per ogni k intero positivo pari.

Per vedere il meccanismo in azione, proviamolo con $a = 1793$. Possiamo allora prendere $k = 4$; si ha $\sqrt{1793} \cdot 10^8 = 423438307.194...$, quindi prendiamo $b = 423438307$. Si ha allora $(b+1)^2 = 179300000681902864$: come si vede questo numero inizia con le stesse cifre di a, seguite da un certo numero di zeri, e infine da un "errore" dato dalle cifre 681902864.

21 Polinomi di polinomi di polinomi...

1. Scriviamo $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$. Allora $P(b) - P(a) = c_n b^n + c_{n-1}b^{n-1} + \cdots + c_0 - \left(c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_0\right)$; riorganizzando i termini, possiamo riscrivere questa espressione nella forma

$$P(b) - P(a) = c_n(b^n - a^n) + c_{n-1}(b^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + c_1(b - a). \tag{3}$$

D'altro canto, per ogni intero positivo h abbiamo $b^h - a^h = (b-a)(b^{h-1} + b^{h-2}a + \cdots + a^{h-1})$, quindi $b - a$ divide ognuno degli addendi in (3), e quindi divide anche $P(b) - P(a)$.

2. Definiamo $x_0 = t$, $x_{i+1} = P(x_i)$, e $d_i = x_{i+1} - x_i$ per ogni $i \geq 0$. Se $d_0 = 0$ abbiamo già finito (infatti in tal caso si ha $x_1 = x_0 = t$ e quindi $x_2 = P(x_1) = P(t) = x_1 = t$), quindi supponiamo $d_0 \neq 0$.

Dal punto precedente sappiamo che $d_i = x_{i+1} - x_i$ divide $P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = d_{i+1}$. D'altro canto, per ipotesi la sequenza $\{x_i\}$ prima o poi si ripete, e quindi prima o poi c'è un indice k per cui $d_k = d_0$. Ma allora abbiamo che d_0 divide d_1, che divide d_2, che divide d_3, ..., che divide $d_k = d_0$. Siccome i d_i sono tutti interi, questo implica chiaramente che i d_i sono tutti uguali *in valore assoluto*. In particolare, d_1 è uguale o a d_0 o a $-d_0$. Nel secondo caso,

$$P(P(t)) = x_2 = x_1 + (x_2 - x_1) = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) = x_0 + d_1 + d_0 = x_0 = t$$

come voluto. Nel primo caso ($d_1 = d_0$), invece, abbiamo che $d_2 = d_1$: in effetti, se per caso $d_2 = -d_1$, lo stesso ragionamento di prima (applicato a partire dal secondo termine) dice che la sequenza è $t, t + d_0, t + 2d_0, t + d_0, t + 2d_0, \ldots$, e quindi il primo termine non si ripresenta mai più, contraddicendo le ipotesi. Si ha quindi $d_2 = d_1 = d_0$, e continuando allo stesso modo otteniamo $d_3 = d_2$, eccetera, per cui $x_k = t + kd_0$, e il primo termine della sequenza non si ripete mai, contraddicendo nuovamente le ipotesi. Abbiamo quindi escluso il primo caso, e d'altro canto nel secondo caso abbiamo mostrato che si ha $P(P(t)) = t$ come voluto.

22 Interi consecutivi

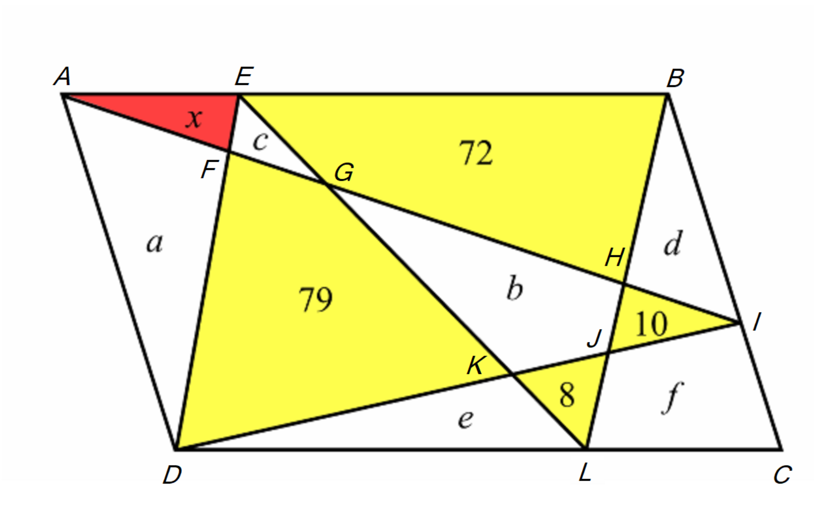
La somma di n interi consecutivi, diciamo gli interi $a + 1, a + 2, \ldots, a + n$, è data da na più la somma degli interi da 1 ad n, ovvero è uguale a $na + \frac{n(n+1)}{2} = n\frac{2a+n+1}{2}$. Questo numero è divisibile per n se e soltanto se $\frac{2a+n+1}{2}$ è intero, quindi se e soltanto se $2a + n + 1$ è pari. Dal momento che $2a$ è sempre pari, questo accade se e solo se n è dispari. In conclusione, la proprietà voluta vale per tutti e soli i numeri dispari!

23 Una lunga lista di numeri

Notiamo innanzitutto che i numeri che iniziano con la cifra 1 sono più piccoli di tutti i numeri che iniziano con la cifra 2, che a loro volta sono più piccoli di quelli che iniziano con la cifra 3, e così via fino alla cifra 7. D'altro canto, quanti sono i numeri nella nostra lista che iniziano con la cifra 1? Sono tanti quanti gli anagrammi delle cifre $\{2, \ldots, 7\}$, ovvero $6! = 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 720$. La nostra lista inizia quindi con 720 numeri la cui cifra iniziale è 1. Questi sono seguiti da 720 numeri la cui cifra iniziale è 2, e da altri 720 numeri la cui cifra iniziale è 3. Ora $720 + 720 < 2021 < 720 + 720 + 720$, quindi il 2021-esimo numero si trova fra quelli che iniziano con la cifra 3. Togliendo dalla nostra lista i primi 1440 numeri, quello che ci interessa è il numero in posizione $2021 - 1440 = 581$ fra quelli rimasti. Tutti i primi 720 numeri della nuova lista iniziano con la cifra 3, seguita da un anagramma di $\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$. Quanti sono quelli la cui seconda cifra è 1? Sono $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Quindi i primi 120 numeri nella lista sono della forma 31..., poi ci sono 120 numeri della forma 32..., poi 120 della forma 34..., ancora 120 della forma 35... (e siamo a 480), e i successivi 120 sono della forma 36... (e siamo arrivati a 600). Il nostro numero misterioso si trova quindi in questa zona: è perciò della forma 36.... Eliminando tutti i numeri le cui prime cifre sono $31, 32, 34$ o 35 (480 numeri) dalla nostra lista ci chiediamo allora quale sia l'elemento in posizione $581 - 480 = 101$ della nuova lista. I primi elementi in questo elenco sono 24 numeri che iniziano con le cifre 361, 24 che iniziano con 362, 24 con 364, e poi 24 con 365 (per un totale di 96). Stiamo quindi cercando il quinto numero che inizia con le cifre 367: scrivendo esplicitamente i numeri di questo tipo in ordine crescente troviamo $3671245, 3671254, 3671425, 3671452$, e infine il numero voluto, ovvero 3671524.

24 Un gioco da bambini

Facciamo riferimento alla figura qui sotto, in cui le lettere maiuscole indicano punti e le lettere minuscole le aree delle diverse regioni (immagine rielaborata a partire da `https://www.youtube.com/watch?v=OuJQaxZvlYs`, dove si può trovare una versione animata di questa soluzione).



L'osservazione chiave è che la somma di alcune delle aree evidenziate è equivalente a metà dell'area del quadrilatero $ABCD$. Guardiamo ad esempio i triangoli ADE e ELB e consideriamoli come aventi basi rispettive AE ed EB, ed aventi come altezza comune l'altezza h del parallelogramma $ABCD$. La somma delle loro aree è allora

$$\frac{AE \cdot h}{2} + \frac{EB \cdot h}{2} = \frac{AB \cdot h}{2},$$

ovvero è metà della superficie S del parallelogramma. Si ha in particolare $x + a + 72 + b + 8 = \frac{S}{2}$. Con lo stesso ragionamento otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x + a + 72 + b + 8 = \frac{S}{2} \\ x + c + 72 + d + f + 8 + e = \frac{S}{2} \\ c + 79 + e + f + 10 + d = \frac{S}{2} \\ a + 79 + b + 10 = \frac{S}{2}; \end{cases}$$

per l'ultima di queste si noti semplicemente che AID è un triangolo con base AD e altezza pari alla distanza fra le rette AD e BC, e quindi la sua area è la metà di S (che può essere calcolata anche come $S = AD \cdot h_2$, dove h_2 è l'"altra" altezza, ovvero appunto la distanza fra AD e BC). Sommando a coppie le relazioni nel sistema precedente otteniamo

$$\begin{cases} 2(x + 72 + 8) + a + b + c + d + e + f = S \\ 2(79 + 10) + a + b + c + d + e + f = S, \end{cases}$$

e quindi per differenza $x + 80 = 89$, ovvero $x = 9$.

25 Somma infinita

Dimostreremo per induzione che $b_n = \dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$. Ammettendo per il momento questo risultato, vediamo che b_n è sempre minore di 2, ma al crescere di n si avvicina arbitrariamente a questo numero (in effetti, il rapporto $\frac{n+2}{2^n}$ può essere reso piccolo a piacere a patto di prendere n sufficientemente grande). In particolare, la somma della serie $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n}$ è 2.

Mostriamo ora la formula per b_n. Essa è evidentemente vera per $n=1$, per verifica diretta: $b_1 = a_1 = \frac{1}{2} = \frac{2^{1+1}-1-2}{2}$. Ammettendo che sia vera per un certo n, per $n+1$ abbiamo

$$b_{n+1} = b_n + a_{n+1} = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2}-2n-4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2}-(n+1)-2}{2^{n+1}},$$

come voluto.

Questa dimostrazione potrebbe però lasciarvi insoddisfatti: d'accordo, è vera, ma non è particolarmente illuminante. Esiste un modo più intuitivo di capire che la somma (infinita) voluta è effettivamente uguale a 2? Le seguenti manipolazioni sono più difficili da giustificare formalmente rispetto ai passaggi precedenti, ma spero possano dare una motivazione intuitiva migliore del risultato. Chiamiamo

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Possiamo allora scrivere

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 1 + S,$$

da cui $S = 1$, e d'altro canto

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{32} & +\cdots & = & S \\
 & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{32} & +\cdots & = & \frac{1}{2}S \\
 & & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{32} & +\cdots & = & \frac{1}{4}S \\
 & & & +\frac{1}{16} & +\frac{1}{32} & +\cdots & = & \frac{1}{8}S \\
 & & & & +\frac{1}{32} & +\cdots & = & \frac{1}{16}S \\
 & & & & & \vdots & = & \vdots
\end{array}$$

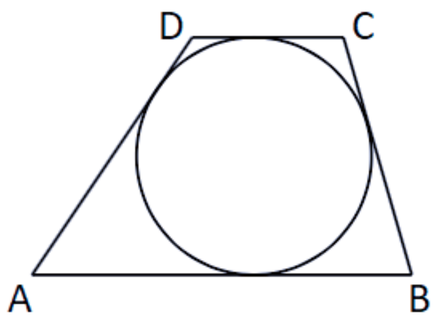
Sommando per colonne troviamo

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots = S\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right),$$

ovvero la somma voluta è uguale a $S(1+S) = 2$.

26 Cerchio inscritto

Dal momento che il quadrilatero $ABCD$ (che per ipotesi è un trapezio) è circoscrittibile ad una circonferenza, la somma dei suoi lati opposti è uguale: $AB + CD = BC + DA$. Notiamo inoltre che il cerchio inscritto ha diametro uguale all'altezza h del trapezio, da cui $h = 24$.



Possiamo adesso calcolare la somma delle basi del trapezio: la sua area è $(AB+CD)\cdot\frac{h}{2}=648$, da cui $AB+CD=\frac{648\cdot 2}{24}=54$. Abbiamo già osservato che $BC+DA=AB+CD=54$, per cui sottraendo il valore noto $BC=25$ si ottiene $DA=29$.

27 Una trasmissione radiofonica

Consideriamo per semplicità che ogni sera si concluda con la vittoria di Alberto o di Barbara (ovvero ignoriamo le puntate della trasmissione in cui non si produca né una sequenza XX né una sequenza YX). È facile rendersi conto che se la prima telefonata è Y allora vince necessariamente Barbara: infatti la sequenza di telefonate inizierà con un certo numero di Y, e alla prima chiamata X Barbara avrà vinto (ceratamente non può vincere Alberto, che ha bisogno di due X per vincere: la prima di quelle due eventuali X però consegna già la vittoria a Barbara!). Viceversa, se la prima telefonata della serata è una X, consideriamo la seconda. Se essa è un'altra X allora vince immediatamente Alberto, altrimenti (per un ragionamento del tutto analogo al precedente) alla lunga vincerà Barbara. In conclusione, fra le 4 possibilità per le prime due telefonate, ovvero

$$XX,\ XY,\ YX,\ YY,$$

solo la prima è favorevole ad Alberto, mentre tutte le altre portano ad una vittoria di Barbara. Si noti che questi quattro casi sono fra loro equiprobabili! In particolare (ammettendo che ogni sera uno dei due conduttori vinca) Alberto vince in un caso su 4 e Barbara in 3 casi su 4, cioè Barbara ha una probabilità di vittoria tripla rispetto ad Alberto.

28 Un'equazione, ma due incognite

Possiamo scrivere

$$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\sqrt{y^2+1}-y,$$

dove si è usato il fatto che $(\sqrt{y^2+1}+y)(\sqrt{y^2+1}-y)=(\sqrt{y^2+1})^2-y^2=1$. Similmente troviamo

$$y+\sqrt{y^2+1}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}-x,$$

e sommando queste due equazioni membro a membro si ha

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right):$$

semplificando i termini con le radici quadrate, che compaiono da entrambi i lati dell'uguaglianza, si ottiene allora $x+y=-(x+y)$, ovvero $x+y=0$.

29 Quadrati, quadrati, quadrati...

Un possibile modo di affrontare il problema è quello di rendersi conto che quando x,y sono entrambi abbastanza grandi il prodotto xy è molto più grande della somma $x+y$, per cui $(xy-7)^2$ è più grande di $(x+y)^2$, che a sua volta è più grande di x^2+y^2, e quindi non ci può essere uguaglianza. Rendiamo precisa questa intuizione: si ha

$$xy-7>x+y \iff xy-x-y>7 \iff xy-x-y+1>7+1 \iff (x-1)(y-1)>8.$$

Quindi: se $(x-1)(y-1)>8$, allora $xy-7>x+y$ e quindi

$$x^2+y^2=(xy-7)^2>(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\geq x^2+y^2,$$

che è ovviamente assurdo. Le soluzioni vanno quindi ricercate fra le coppie (x,y) con $(x-1)(y-1)\leq 8$. Data la simmetria dell'equazione, possiamo restringerci al caso $y\geq x$. Le coppie ancora da studiare sono quindi le infinite coppie della forma $(0,y)$ con $y\geq 0$ e $(1,y)$ con $y\geq 1$, e un numero finito di altre coppie, precisamente $(x,y)=(2,2),(2,3),\ldots,(2,9),(3,3),(3,4)$ e $(3,5)$. Le famiglie infinite sono facili da trattare: per $x=0$ l'equazione originale diventa

$$y^2=49$$

che ha come unica soluzione positiva $y=7$; per $x=1$ invece abbiamo

$$1+y^2=(y-7)^2=y^2-14y+49,$$

che è equivalente a $14y=49$, la cui unica soluzione $y=7/2$ non è intera. Controllando infine le poche coppie rimaste si trova l'unica altra soluzione $(3,4)$. Ricordando la simmetria dell'equazione, le soluzioni cercate sono precisamente

$$(0,7),\ (3,4),\ (4,3),\ (7,0).$$

Una soluzione alternativa (una delle tante!) si può ottenere riscrivendo l'equazione iniziale nella forma

$$(x+y)^2=(xy-6)^2+13 \iff (xy-6+x+y)(xy-6-x-y)=-13.$$

Dal momento che 13 è un numero primo, i due fattori sulla sinistra devono essere uguali a ± 1 o ± 13. Inoltre, siccome $xy-6+x+y>xy-6-x-y$ gli unici due casi possibili sono

$$\begin{cases} xy-6+x+y=1 \\ xy-6-x-y=-13 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} xy-6+x+y=13 \\ xy-6-x-y=-1. \end{cases}$$

Risolvendo i due sistemi si trovano le soluzioni indicate prima. Più precisamente, per risolvere il primo sistema possiamo sommare le equazioni membro a membro, trovando $2xy-12=-12$, da cui $xy=0$, ovvero uno fra x e y è zero (e l'altra variabile è allora facile da determinare). Per il secondo sistema possiamo procedere nello stesso modo: sommando membro a membro troviamo $2xy-12=12$, cioè $xy=12$. Sostituendo nella prima equazione troviamo $x+y=7$, e quindi x,y sono (a meno dell'ordine) le due soluzioni dell'equazione $t^2-7t+12=0$, che si trovano facilmente essere 3 e 4.

30 Polinomio misterioso

Vista l'ipotesi che 1, 2 e 3 siano radici del polinomio $p(x)$, usando il teorema di Ruffini possiamo scrivere

$$p(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-c),$$

dove $x-c$ è il polinomio che resta dopo aver diviso $p(x)$ prima per $x-1$, poi per $x-2$ e infine per $x-3$ (in effetti, il polinomio ottenuto come quoziente dopo le tre divisioni deve essere di primo grado, quindi della forma $ax-c$; tuttavia, siccome il coefficiente di x^4 in $p(x)$ è pari ad 1, si vede subito che a deve essere uguale ad 1). Si noti che il valore di c è incognito e non può essere determinato dai dati del problema! Tuttavia, quando calcoliamo $p(12) + p(-8)$ sulla base della formula precedente otteniamo

$$(11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (12 - c)) + ((-9)(-10)(-11)(-8 - c)).$$

Sviluppando si scopre che l'incognita c si cancella! In effetti, questa compare una volta con coefficiente $-11 \cdot 10 \cdot 9$ e un'altra con coefficiente $-(-9)(-10)(-11)$. Completando il calcolo otteniamo allora

$$\begin{aligned} p(12) + p(-8) &= (11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 12) + ((-9)(-10)(-11)(-8)) \\ &= 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot (12 + 8) \\ &= 990 \cdot 20 = 19800. \end{aligned}$$

31 Testa o croce?

Consideriamo una singola moneta. Al primo lancio abbiamo una probabilità del 50% che il risultato sia già *testa*; se il risultato è invece *croce*, questa moneta viene lanciata nuovamente, e al termine del secondo lancio la probabilità che essa mostri il risultato *croce* è quindi $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (la probabilità che *entrambe* le volte sia uscita *croce*). Se è così, Simona la lancia nuovamente, per cui dopo il terzo lancio la probabilità che questa moneta mostri il risultato *croce* è di $1/2^3$. In generale, la probabilità che dopo n lanci la moneta mostri il risultato *croce* è di $1/2^n$, e quindi – per differenza – la probabilità che mostri *testa* è $1-2^{-n}$. In particolare, dopo (al massimo) 10 lanci, la probabilità che questa moneta mostri il risultato *testa* è $1 - 2^{-10}$.

Quanto detto finora vale per una singola moneta, ma visto che le monete vengono lanciate in modo indipendente, la probabilità che *tutte* mostrino il risultato *testa* è di $(1 - 2^{-10})^{2^{10}}$.

Al di là del risultato numerico esatto, chi ha studiato un po' di analisi saprà che $(1 - 1/n)^n$ tende, per n grande, al valore $1/e$, dove $e = 2.718281\ldots$ è il numero di Nepero. In particolare, per $n = 2^{10}$ si ha

$$(1 - 1/n)^n = 0.3677\ldots,$$

che è la nostra probabilità cercata, e che in effetti è approssimata molto bene da $1/e = 0.3679\ldots$

32 Uno, due, quattro

Scrivendo $x^3 = 4z^3 - 2y^3$ vediamo che x^3 è pari, e quindi x stesso è pari. Scriviamo allora $x = 2x'$ e sostituiamo, ottenendo

$$8(x')^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

Dividendo tutto per 2 possiamo riscrivere questa equazione nella forma

$$y^3 = 2z^3 - 4(x')^3,$$

che ci dice che y^3 e quindi y è pari. Procediamo allora come sopra, scrivendo $y = 2y'$, sostituendo e semplificando un fattore 2: troviamo allora

$$2(x')^3 + 4(y')^3 = z^3,$$

da cui ancora una volta z è pari, $z = 2z'$. Sostituendo un'ultima volta otteniamo

$$(x')^3 + 2(y')^3 = 4(z')^3.$$

Abbiamo così scoperto che se (x, y, z) è una soluzione, allora si ha $x = 2x', y = 2y', z = 2z'$, dove (x', y', z') è ancora una soluzione intera dell'equazione di partenza. In altre parole, se (x, y, z) è una soluzione intera, anche $(x/2, y/2, z/2)$ è una soluzione intera. Ripetendo questo ragionamento otteniamo però che anche $(x/4, y/4, z/4)$ è una soluzione intera, e anche $(x/2^3, y/2^3, z/2^3)$, e in generale $(x/2^n, y/2^n, z/2^n)$ è una soluzione *intera* per ogni $n \geq 0$. Questo però è chiaramente assurdo, a meno che x, y, z non siano tutti uguali a 0: in effetti, se uno di essi (diciamo per esempio x) fosse diverso da 0, allora per n sufficientemente grande il numero $x/2^n$ sarebbe diverso da 0 ma strettamente minore di 1 in modulo, cosa che è certamente impossibile per un numero intero. Ne deduciamo che l'unica soluzione all'equazione proposta è $x = y = z = 0$.

33 Quadrilatero inscritto

Sia M il punto di intersezione di KH e QS. Si ha $\widehat{MSK} = \widehat{QSP} = \widehat{PRQ}$, dove la seconda uguaglianza vale in quanto entrambi sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Consideriamo poi i triangoli HQR e PHQ: entrambi sono rettangoli (in Q e in H rispettivamente), e l'angolo $\widehat{PRQ}$ è in comune. Tali triangoli hanno quindi due angoli uguali, e perciò anche il terzo è uguale. Si ha perciò $\widehat{PRQ} = \widehat{HQP}$.

Osserviamo ora che il quadrilatero $PKHQ$ può essere inscritto nella circonferenza di diametro PQ, in quanto sia PKQ che PHQ sono angoli retti per costruzione. Usando gli angoli lungo tale circonferenza vediamo allora che l'angolo $\widehat{HQP}$ è il supplementare dell'angolo $\widehat{HKP}$, che a sua volta è supplementare di $\widehat{SKM}$. Mettendo insieme tutte le uguaglianze dimostrate finora abbiamo

$$\widehat{KSM} = \widehat{PSQ} = \widehat{PRQ} = \widehat{HQP} = 180° - \widehat{HKP} = 180° - (180° - \widehat{SKM}) = \widehat{SKM}.$$

Tale uguaglianza esprime precisamente il fatto che il triangolo KSM sia isoscele su base SK. Siccome $\widehat{SKQ} = 90°$ abbiamo

$$\widehat{MKQ} = 90° - \widehat{SKM} = 90° - \widehat{KSM} = 180° - \widehat{SKQ} - \widehat{KSM} = \widehat{KQS},$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che gli angoli del triangolo KSQ sommano a 180°. L'uguaglianza qui sopra mostra che anche il triangolo KMQ è isoscele (su base KQ), e quindi $SM = KM = MQ$ come voluto.

34 Fattorizzare 30^3

Si ha $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, quindi (in virtù del teorema di fattorizzazione unica per i numeri interi) le incognite x, y, z devono essere a loro prodotti di fattori $2, 3, 5$. Scriviamo allora

$$x = 2^{a_1}3^{b_1}5^{c_1}, \quad y = 2^{a_2}3^{b_2}5^{c_2}, \quad z = 2^{a_3}3^{b_3}5^{c_3} :$$

l'equazione proposta diventa

$$xyz = 2^{a_1+a_2+a_3}3^{b_1+b_2+b_3}5^{c_1+c_2+c_3} = 30^3 = 2^3 3^3 5^3,$$

e si tratta semplicemente di distribuire i fattori $2, 3, 5$ fra le variabili x, y, z, ovvero di risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 3 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 3, \end{cases}$$

dove gli esponenti $a_1, a_2, \ldots, c_3$ sono interi maggiori o uguali a 0. Si verifica facilmente che ognuna delle tre equazioni del sistema qui sopra ha 10 soluzioni ($3+0+0, 0+3+0, 0+0+3, 2+1+0, 2+0+1, 1+2+0, 0+2+1, 1+0+2, 0+1+2, 1+1+1$), e quindi in totale ci sono $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ modi di scegliere gli esponenti $a_1, \ldots, c_3$. Ci sono quindi 1000 soluzioni dell'equazione proposta.

Nota. Il cosiddetto metodo 'stars and bars' per contare le soluzioni di equazioni del tipo $a_1 + \cdots + a_n = k$ (si veda `https://en.wikipedia.org/wiki/Stars_and_bars_(combinatorics)#Theorem_two`) fornisce direttamente che il numero di soluzioni intere non negative all'equazione $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ è dato da $\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

35 Un polinomio con una proprietà bizzarra

Sostituiamo nella prima condizione data $x = 0$: essa fornisce $f(0) = -f(0)$, cioè $2f(0) = 0$, e quindi $f(0) = 0$. Per il teorema di Ruffini, questo è equivalente al fatto che $x - 0$ divide $f(x)$. Similmente, sostituiamo $x = 1$ nella seconda condizione data nel testo: si ottiene $f(1) = -f(1)$, e cioè $f(1) = 0$. Riutilizzando la prima condizione con $x = 1$ si ottiene poi $f(-1) = -f(1) = 0$.

Allora stesso modo, sostituendo $x = -1$ otteniamo $f(-1) = 0$. Applicando ancora il teorema di Ruffini, otteniamo che $x - 1$ e $x - (-1) = x + 1$ dividono $f(x)$. La conclusione è allora, come voluto, che $x(x-1)(x+1) = x(x^2-1)$ divide $f(x)$.

Nota 1. Per avere una dimostrazione formalmente completa, nella conclusione bisognerebbe osservare che $x, x+1, x-1$ sono polinomi a due a due relativamente primi.

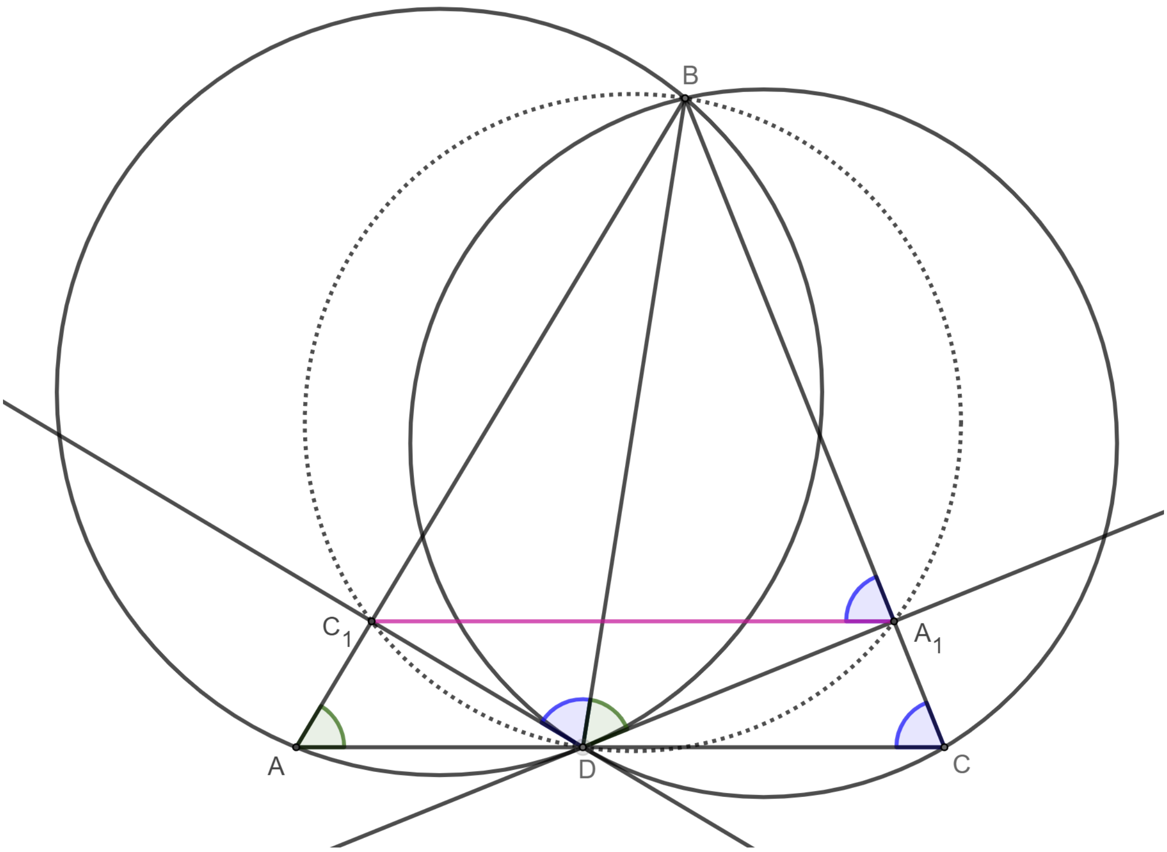
Nota 2. Esistono effettivamente (infiniti) polinomi $f(x)$ e interi n come nel testo: l'esempio più semplice, al di là del polinomio nullo, è $n = 4$, $f(x) = x(x^2-1)$. , che – come è facile verificare – rispetta entrambe le condizioni del testo.

Nota 3. Si può risolvere il problema anche in altri modi; presentiamo una possibile strada alternativa. Scrivendo $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$ e imponendo le condizioni del testo si trova che tutti i coefficienti di indice pari sono nulli, mentre per quelli di indice dispari la condizione è $a_{n-j} = -a_j$. Se n è dispari, tale condizione (unita al fatto che $a_j = 0$ per j pari) implica che $f(x)$ è il polinomio nullo. Se invece n è pari, diciamo $n = 2m$, otteniamo che $f(x)$ è una somma di termini del tipo $a_j(x^j - x^{2m-j})$ con j dispari, $m \leq j \leq 2m$. Ognuno di questi termini è divisibile per $x(x^2-1)$ per verifica diretta: infatti $a_j(x^j - x^{2m-j}) = a_j x^{2m-j}(x^{2j-2m} - 1)$, e x divide x^{2m-j} (siccome $2m - j$ è dispari e non-negativo, quindi è ≥ 1), mentre $x^2 - 1$ divide $x^{2(j-m)} - 1$ grazie alla nota identità algebrica

$$x^{2(j-m)} - 1 = (x^2-1)(x^{2(j-m)-2} + x^{2(j-m)-4} + \cdots + 1).$$

36 Un punto a caso

Si ha $\angle BCD = \angle BDC_1$ in quanto entrambi questi angoli insistono sull'arco BD della circonferenza ω_C (si ricorda che questa proprietà vale anche nel 'caso limite' di un angolo formato da una tangente). Per la stessa ragione, $\angle DAB = \angle A_1DB$.



Ne segue allora

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle A_1DC_1 &= \angle ABC + \angle A_1DB + \angle BDC_1\\ &= \angle ABC + \angle DAB + \angle BCD\\ &= \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°,\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza usa il fatto che la somma degli angoli interni del triangolo ABC è uguale a $180°$. L'uguaglianza precedente fornisce in particolare $\angle A_1DC_1 + \angle C_1BA_1 = 180°$: il quadrilatero A_1DC_1B ha allora due angoli opposti che sommano a $180°$, ovvero è inscrivibile in una circonferenza ω (tratteggiata in figura). Possiamo ora trasportare angoli lungo questa nuova circonferenza: in particolare, l'angolo $\angle BA_1C_1$ insiste sull'arco BC_1 ed è quindi uguale all'angolo $\angle BDC_1$ (che insiste sul medesimo arco nella circonferenza ω). D'altro canto sappiamo già che $\angle BDC_1 = \angle BCA$: questo vuol dire esattamente che la retta BC forma angoli uguali con la retta A_1C_1 e con la retta CA, e quindi che queste due rette sono parallele, come voluto.

37 Il solitario di Marina

Sia m_i il numero di monete sulla casella i. Conveniamo di assegnare, in ogni momento del gioco, valore 2^{-i} alle monete sulla casella i, e consideriamo il valore complessivo delle monete, ovvero la somma $m_{-N} \cdot 2^N + m_{-(N-1)} \cdot 2^{N-1} + \cdots + m_{-1} \cdot 2 + m_0 \cdot 2^0 + m_1 \cdot 2^{-1} + \cdots + m_N 2^{-N}$. Affermiamo che tale quantità non cambia nel corso del gioco: in effetti, se spostiamo 3 monete dalla casella i alle due adiacenti secondo le regole del gioco, il valore totale:

1. cala di $3 \cdot 2^{-i}$ per via delle tre monete tolte dalla casella i;
2. cresce di $2^{-(i-1)}$ per via della moneta aggiunta sulla casella $i-1$;
3. cresce di $2 \cdot 2^{-(i+1)}$ per via delle due monete aggiunte sulla casella $i+1$.

In totale, il valore complessivo cambia quindi di $-3 \cdot 2^{-i} + 2^{1-i} + 2^{-i} = 2^{-i}(-3+2+1) = 0$.

All'inizio del gioco, il valore complessivo è chiaramente uguale a N. Se il gioco si conclude con la vittoria di Marina, ad un certo punto dobbiamo avere $m_i = m_{i+1} = \cdots = m_{i+N-3} = 1$ e $m_{i+N-2} = 2$, per cui il valore complessivo è

$$2^{-i} + 2^{-i-1} + \cdots + 2^{-(i+N-3)} + 2 \cdot 2^{-(i+N-2)} = 2^{-i}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{N-3}} + \frac{2}{2^{N-2}}\right).$$

Utilizzando la nota formula per la somma della progressione geometrica, si ottiene $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{N-3}} = \frac{1-(1/2)^{N-2}}{1-1/2} = 2 - \frac{1}{2^{N-1}}$, e quindi il valore complessivo finale è

$$\begin{aligned}2^{-i} + 2^{-i-1} + \cdots + 2^{-(i+N-3)} + 2 \cdot 2^{-(i+N-2)} &= 2^{-i}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{N-3}} + \frac{2}{2^{N-2}}\right)\\ &= 2^{-i}\left(2 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}}\right) = 2^{1-i}.\end{aligned}$$

Dal momento che il valore complessivo non è cambiato dall'inizio alla fine del gioco, si deve avere $N = 2^{1-i}$, per cui in particolare N è una potenza di 2. La casella su cui alla fine del gioco si trovano due monete è quella di indice $i + (N-2) = (1 - \log_2 N) + N - 2 = N - 1 - \log_2 N$.

38 Successione crescente

Scriviamo $x_0 = 1 + t$ con t positivo. Si ha $x_1 = \frac{(1+t)^2+1}{2} = \frac{2+2t+t^2}{2} = 1 + t + \frac{t^2}{2}$. Dimostriamo che in generale $x_n \geq 1 + t + n\frac{t^2}{2}$, procedendo per induzione. Abbiamo già verificato i casi $n = 0, 1$;

sfruttando poi l'ipotesi di induzione si ottiene

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1+x_n^2}{2} \geq \frac{1+(1+t+nt^2/2)^2}{2} \\ &= \frac{1+(1+t^2+n^2t^4/4+2t+nt^2+nt^3)}{2} \\ &\geq \frac{1+(1+t^2+2t+nt^2)}{2} \\ &= 1+t+(n+1)\frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Siccome $t^2/2$ è positivo (e in particolare non nullo), $\frac{2}{t^2}$ è un certo numero reale positivo, e basta scegliere $k \geq \frac{2}{t^2}$ per ottenere

$$x_k \geq 1+t+k\frac{t^2}{2} \geq 1+t+\frac{2}{t^2}\cdot\frac{t^2}{2} = 2+t > 2.$$

39 Contando multipli di 11

Ovviamente i multipli di 11 si presentano uno ogni 11 interi consecutivi. Fra i 100 interi di 6 cifre con prime 4 cifre fissate, quindi, uno ogni 11 è multiplo di 11. Fissate le prime 4 cifre $abcd$ abbiamo allora 9 multipli di 11 (in quanto $100/11 = 9, \ldots$), oppure 10, e questo secondo caso si verifica solo se i multipli di 11 in questione sono $abcd00, abcd11, abcd22, \ldots, abcd99$. Mostriamo che in effetti il secondo caso non si verifica mai: per il criterio di divisibilità per 11, il numero $abcd00$ è multiplo di 11 se e solo se è multiplo di 11 il numero $a-b+c-d$. Siccome le cifre a, b, c, d sono scelte nell'insieme $\{1, 2, 3, 9\}$, la quantità $a+c-(b+d)$ è al minimo $1+2-(3+9) = -9$ e al massimo $3+9-(1+2) = 9$, quindi è multipla di 11 se e solo se è 0. D'altro canto, è facile verificare che non si riescono ad ordinare le cifre $1, 2, 3, 9$ in modo che $a-b+c-d = 0$: un modo semplice di vederlo è che $a-b+c-d$ ha la stessa parità di $a+b+c+d = 1+2+3+9 = 15$, e quindi è dispari, per cui non può essere 0. Il caso in cui ci siano 10 multipli di 11 con prime 4 cifre $\{1, 2, 3, 9\}$ perciò non si verifica. Per ogni scelta delle prime 4 cifre abbiamo allora 9 numeri multipli di 11; infine, le possibili scelte delle prime 4 cifre sono le permutazioni delle cifre $\{1, 2, 3, 9\}$, e sono quindi $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. La risposta è perciò $24 \cdot 9 = 216$.

40 Al convegno di matematica

Sia k il numero di partecipanti al convegno. Consideriamo le k coppie

$$(\text{nazione di } P, \text{nazione del vicino destro di } P)$$

al variare di P fra i k partecipanti seduti a tavola. Ci sono n^2 possibilità per tali coppie, e la regola del convegno afferma esattamente che tutte queste coppie sono distinte. Si ha perciò $k \leq n^2$ come voluto. Una disposizione valida per $n = 4$ e $k = 16$ è data ad esempio da

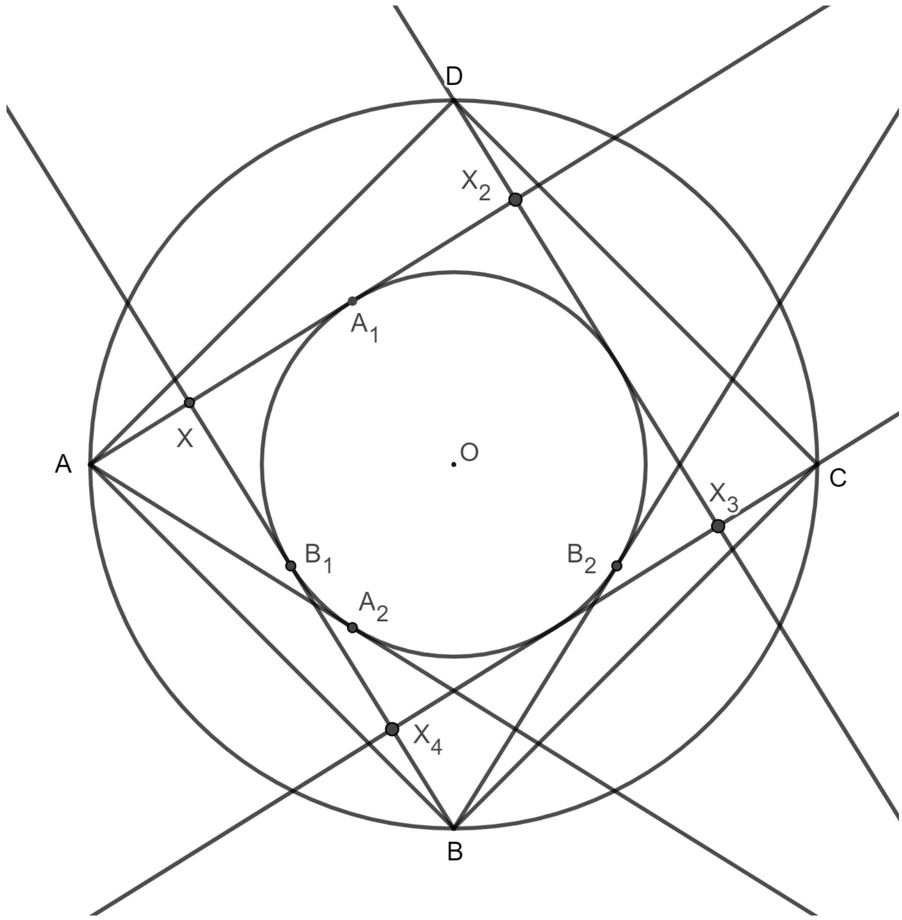
$$AABCDDADBDCCACBB,$$

dove si intende che ogni lettera A, B, C, D rappresenta una nazione, e l'ultimo partecipante provieniente dalla nazione B è adiacente al primo partecipante proveniente dalla nazione A.

41 Due circonferenze concentriche

Il punto chiave è quello di mostrare che il quadrilatero XB_1OA_1 è un quadrato. Ammesso questo fatto (che dimostreremo sotto), è facile rispondere ad entrambe le domande: l'area ombreggiata è data dalla differenza fra il quadrato OA_1XB_1 (di area $OA_1^2 = 9$) e del segmento circolare OA_1B_1, la cui area è un quarto di quella del cerchio di raggio $OA_1 = 3$ (ovvero è $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 3^2$). L'area voluta è quindi $9 - \frac{9}{4}\pi$.

Per quanto riguarda l'area del triangolo ABX, si può osservare che, dal momento che la figura è chiaramente invariante per rotazione di $90°$, tracciando anche le tangenti uscenti da C e D si formano 4 triangoli uguali ad ABX, ovvero ABX, DAX_2, CDX_3, BCX_4 in figura:



Questi quattro triangoli, insieme al quadrato $XX_2X_3X_4$, formano il quadrato $ABCD$. Ne segue che l'area voluta è un quarto della differenza fra l'area di $ABCD$ e l'area di $XX_2X_3X_4$. Siccome $XX_2X_3X_4$ è circoscritto alla circonferenza ω_1, di raggio 3, il suo lato è 6 e la sua area 36. Invece $ABCD$ è inscritto in ω_2: la sua diagonale è allora 10, il suo lato $10/\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, e la sua area $(5\sqrt{2})^2 = 50$. L'area voluta è quindi $\frac{50-36}{4} = \frac{7}{2}$.

Per dimostrare infine che XA_1OB_1 è un quadrato, come affermato all'inizio della soluzione, basta ripetere l'osservazione che la figura è invariante per rotazione di $90°$, il che implica chiaramente che le rette AA_1 e BB_1 siano perpendicolari. D'altro canto, per le proprietà delle tangenti anche gli angoli $\widehat{XA_1O}$ e $\widehat{XB_1O}$ sono retti. Quindi XA_1OB_1 è un quadrilatero con almeno tre (e quindi 4) angoli retti, e coppie di lati adiacenti uguali ($OA_1 = OB_1$ perché raggi, $XA_1 = XB_1$ perché segmenti di tangenza alla stessa circonferenza), ed è quindi un quadrato.

Nota. Ecco una soluzione alternativa per il calcolo dell'area del triangolo ABX. Abbiamo già dimostrato che esso è rettangolo in X, quindi – considerando AX come base e XB come altezza – la sua area è $\frac{1}{2} \cdot AX \cdot XB$. Possiamo calcolare le lunghezze di AX e XB come segue. Innanzitutto, il triangolo BOB_1 è rettangolo in B_1, come già osservato, per cui il teorema di Pitagora fornisce $BB_1^2 + OB_1^2 = BO^2$, cioè $BB_1^2 + 9 = 25$, da cui $BB_1 = 4$. Inoltre, XB_1 è uno dei lati del quadrato OA_1XB_1, e quindi la sua lunghezza è pari a quella di $OA_1 = 3$. Otteniamo perciò $XB = XB_1 + B_1B = 3 + 4 = 7$. Infine, osserviamo che AB è il lato di un quadrato la cui diagonale è $AC = 2AO = 10$, e quindi $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = 5\sqrt{2}$. Il segmento AX si può allora ottenere dal teorema di Pitagora, applicato al triangolo ABX: si ha $AX^2 = AB^2 - BX^2 = (5\sqrt{2})^2 - 7^2 = 1$, cioè $AX = 1$. L'area del triangolo ABX è quindi

$$\frac{1}{2} \cdot AX \cdot XB = \frac{7}{2}.$$

4 Soluzioni – Qualche apertura verso la matematica non elementare

1 Il teorema di Liouville discreto

La soluzione di questo problema è in realtà molto semplice: i numeri scritti sul piano sono interi positivi, e ogni insieme di interi positivi ammette un minimo. Guardiamo questo minimo m: per ipotesi, esso è anche uguale alla media dei quattro numeri n_1, n_2, n_3, n_4 ad esso adiacenti, che però (siccome abbiamo preso proprio il minimo assoluto!) sono tutti maggiori o uguali ad m. Si ha allora

$$m = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{4} \geq \frac{m + m + m + m}{4} = m,$$

per cui si deve avere uguaglianza, ovvero $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = m$. Abbiamo allora dimostrato che tutte le caselle adiacenti ad una casella che contiene m contengono anch'esse il numero m. Siccome passando da una casella ad una casella adiacente raggiungiamo tutte le caselle del piano, questo vuol dire esattamente che ogni casella contiene il numero m.

2 Il problema del ballottaggio

Prima strategia. Vogliamo dimostrare che – data una sequenza ciclica di $a + b$ voti – ci sono esattamente $a - b$ "punti di partenza" che forniscono uno spoglio in cui A è sempre in vantaggio. Questo implica subito il teorema del ballottaggio: supponiamo di sapere la sequenza dei voti scrutinati come sequenza ciclica, ma non il punto di partenza. I punti di partenza sono ovviamente tutti equiprobabili, quindi la probabilità che A sia stata in vantaggio per tutto lo spoglio è $\frac{a-b}{a+b}$. Ma questo è vero qualunque sia la sequenza (ciclica) dei voti scrutinati, quindi *anche se non conosciamo* tale sequenza la probabilità è $\frac{a-b}{a+b}$.

Per dimostrare l'affermazione sulle sequenze cicliche è sufficiente procedere come segue. Diciamo che una sequenza è *buona* se A è sempre in vantaggio.

Dopo aver disposto i voti in cerchio, cominciamo ad eliminare coppie di A, B adiacenti (in quest'ordine se lette in senso orario). Certamente una sequenza buona non può separare questa A da questa B, perché l'unico caso in cui questo succede è se si inizia con la B in questione, il che chiaramente non porta ad una sequenza buona. D'altro canto, visto che questa coppia fornisce un voto ad A ed un voto a B (e quello per A arriva prima), possiamo semplicemente ignorare completamente questi due voti. Procedendo in questo modo, prima o poi avremo eliminato tutte le lettere B, e nel contempo avremo eliminato b delle lettere A. Visto che rimangono solo lettere A, ora tutti i punti di partenza conducono a sequenze buone! E data una sequenza buona costituita dalle A rimanenti, reinserendo le coppie AB che abbiamo eliminato otteniamo una sequenza buona in termini dei voti iniziali. Quindi quello che abbiamo dimostrato è: data una sequenza ciclica con a lettere A e b lettere B, i punti di partenza che forniscono una sequenza buona sono tanti quanti i punti di partenza buoni con $a - b$ lettere A e nessuna lettera B, ovvero sono $a - b$. Questo è proprio quello che volevamo dimostrare.

Seconda strategia. Osserviamo innanzitutto che – come sappiamo dal problema sui cammini della formica – il numero totale di percorsi è $\binom{a+b}{b}$.

Contiamo ora i percorsi 'cattivi' che iniziano con una mossa verso destra (ovvero un voto per B): restano poi da fare $b - 1$ mosse verso destra e a mosse verso l'alto, dunque applicando nuovamente lo stesso risultato appena usato vediamo che il numero di tali percorsi è $\binom{a+b-1}{a} = \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!} = \frac{b}{a+b}\binom{a+b}{b}$.

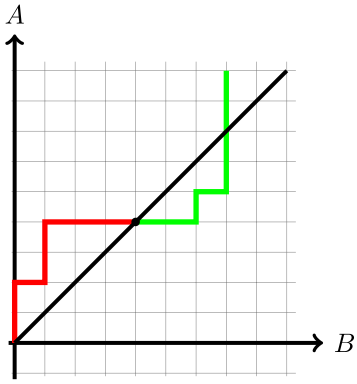
Restano infine da contare i percorsi che iniziano con una mossa verso l'alto (ovvero con un voto per A) ma finiscono per intersecare la diagonale. Il voto che conduce al *primo* pareggio fra le due candidate deve chiaramente essere un voto per B (altrimenti non potrebbe passare dall'essere in vantaggio ad una situazione di pareggio), quindi complessivamente lo spoglio procede come segue:

1. inizia con una A;

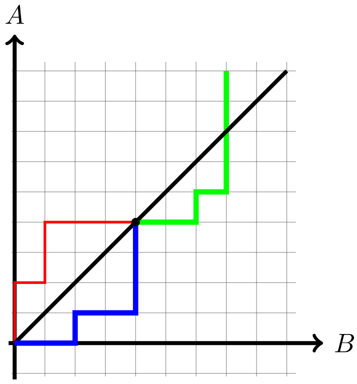
2. ad un certo punto giunge ad un pareggio fra A e B: diciamo che a questo punto siano stati scrutinati $2k$ voti, di cui k per A e k per B;

3. procede infine con i rimanenti $(a+b)-(2k)$ voti, di cui $a-k$ per A e $b-k$ per B.

In termini di cammini, quindi, abbiamo una situazione simile alla seguente (il ballottaggio in figura è $AABAABBBBBABAAAA$):



Lo spoglio è rappresentato dal cammino rosso e verde: A parte in vantaggio, ma dopo 8 voti c'è una situazione di pareggio. Nei rimanenti voti tuttavia c'è una maggioranza per A, che finisce per vincere il ballottaggio. L'idea è ora quella di associare ad ogni tale percorso un nuovo percorso *che inizi con una mossa verso destra*, in modo tale che l'associazione fra i percorsi "cattivi" che iniziano con una A e i percorsi (automaticamente "cattivi") che iniziano con una B sia una bigezione. L'idea (alla quale abbiamo maldestramente alluso con il termine *riflettendo*) è quella di *riflettere* il primo segmento del voto (dall'inizio fino al primo pareggio), come nella figura seguente:



Il nuovo andamento dello spoglio è ora rappresentato dai segmenti blu e verdi – esplicitamente, il nuovo ordine dei voti è $BBABBAAABBABAAAA$. Un attimo di riflessione mostra che ognuno di questi due grafici si ottiene dall'altro semplicemente riflettendo la parte di cammino che porta al primo pareggio. Ma allora abbiamo mostrato come associare, in maniera biunivoca, un ordinamento dei voti che comprende un pareggio e che inizia con A con un ordinamento dei medesimi voti che inizia con B (e necessariamente comprende un pareggio, perché se B parte in vantaggio ma A finisce per vincere è chiaro che ad un certo punto dovranno pareggiare). Ne segue che i percorsi "cattivi" che iniziano con A sono tanti quanti i percorsi che iniziano per B, ovvero sono nuovamente $\frac{b}{a+b}\binom{a+b}{b}$. Per differenza otteniamo che i percorsi buoni sono

$$\binom{a+b}{b} - 2\frac{b}{a+b}\binom{a+b}{b} = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{b}.$$

Dal momento che i percorsi totali sono $\binom{a+b}{b}$, la probabilità che un percorso scelto a caso (ovvero un ordinamento casuale dei voti) veda A sempre in vantaggio è $\frac{a-b}{a+b}$ come voluto.

3 La lotteria del sultano

1. Come suggerito dall'indicazione, la nostra probabilità di vittoria si ottiene sommando le probabilità di vittoria nelle varie situazioni in cui la pallina con il numero più alto esca esattamente come prima, come seconda, come terza..., come ultima, e dove ognuna di queste probabilità va pesata con la probabilità che in effetti la pallina migliore esca come prima, seconda, ..., ultima. Questi 'pesi' sono tutti uguali a $\frac{1}{n}$, perché la pallina migliore ha uguale probabilità di uscire in ogni momento.

   Con la nostra strategia, se la pallina migliore esce fra le prime r siamo fregati, quindi queste situazioni non contribuiscono alla nostra probabilità di vittoria.

   Supponiamo invece che la pallina migliore esca come $(r+1)$-esima: allora certamente la prendiamo! Questo contribuisce quindi $\frac{1}{n}$ alla nostra probabilità di vittoria (è semplicemente la probabilità che la pallina migliore esca come $(r+1)$-esima).

   Per semplicità, chiamiamo p_1 il numero sulla prima pallina estratta, p_2 il numero sulla seconda pallina estratta, e così via.

   Consideriamo ora cosa succede se la pallina migliore esce come $(r+2)$-esima: quand'è che vinciamo? Di sicuro non abbiamo visto niente di meglio finora, quindi – vista la nostra strategia – l'unico caso in cui ci siamo già fermati è quello in cui p_{r+1} è più grande di tutti i numeri $p_1, \ldots, p_r$. In altri termini: perdiamo se $\max\{p_1, \ldots, p_{r+1}\} = p_{r+1}$, e vinciamo altrimenti. Ma il massimo di $p_1, \ldots, p_{r+1}$ ha la medesima probabilità $(= \frac{1}{r+1})$ di essere p_1, di essere p_2, eccetera. Quindi: in r casi su $r+1$ vinciamo, e in un caso perdiamo. Pesando questa situazione per la sua probabilità $\frac{1}{n}$ otteniamo un contributo alla nostra probabilità di vittoria che è dato da

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{probabilità che la pallina migliore sia la } r+2\text{-esima}} \qquad \times \qquad \underbrace{\frac{r}{r+1}}_{\text{probabilità che } \max\{p_1,\ldots,p_{r+1}\} \text{ sia fra le prime } r \text{ palline}}$$

   Procediamo allo stesso modo per gli altri casi: se la pallina migliore esce in posizione $r+3$, allora vinciamo a meno di non esserci già fermati, e ci siamo già fermati solo se il massimo fra le prime $r+2$ palline è p_{r+1} o p_{r+2} – quindi perdiamo in 2 casi su $r+2$, e vinciamo nei restanti r, da cui un contributo alla nostra probabilità di vittoria totale dato da $\frac{1}{n} \times \frac{r}{r+2}$. Continuando in questo modo, si vede che la probabilità di vittoria totale è

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+2} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{n-1}$$

   come voluto (ci fermiamo a $\frac{r}{n-1}$ perché se la pallina migliore è estratta come ultima abbiamo r casi favorevoli sulle $n-1$ palline già estratte).

2. Mostriamo per induzione che la differenza $H_{2n} - H_n$ cresce al crescere di n: in effetti si ha

$$H_{2n+2} - H_{n+1} = H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1},$$

   e la quantità $\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1}$ è positiva perché $\frac{1}{2n+2}$ e $\frac{1}{2n+1}$ sono entrambi maggiori o uguali a metà di $\frac{1}{n+1}$. Si ottiene quindi che $H_{2n} - H_n$ è maggiore o uguale a $H_2 - H_1 = \frac{1}{2}$.

3. Basta prendere $r = k+1$: la formula del punto 1 ci dice allora che la nostra probabilità di vittoria è

$$\frac{k+1}{2k+1} \left(H_{2k} - H_k \right),$$

   che per il punto precedente è almeno $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{k+1}{2k+1} > \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

4 Una curiosa proprietà aritmetica

Per risolvere questo esercizio è, se non necessario, certamente molto utile introdurre la nozione di **congruenza**. Diciamo che due interi a, b sono **congrui** modulo un terzo intero m se m divide la differenza $a - b$; si scrive solitamente $a \equiv b \pmod{m}$. Osserviamo che due numeri sono congrui modulo m se e soltanto se lasciano lo stesso resto nella divisione per m.

Esempi. $17 \equiv 7 \pmod{10}$, $5050 \equiv 721 \cdot 7 + 3 \equiv 3 \pmod{7}$, $21 \equiv 0 \pmod{3}$.

Le seguenti proprietà non sono difficili da verificare (una volta che qualcuno vi dice che sono vere!):

- se si ha $a \equiv b \pmod{m}$ e $a' \equiv b' \pmod{m}$, allora $a + a' \equiv b + b' \pmod{m}$
- similmente, se si ha $a \equiv b \pmod{m}$ e $a' \equiv b' \pmod{m}$, allora $aa' \equiv bb' \pmod{m}$

La relazione di congruenza si comporta dunque, sotto molti punti di vista, come la relazione di uguaglianza. Un punto più sottile, ma fondamentale per la soluzione, è il seguente:

- Siano a ed m due interi fra loro coprimi. Allora esiste quello che si chiama l'**inverso** di a modulo m, ovvero un intero b tale che $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

La dimostrazione dell'esistenza dell'inverso segue abbastanza facilmente dalla cosiddetta **identità di Bézout** (a sua volta una conseguenza dell'algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore): dati due interi coprimi a ed m, esistono interi b e n tali che $ab + mn = 1$. Ma se questo è vero allora si ha anche $ab + mn \equiv 1 \pmod{m}$, perché m divide $(ab + mn) - 1 = 0$, e quindi anche $ab \equiv 1 \pmod{m}$, perché m divide sia $ab + mn - 1$ che mn, e quindi divide la differenza, ovvero $ab - 1$; ma per la nostra definizione di congruenza questo vuole proprio dire $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

Questa nozione di inverso permette, almeno in una certa misura, di *dividere* entrambi i lati di una congruenza per uno stesso numero. Questo sarà reso più chiaro – spero! – da un esempio: supponiamo di voler risolvere l'equazione $5x \equiv 4 \pmod{7}$. Siccome 5 e 7 sono coprimi, sappiamo dalla teoria che deve esistere l'inverso di 5 modulo 7: siccome si ha $3 \cdot 5 \equiv 15 \equiv 1 \pmod{7}$, l'inverso di 5 modulo 7 è 3. Per risolvere l'equazione $5x \equiv 4 \pmod{7}$ vorremmo dividere per 5 da entrambi i lati, ma non sappiamo bene cosa questo voglia dire; quello che possiamo fare, però, è moltiplicare entrambi i lati per 3 (l'inverso di 5) per ottenere

$$15x \equiv 4 \cdot 3 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 12 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{7}.$$

Il primo passaggio è quello cruciale: qualunque valore abbia l'intero x, siccome si ha $15 \equiv 1 \pmod{7}$, si ha anche $15x \equiv x \pmod{7}$.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per la soluzione dell'esercizio. Osserviamo che nel testo del problema si introduce un intero b che è semplicemente l'inverso di a modulo $2n$; l'esistenza di b è data come ipotesi nel testo, ma per quanto abbiamo discusso sopra è in effetti implicata dall'ipotesi che a e $2n$ siano coprimi.

Siano $A_1 = \{s \in S_a : 0 \leq s \leq n-1\}$ e $A_2 = \{s \in S_a : n \leq s \leq 2n-1\}$. La somma degli elementi di S_a è uguale alla somma Σ_1 degli elementi di A_1 più la somma Σ_2 degli elementi di A_2.

È facile vedere che ogni classe di resto modulo n è rappresentata una e una sola volta dagli elementi di S, per cui dato $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ abbiamo o $i \in A_1$ o $i + n \in A_2$. Ne segue che $\Sigma_a = \Sigma_1 + \Sigma_2$ è dato dalla somma dei numeri $0, 1, 2, \ldots, n-1$, che è uguale a $\frac{(n-1)n}{2}$, più n volte la cardinalità di A_2. In formule,

$$\Sigma_a = \frac{n(n-1)}{2} + n|A_2|.$$

D'altro canto chiaramente $|A_2| + |A_1| = |S_a| = n$, per cui $|A_2| = n - |A_1| = n - N_a$, e quindi

$$\Sigma_a = \frac{n^2 - n}{2} + n(n - N_a) = \frac{3n^2 - n}{2} - nN_a.$$

Definiamo B_1, B_2 e N_b come sopra, ma relativamente all'insieme B. Ripetendo il ragionamento precedente abbiamo $\Sigma_b = \frac{3n^2-n}{2} - nN_b$, quindi basta dimostrare $N_a = N_b$. Dimostriamo questa uguaglianza stabilendo una bigezione fra gli insiemi A_1 e B_1. Notiamo che a_1 è un elemento di A_1 se e soltanto se esiste un intero i per cui siano verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 1 \le a_1 \le n \\ 1 \le i \le n \\ a_1 \equiv ai \pmod{2n} \end{cases}$$

Mostriamo che i è un elemento di B_1. In effetti, i appartiene a B_1 se e solo se esiste un intero j per cui

$$\begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \\ i \equiv bj \pmod{2n} \Leftrightarrow ai \equiv j \pmod{2n}, \end{cases}$$

e queste condizioni sono certamente soddisfatte per $j = a_1$. Osserviamo che nello stabilire l'equivalenza $i \equiv bj \pmod{2n} \Leftrightarrow ai \equiv j \pmod{2n}$ si è usato il fatto che $ab \equiv 1 \pmod{2n}$: si passa da una congruenza all'altra moltiplicando entrambi i membri per a o per b rispettivamente. Viceversa, se $b_1 \in B_1$, allora (per qualche intero i) abbiamo

$$\begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le b_1 \le n \\ b_1 \equiv bi \pmod{2n}, \end{cases}$$

e queste sono esattamente le condizioni che garantiscono che i sia un elemento di A_1. In altri termini, la bigezione è data da

$$f: \begin{array}{ccc} A_1 & \to & B_1 \\ ai \bmod 2n & \mapsto & i \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} B_1 & \to & A_1 \\ bj \bmod 2n & \mapsto & j \end{array}$$

Esempio. Consideriamo il caso $n = 7, a = 3, b = 5$. I multipli di a che ci interessano sono i seguenti:

i	1	2	3	4	5	6	7
$ai \bmod 2n$	3	6	9	12	1	4	7

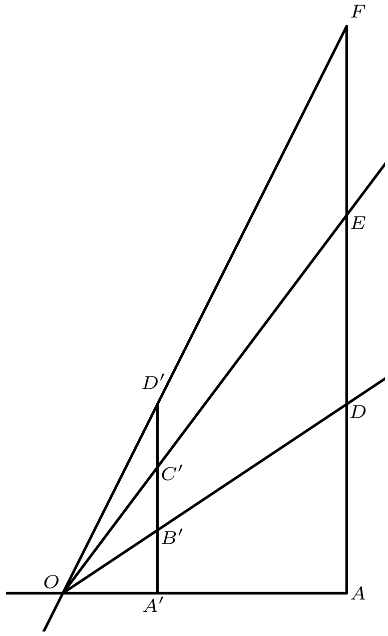
Fra questi, i membri di A_1 sono $3, 6, 1, 4$, in corrispondenza di $i = 1, 2, 5, 6$. Ora consideriamo i multipli di b:

i	1	2	3	4	5	6	7
$bi \bmod 2n$	5	10	1	6	11	2	7

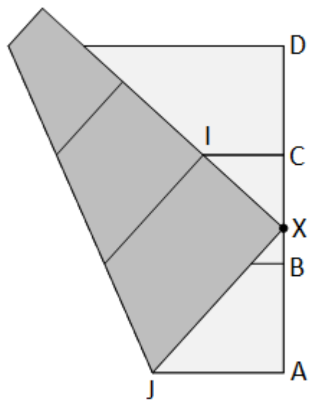
Quelli in B_1 sono esattamente $5, 1, 6, 2$, ovvero i valori di i tali che ai appartiene ad A_1.

5 Origami

Dividere un segmento in tre parti uguali non è difficile, ad esempio usando riga e compasso: costruiamo innanzitutto due segmenti DE ed EF di lunghezza 1 allineati con AD (dapprima usiamo la riga per tracciare la retta AD. Poi, puntando il compasso in D con apertura AD, tracciamo una circonferenza che interseca la retta AD nel punto E. Infine, puntando il compasso in E con apertura ED, tracciamo una circonferenza che interseca la retta AD in F). A questo punto tracciamo le rette AA' e FD', che si intersecheranno in un certo punto O. Per il teorema di Talete, le rette OD e OE intersecano $A'D'$ in due punti che dividono il segmento AD in tre parti uguali (la dimostrazione è simile a quella della seconda parte di questo problema, quindi omettiamo i dettagli).



Veniamo ora al fatto che il rapporto a/b sia uguale a $\sqrt[3]{2}$.



Con riferimento alla figura, siano $a = DX$, $b = XA$ e $c = AJ$. La nostra tesi è $(a/b)^3 = 2$, ovvero $a^3 = 2b^3$. Scriveremo ora alcune relazioni che coinvolgono le quantità a, b, c:

1. Innanzitutto si ha $a+b = AD$, perché l'unione dei segmenti AX e XD è proprio il segmento AD.

2. In secondo luogo, siccome i segmenti XJ e JA costituiscono anch'essi un lato del quadrato (che è stato ripiegato, ma non per questo ha cambiato lunghezza), si ha anche $XJ + c = XJ + JA = AA' = AD$. D'altro canto, il triangolo AJX è rettangolo in A, e quindi per il teorema di Pitagora abbiamo

$$c^2 + b^2 = XJ^2 = (AD - c)^2 = (a + b - c)^2,$$

da cui ricaviamo

$$c^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2c(a + b) \Rightarrow c = \frac{a(a + 2b)}{2(a + b)}.$$

3. Il segmento CX può essere ottenuto come $DX - DC = a - \frac{1}{3}AD = a - \frac{1}{3}(a+b) = \frac{2a-b}{3}$. Inoltre, per costruzione, il segmento XI è un terzo del lato del quadrato di partenza, dunque $XI = \frac{1}{3}(a+b)$.

4. Resta solo da osservare che i triangoli CXI e AJX sono simili: in effetti gli angoli in C ed in A sono retti, mentre

$$\widehat{CXI} = 180° - 90° - \widehat{JXA} = 90° - \widehat{JXA} = \widehat{AJX},$$

per cui questi due triangoli hanno due angoli uguali, e quindi sono simili. La similitudine implica

$$\frac{CX}{XI} = \frac{AJ}{JX},$$

che per quanto già osservato si riscrive come

$$\frac{(2a-b)/3}{(a+b)/3} = \frac{c}{a+b-c} = \frac{\frac{a(a+2b)}{2(a+b)}}{a+b-\frac{a(a+2b)}{2(a+b)}}$$

Ora si tratta solo di fare qualche calcolo. Semplifichiamo la prima e ultima frazione moltiplicando sopra e sotto per 3 (rispettivamente per $2(a+b)$), ottenendo

$$\frac{2a-b}{a+b} = \frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2 - a(a+2b)}$$

da cui, moltiplicando entrambi i membri per $(a+b)(2(a+b)^2 - a(a+2b))$, abbiamo

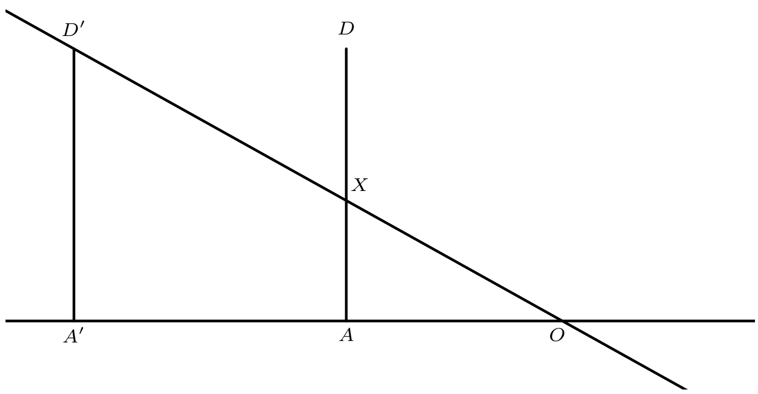
$$(2a-b)(2(a+b)^2 - a(a+2b)) = a(a+2b)(a+b);$$

prendendo coraggio e sviluppando otteniamo

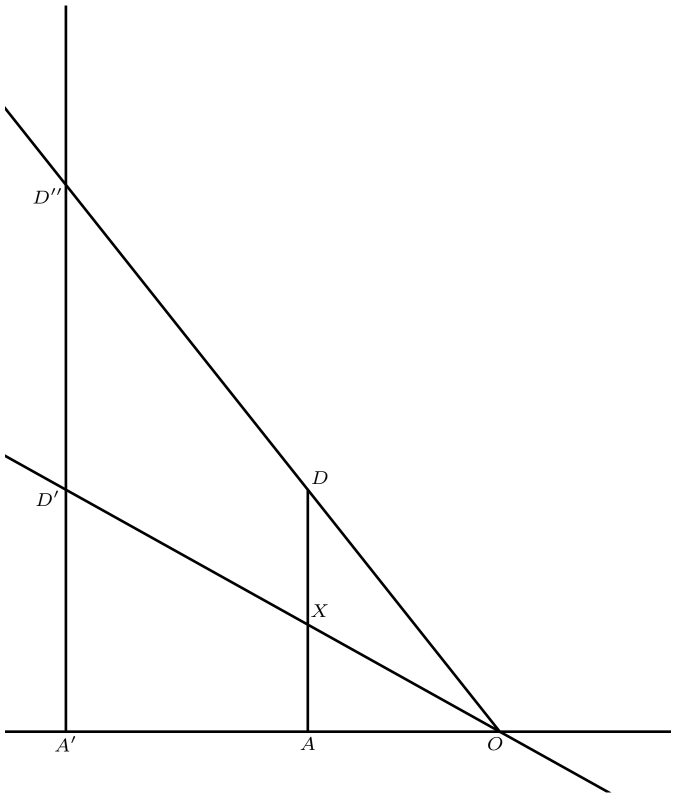
$$2a^3 + 3a^2b + 2ab^2 - 2b^3 = a^3 + 2ab^2 + 3a^2b \Leftrightarrow a^3 = 2b^3$$

come voluto.

Per la seconda parte descriviamo la costruzione sulla medesima figura usata finora, ma una semplice variante funzionerebbe per qualunque coppia di rette parallele, con un segmento di lunghezza 1 segnato sulla prima e due segmenti di rapporto $\sqrt[3]{2}$ segnati sulla seconda. Tracciamo intanto la retta $A'A$ e la retta $D'X$, che si incontreranno in un certo punto O:



Tracciamo quindi la retta passante per O e D e intersechiamola con il prolungamento della retta $A'D'$, ottenendo il punto D'':



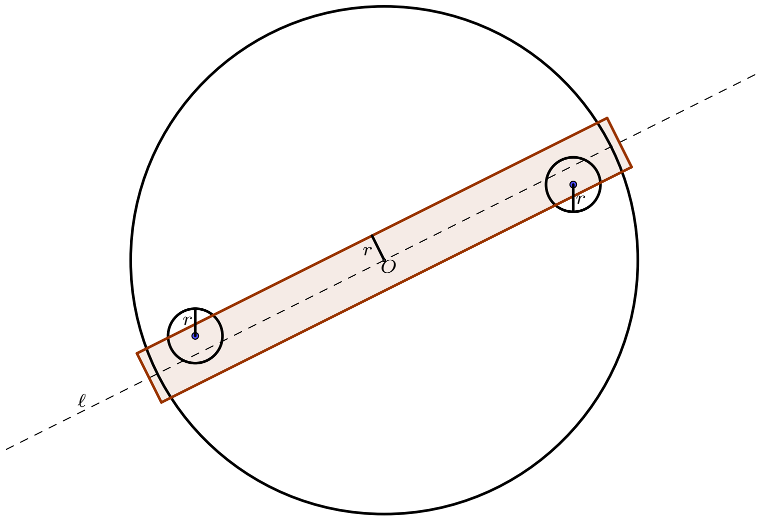
Siccome le rette AD e $A'D'$ sono parallele, il teorema di Talete assicura che i rapporti $D''A'/D'A'$ e DA/XA sono uguali. Siccome il segmento $D'A'$ ha lunghezza 1 per ipotesi e il rapporto $\frac{DA}{XA}$ è $\sqrt[3]{2}$ per la prima parte del problema, otteniamo che $D''A' = D'A' \cdot \frac{DA}{XA} = \sqrt[3]{2}$ come voluto.

6 Il giardino di Minkowski

1. Disegniamo sul piano cartesiano la griglia quadrata formata dalle rette (orizzontali e verticali) passanti per i punti a coordinate intere. In questo modo il piano è suddiviso in tanti quadrati 1×1. Tagliamo ora il piano in tutti questi quadrati (alcuni dei quali conterranno parti dell'insieme M – possiamo pensarli come pezzi di un gigantesco puzzle) e immaginiamo di sovrapporli uno all'altro in un'enorme pila. Siccome l'area di M è maggiore di 1, mentre l'area del quadrato è 1, quando consideriamo questa pila di quadrati ci saranno due punti di M che si trovano uno sopra l'altro (altrimenti avremmo tagliato l'insieme M in pezzi che coprono al massimo un quadrato 1×1, contraddicendo l'ipotesi che l'area di M sia strettamente maggiore di 1). Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti di M che si vanno a sovrapporre quando facciamo l'operazione descritta: un attimo di riflessione rivela che questo vuol dire esattamente che $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ sono interi, come voluto.

2. Applicando il punto precedente all'insieme $\frac{1}{2}M$ scopriamo che esistono (x_1, y_1) e (x_2, y_2) in $\frac{1}{2}M$ tali che $x_1 - x_2, y_1 - y_2$ siano interi. Detto altrimenti, esistono due punti (a_1, b_1) e (a_2, b_2) in M tali che $\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2$ e $\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2$ siano interi. Siccome M è simmetrico e contiene (a_2, b_2), sappiamo che contiene anche il punto $(-a_2, -b_2)$. Inoltre, siccome M è convesso, contiene anche il punto medio fra (a_1, b_1) e $(-a_2, -b_2)$, che ha coordinate $\left(\frac{a_1-a_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2}\right)$. Per quanto già visto queste coordinate sono intere, come voluto.

3. Consideriamo una qualsiasi retta ℓ passante per l'origine. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ molto piccolo (che sarà precisato dopo) e costruiamo un rettangolo R di lati $2r$ e $\frac{2}{r} + 2\varepsilon$, con il lato lungo $2r$ perpendicolare ad ℓ, e che abbia la retta ℓ come asse di simmetria (vedere figura).



L'area del rettangolo è $4 + 4\varepsilon r > 4$, quindi per il teorema di Minkowski R contiene un punto (x, y) a coordinate intere diverso da $(0, 0)$. Quanto è lontano (x, y) dall'origine? Beh, al massimo tanto quanto la semi-diagonale del rettangolo, ovvero al massimo $r^2 + \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)^2 < r^2 + (50 + \varepsilon)^2$. Ora chiaramente $r < 1$ (altrimenti il gazebo starebbe *dentro* uno degli alberi!), quindi a patto di scegliere ε estremamente piccolo possiamo essere sicuri che $x^2 + y^2 \leq r^2 + (50 + \varepsilon)^2 < 50^2 + 1$. Ma d'altro canto $x^2 + y^2$ è un intero, quindi $x^2 + y^2 \leq 50^2$, e quindi in (x, y) è piantato un albero! Siccome il lato corto del rettangolo è $2r$, è immediato rendersi conto che – siccome (x, y) è contenuto in R – il cerchio di centro (x, y) e raggio r interseca la retta ℓ. Nella nostra analogia, questo vuol dire che guardando lungo la direzione ℓ il nostro sguardo incrocia un albero!

Per chi fosse preoccupato del fatto che l'albero che abbiamo trovato blocca la visuale solo lungo una delle due 'direzioni' di visuale lungo ℓ, basta osservare che l'albero piantato in $(-x, -y)$ blocca la visuale nella direzione opposta.

7 Le funzioni binomiali

1. Possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} &= \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{(m+1)!} - \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m)}{(m+1)!} \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{(m+1)!}\left((x+1)-(x-m)\right) \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{(m+1)!}(m+1) \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{m!} \\ &= \binom{x}{m},\end{aligned}$$

dove nel passaggio dalla prima alla seconda riga abbiamo effettuato un raccoglimento a fattore comune e nella penultima uguaglianza abbiamo sfruttato l'uguaglianza $(m+1)! = (m+1) \cdot m!$.

2. Chiamiamo $p_0(x) = \binom{x}{0} = 1$, $p_1(x) = \binom{x}{1} = x$, $p_2(x) = \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$, $p_3(x) = \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$ e $p_4(x) = \binom{x}{4} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$ le prime funzioni binomiali. Allora $(x+1)^2 =$

$x^2 + 2x + 1 = 2p_2(x) + 3p_1(x) + p_0(x)$. Ora noi vorremmo trovare un'espressione $p(x)$ tale che $p(x+1) - p(x) = x^2 + 2x + 1 = 2p_2(x) + 3p_1(x) + p_0(x)$. Ma sappiamo che vale $p_3(x+1) - p_3(x) = p_2(x)$, e abbiamo formule simili per $p_2(x), p_1(x)$, per cui abbiamo un candidato naturale:

$$p(x) = 2p_3(x) + 3p_2(x) + p_1(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6},$$

che *per come è stato costruito* rispetta $p(x+1) - p(x) = (x+1)^2$. Ma d'altro canto $p(1) = 1$, e quindi per induzione otteniamo immediatamente che $p(n)$ è la somma dei primi n quadrati (in effetti è vero per $n = 1$, e d'altro canto $p(n+1) = p(n) + (n+1)^2$: se $p(n)$ è la somma dei primi n quadrati, questa formula mostra che $p(n+1)$ è la somma dei primi $n+1$ quadrati).

Nel caso della somma dei cubi possiamo ragionare in modo del tutto analogo: si trova facilmente $(x+1)^3 = 6p_3 + 12p_2 + 7p_1 + p_0$, da cui "indoviniamo" che la somma dei cubi dei primi n interi positivi è data da $6p_4(n) + 12p_3(n) + 7p_2(n) + p_1(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Procediamo per induzione sul grado. Se $q(x)$ è un polinomio di grado 1, ovvero $q(x) = ax+b$, e per ogni valore intero di x anche $q(x)$ è intero, allora sia $b = q(0)$ che $a+b = q(1)$ sono interi, da cui sia a che b sono interi. Questo dimostra il passo base dell'induzione. Consideriamo ora un generico polinomio $q(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0$ con la proprietà del testo e di grado $d \geq 2$. Definiamo $r(x) = q(x+1) - q(x)$. Allora anche il polinomio $r(x)$ ha la proprietà del testo: se x è intero (e quindi anche $x+1$ lo è), allora per ipotesi $q(x)$ e $q(x+1)$ sono interi, e quindi $r(x) = q(x+1) - q(x)$ è intero. Ma qual è il termine di grado massimo di $r(x)$? Affermiamo che è $d \cdot a_d \cdot x^{d-1}$. Consideriamo infatti $q(x+1) - q(x)$, ignorando però tutti i termini di grado x^{d-2} o inferiori. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} q(x+1) - q(x) &= a_d(x+1)^d + a_{d-1}(x+1)^{d-1} - a_d x^d - a_{d-1}x^{d-1} + \text{ termini di grado} \leq d-2 \\ &= a_d(x^d + dx^{d-1}) + a_{d-1}x^{d-1} - a_d x^d - a_{d-1}x^{d-1} + \text{ termini di grado} \leq d-2 \\ &= da_d x^{d-1} + \text{ termini di grado} \leq d-2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato lo sviluppo del binomio di Newton:

$$(x+1)^d = x^d + dx^{d-1} + \text{ termini di grado} \leq d-2,$$

e similmente per $(x+1)^{d-1}$. Questo dimostra l'affermazione sul termine di grado massimo di $r(x)$. D'altro canto, abbiamo già visto che $r(x)$ è un polinomio che assume valori interi per valori interi di x, e il suo grado è $d-1$, quindi per ipotesi induttiva sappiamo che il *suo* coefficiente di grado massimo, moltiplicato per $(d-1)!$, è intero. Otteniamo allora che $(d-1)! \cdot d \cdot a_d$ è intero, cioè che $d! \cdot a_d$ è intero come voluto.

8 Funzioni simmetriche

1. L'identità algebrica data è immediata da controllare sviluppando il membro destro. Essa implica

$$ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} = \frac{6^2 - 28}{2} = 4,$$

dove abbiamo usato i valori di $a+b+c = 6$ e $a^2+b^2+c^2 = 28$ dati dal sistema.

2. Con un po' di lavoro si riesce ad ottenere l'identità

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+xz+yz).$$

Dal momento che conosciamo $a+b+c = 6$, $ab+bc+ca = 4$ e $a^3+b^3+c^3 = 108$, sostituendo nell'identità qui sopra otteniamo

$$108 = 3abc + 6^3 - 3 \cdot 6 \cdot 4,$$

da cui facilmente $abc = -12$.

3. Sviluppando
$$(t-a)(t-b)(t-c)$$
si ottiene
$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc,$$
ovvero – visti i punti precedenti – si ha
$$(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-6t^2+4t+12,$$
da cui $c_1=-6, c_2=4$ e $c_3=12$.

4. Chiamiamo $A=a^2b+b^2c+c^2a$ e $B=ab^2+bc^2+ca^2$. Osserviamo ora che $A+B$ è un'espressione simmetrica in a,b,c, quindi (visto il teorema fondamentale delle funzioni simmetriche!) si deve poter esprimere tramite $s=a+b+c, q=ab+bc+ca, p=abc$. Con un po' di tentativi si arriva a
$$A+B=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=6\cdot 4+3\cdot 12=60.$$
D'altra parte, si può notare che
$$B-A=(a-b)(b-c)(c-a),$$
e quindi facendo il quadrato si ottiene
$$(B-A)^2=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$
Usando l'identità suggerita nel testo, questa quantità è uguale a
$$\begin{aligned}(B-A)^2 &= -27p^2-4ps^3+q^2s^2+18pqs-4q^3\\ &= -27(-12)^2-4\cdot(-12)\cdot(6)^3+4^2\cdot 6^2+18\cdot 6\cdot 4\cdot(-12)-4\cdot 4^3\\ &= 1616.\end{aligned}$$
Infine, osserviamo che $B-A=(a-b)(b-c)(c-a)$ è una quantità negativa, perché $a>b>c$ implica $a-b>0, b-c>0$ e $c-a<0$. Ne segue che $B-A=-\sqrt{1616}$. Siccome sappiamo anche $A+B=60$, possiamo ora ottenere facilmente
$$A=\frac{(A+B)+(A-B)}{2}=\frac{60+\sqrt{1616}}{2}=30+\sqrt{404}.$$

9 Fibonacci e ricorrenze

1. Ecco una tabella di qualche valore (approssimato) del rapporto F_{n+1}/F_n:

n	F_{n+1}/F_n
2	2.000000000
3	1.500000000
4	1.666666667
5	1.600000000
6	1.625000000
7	1.615384615
8	1.619047619
9	1.617647059
10	1.618181818
11	1.617977528
12	1.618055556
13	1.618025751
14	1.618037135
15	1.618032787
16	1.618034448

Sembra piuttosto chiaro che il rapporto F_{n+1}/F_n converge verso un valore approssimativamente pari a 1.6180... Spiegheremo questa osservazione nei punti successivi.

2. Assumendo $c \neq 0$ (e $\lambda \neq 0$ come suggerito nel testo), l'equazione data è equivalente a quella che si ottiene dividendo tutto per c e per λ^{n-1}, ovvero $\lambda^2 = \lambda + 1$. Le soluzioni di questa equazione sono $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

   Nota. Si osservi ora che $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033989...$

3. Sostituendo G_{n-1}, G_n, G_{n+1} con la loro espressione in termini di $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2$ si tratta di verificare che
$$c_1\lambda_1^{n+1} + c_2\lambda_2^{n+1} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1}.$$
   Accorpando alcune degli addendi si ottiene la condizione equivalente
$$c_1\lambda_1^{n+1} + c_2\lambda_2^{n+1} = c_1(\lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}) + c_2(\lambda_2^n + \lambda_2^{n-1});$$
   ma d'altra parte λ_1, λ_2 sono stati scelti precisamente in virtù del fatto che soddisfano $\lambda_1^n + \lambda_1^{n-1} = \lambda_1^{n+1}$ e $\lambda_2^n + \lambda_2^{n-1} = \lambda_2^{n+1}$, per cui la condizione scritta qui sopra è certamente soddisfatta.

4. Cerchiamo ora c_1, c_2 in modo tale che la successione G_n definita come sopra soddisfi anche $G_0 = 0, G_1 = 1$, ovvero vogliamo che i nostri c_1, c_2 rispettino le condizioni
$$\begin{cases} G_0 = c_1\lambda_1^0 + c_2\lambda_2^0 = 0 \\ G_1 = c_1\lambda_1^1 + c_2\lambda_2^1 = 1. \end{cases}$$
   Dato che $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 1$, la prima equazione fornisce semplicemente $c_2 = -c_1$. Sostituendo nella seconda si ottiene
$$c_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 1,$$
   e siccome $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ la differenza $\lambda_1 - \lambda_2$ vale $\sqrt{5}$. Otteniamo allora $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

   La successione
$$\widetilde{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \tag{4}$$
   soddisfa allora $\tilde{F}_0 = F_0, \tilde{F}_1 = F_1$ e $\tilde{F}_{n+1} = \tilde{F}_n + \tilde{F}_{n-1}$, da cui è facile ricavare che $\tilde{F}_n = F_n$ per ogni intero positivo n, ovvero che la formula (4) (detta a volte **formula di Binet**) effettivamente fornisce il valore dei numeri di Fibonacci.

5. Si noti che $\lambda_2 \approx -0.6180$ è minore di 1 in valore assoluto, per cui le potenze λ_2^n si avvicinano (molto velocemente!) a zero al crescere di n. L'n-esimo numero di Fibonacci è quindi approssimato in modo eccellente da $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, per cui il rapporto F_{n+1}/F_n è numericamente molto vicino a
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \Big/ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
   Questo spiega finalmente l'osservazione numerica del punto 1!

10 Polinomi e quadrati

1. Si tratta semplicemente di sviluppare entrambi i membri: il lato sinistro è
$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = A^2C^2 + A^2D^2 + B^2C^2 + B^2D^2,$$

mentre il lato destro è

$$\begin{aligned}(AD+BC)^2+(AC-BD)^2 &= A^2D^2+2(AD)(BC)+B^2C^2+A^2C^2-2(AC)(BD)+B^2D^2\\ &= A^2D^2+B^2C^2+A^2C^2+B^2D^2\end{aligned}$$

in quanto i doppi prodotti si cancellano. È immediato constatare che queste due espressioni sono uguali.

2. Innanzitutto osserviamo che i polinomi $x^2-b_mx+c_m$ non hanno radici reali (in quanto hanno discriminante negativo), e perciò – tenuto conto che il loro termine di secondo grado ha coefficiente positivo – assumono solo valori strettamente positivi. Consideriamo allora il polinomio $r(x)=\lambda(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$: questo differisce dal polinomio $p(x)$ per un prodotto di termini positivi, e quindi si ha $r(x)\geq 0$ per ogni x reale. Similmente, se una certa radice α compare un numero pari di volte, diciamo $2k$, allora $r(x)=(x-\alpha)^{2k}s(x)$, dove $s(x)$ assume ancora solo valori non-negativi. Continuando in questo modo possiamo eliminare tutti gli α che compaiono un numero pari di volte, e restare con un prodotto

   $$s(x)=\lambda(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n),$$

   dove ora gli α_i sono tutti diversi (se due sono uguali, li raccogliamo come nel passaggio precedente). Dimostrare che ogni radice α compare un numero pari di volte in $p(x)$ è equivalente a dire che in $s(x)$, in cui abbiamo eliminato tutte le coppie di radici uguali, non resta più alcun fattore $x-\alpha_i$. Supponiamo allora per assurdo $n>0$.

   Si osservi ora che $\lambda>0$, in quanto se x_0 è un numero reale maggiore di tutti gli α_i ognuno dei fattori $x_0-\alpha_i$ è positivo, e quindi la disuguaglianza $p(x_0)=\lambda(x_0-\alpha_1)\cdots(x_0-\alpha_n)\geq 0$ mostra che $\lambda\geq 0$. Possiamo allora dividere per il numero positivo λ e lavorare invece con il polinomio $t(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, di cui sappiamo che assume solo valori maggiori o uguali a 0. Questo però è assurdo: a meno di rinominare gli α_i, possiamo supporre che $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$. Scegliamo $x_0=\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}$: allora x_0 è maggiore di α_{n-1} (e quindi anche di $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$) e minore di α_n, quindi i fattori $x_0-\alpha_i$ sono tutti positivi, tranne l'ultimo, ovvero $x_0-\alpha_n$. Il prodotto

   $$t(x_0)=\underbrace{(x_0-\alpha_1)\ldots(x_0-\alpha_{n-1})}_{\text{positivi}}\underbrace{(x_0-\alpha_n)}_{\text{negativo}}$$

   è allora negativo, contraddizione.

3. Scriviamo

   $$p(x)=\lambda(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\cdots(x-\alpha_n)^2(x^2-b_1x+c_1)\cdots(x^2-b_mx+c_m)$$

   come nel punto 2. Grazie all'identità del punto 1, basta verificare che ognuno dei fattori di questo prodotto sia una somma di due quadrati (in effetti, l'identità del punto 1 ci dice che moltiplicando somme di due quadrati otteniamo ancora somme di due quadrati). Abbiamo già visto che $\lambda>0$, quindi $\lambda=\sqrt{\lambda}^2+0^2$ è una somma di due quadrati. I fattori $(x-\alpha_i)^2$ sono ovviamente somme di due quadrati ($(x-\alpha_1)^2+0^2$). Infine,

   $$x^2-b_ix+c_i=\left(x-\frac{b_i}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{4c_i-b_i^2}\right)^2,$$

   dove $4c_i-b_i^2$ è positivo in quanto è l'opposto del discriminante del polinomio $x^2-b_ix+c_i$.

4. L'identità è una verifica diretta, che omettiamo. Essa implica chiaramente la non-negatività, in quanto una somma di quadrati di numeri reali è sempre non-negativa.

In alternativa, il risultato di non-negatività si può ottenere tramite la disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica, che (nel caso di tre numeri reali non-negativi a, b, c) assicura
$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$
Applicando tale disuguaglianza ad $a = (x^2y)^2 \geq 0, b = (xy^2)^2 \geq 0, c = 1$ si ottiene
$$\frac{x^4y^2 + x^2y^4 + 1}{3} \geq \sqrt[3]{(x^4y^2)(x^2y^4)} = x^2y^2.$$
Moltiplicando per 3 e spostando tutto nel lato sinistro della disuguaglianza otteniamo
$$x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2 \geq 0,$$
ovvero $p(x, y) \geq 0$.

5. Il coefficiente di x^6 in $p(x, y)$ è nullo. Sviluppando il quadrato di $q_i(x, y)$, vediamo che il coefficiente di x^6 in $q_i(x, y)^2$ è A_i^2. Se si ha
$$p(x, y) = q_1(x, y)^2 + \cdots + q_n(x, y)^2,$$
allora il coefficiente di x^6 nel membro sinistro è la somma dei coefficienti di x^6 nel membro destro, ovvero
$$0 = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2.$$
L'unica soluzione reale di questa equazione è $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$, in quanto una somma di numeri reali non-negativi è nulla se e solo se gli addendi sono tutti nulli.
Si continua in maniera simile: confrontando il coefficiente di x^4 otteniamo
$$0 = (E_1^2 + 2A_1H_1) + (E_2^2 + 2A_2H_2) + \cdots + (E_n^2 + 2A_nH_n),$$
e siccome sappiamo già che gli A_i sono tutti nulli otteniamo $0 = E_1^2 + \cdots + E_n^2$, da cui come sopra $E_1 = \cdots = E_n = 0$. Si confrontano poi i coefficienti di x^2 (ottenendo che tutti gli H_i sono nulli), i coefficienti di y^6 (ottenendo che i D_i sono tutti nulli), i coefficienti di y^4 (tutti i G_i sono nulli) e infine i coefficienti di y^2 (tutti gli I_i sono nulli).

6. Dal punto precedente sappiamo che $q_i(x, y) = (B_ix^2y + C_ixy^2 + F_ixy + J_i)^2$. Il coefficiente di x^2y^2 in $p(x, y)$ è -3, mentre in $(B_ix^2y + C_ixy^2 + F_ixy + J_i)^2$ è F_i^2. Se si avesse
$$p(x, y)^2 = q_1(x, y)^2 + \cdots + q_n(x, y)^2$$
si otterrebbe in particolare, confrontando i coefficienti di x^2y^2, l'equazione
$$-3 = F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2,$$
che ovviamente non ha soluzioni reali in quanto il membro destro non può essere negativo.

11 Le potenze di 2 sanno il tuo numero di telefono

1. Fissiamo un intero n. Per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$ scriviamo $k\alpha = m_k + x_k$ con $0 \leq x_k < 1$ (cioè x_k è la parte frazionaria di $k\alpha$). Suddividiamo l'intervallo $[0, 1)$ in n intervallini di lunghezza $\frac{1}{n}$. Gli $n + 1$ numeri $x_0, \ldots, x_n$ si distribuiscono in questi n intervalli, quindi c'è almeno un intervallo che ne contiene 2. Chiamiamo i, j i corrispondenti indici, con $i < j$. Allora
$$|(j - i)\alpha - (m_j - m_i)| = |j\alpha - m_j - (i\alpha - m_i)| = |x_j - x_i| < \frac{1}{n}.$$
Dividendo per $j - i$ otteniamo
$$\left|\alpha - \frac{m_j - m_i}{j - i}\right| < \frac{1}{(j - i)n} \leq \frac{1}{(j - i)^2}.$$

Basta allora prendere $\frac{p}{q} = \frac{m_j - m_i}{j-i}$.

Si noti che questa procedura produce infinite coppie p/q diverse: in effetti, l'approssimazione p/q dista da α al massimo $1/n$, e quindi, scegliendo n sempre più grande, dobbiamo necessariamente ottenere infinite approssimazioni diverse (dato che α è irrazionale, non è possibile che una delle nostre 'approssimazioni' sia in effetti uguale ad α).

2. Facciamo vedere che il teorema 2 implica il teorema 1. Supponiamo che sia possibile approssimare ogni numero reale x con numeri della forma $m - n\alpha$, con m, n interi di segno qualsiasi. Dal primo punto sappiamo che esistono infiniti numeri razionali p/q tali che $|\alpha - p/q| < \frac{1}{q^2}$, e quindi $|q\alpha - p| < \frac{1}{q}$. Dato che ne esistono infiniti, ce ne devono essere con numeratore e denominatore entrambi arbitrariamente grandi (si noti che se ad esempio il denominatore è grande, allora il numeratore p è circa $q\alpha$, e quindi è grande anch'esso). Dato che α è positivo, p e q possono essere presi concordi. Fissati x e ε, scegliamo allora:

   (a) un'approssimazione $m - n\alpha$ di x (con m, n di segno qualunque) tale che
   $$|x - (m - n\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

   (b) un numero razionale p/q, con $p > |m|$ e $q > |n|$, tale che $|q\alpha - p| < \frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Allora $m - n\alpha - (q\alpha - p)$ dista meno di $\varepsilon/2 + \varepsilon/2$ da x, e d'altro canto è della forma
   $$(p + m) - \alpha(n + q),$$
   dove per costruzione $p + m > 0$ e $n + q > 0$.

3. Supponiamo di voler approssimare il numero reale $x = [x] + \{x\}$. Applicando l'ipotesi a $y = \{x\}$, troviamo un n tale che $|y - \{n\alpha\}| < \varepsilon$. D'altro canto, $\{n\alpha\}$ è della forma $n_1\alpha + n_2$ con n_1, n_2 interi, e y è $x - [x]$ con $[x]$ intero, per cui abbiamo
   $$|x - [x] - (n_1\alpha + n_2)| < \varepsilon :$$
   basta prendere $m = [x] + n_2$ ed $n = n_1$ per avere la nostra approssimazione di x a meno di ε.

4. Dimostriamo l'affermazione del punto precedente. Dal primo punto sappiamo che esistono p, q arbitrariamente grandi tali che $|p\alpha - q| < \frac{1}{q}$. In particolare, $\{p\alpha\} < \frac{1}{q}$. Consideriamo allora le parti frazionarie dei numeri del tipo $\{np\alpha\}$: passando da n ad $n + 1$, la parte frazionaria aumenta di $\{p\alpha\} < \frac{1}{q}$ (fino a quando non 'sforiamo', andando sopra 1 – ma questo può succedere solo se la parte frazionaria di $\{np\alpha\}$ è nell'intervallo $(1-1/q, 1)$), quindi queste parti frazionarie distano al massimo $1/q$ le une dalle altre, e quindi coprono tutto l'intervallo $(0, 1)$ con 'buchi' lunghi al massimo $1/q$. Siccome q può essere scelto arbitrariamente grande, vediamo che con queste parti frazionarie ci possiamo avvicinare a meno di $1/q < \varepsilon$ ad ogni fissato numero reale y nell'intervallo $(0, 1)$.

5. Il logaritmo in base 10 di 2 è quel numero reale β tale che $10^\beta = 2$. Supponiamo che β sia razionale, $\beta = \frac{m}{n}$: si avrebbe allora $10^{m/n} = 2$, o equivalentemente $10^m = 2^n$ con m, n interi. Tuttavia, questo è chiaramente impossibile: 10^m è divisibile per 5, mentre 2^n non è lo.

6. Riprendiamo l'indicazione, e continuiamo a studiare il caso specifico di 2023. La condizione voluta è equivalente a
   $$2023 \cdot 10^m \leq 2^n < 2024 \cdot 10^m$$
   per qualche coppia di interi $n \geq 1, m \geq 0$. Passando ai logaritmi in base 10, questo è equivalente a
   $$\log_{10}(2023) + m \leq n \log_{10} 2 \leq \log_{10}(2024) + m.$$
   In altre parole, vogliamo trovare interi positivi m, n tali che $n \log 2 - m$ giaccia nell'intervallo
   $$[\log_{10}(2023), \log_{10}(2024)),$$
   e tali interi esistono per quanto visto prima, in quanto $\log_{10}(2)$ è un numero irrazionale.

5 I problemi dell'ammissione alla Scuola Normale

Nel numero 17 del giornalino degli Open Days, anziché un assortimento di problemi di vario livello, trovate una selezione di problemi comparsi nell'esame scritto di ammissione 2023 presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, rivolto ad aspiranti matematici e fisici.

La Scuola Normale Superiore è un istituto di eccellenza accademica che offre programmi di laurea triennale, magistrale e dottorato in diverse discipline umanistiche, scientifiche e sociali, inclusa matematica. I suoi studenti (triennali e magistrali) di matematica frequentano il corso di laurea in matematica dell'Università di Pisa, con l'aggiunta di alcuni esami interni e sottostando a particolari requisiti di media al fine di mantenere una borsa di studio che copre interamente vitto e alloggio per cinque anni. Vi è una forte collaborazione fra la SNS e il nostro dipartimento, sia a livello didattico che a livello di ricerca.

Avete mai considerato di tentare l'ammissione alla SNS? Siete curiosi di quali problemi vengano proposti all'esame di ammissione, famoso per essere estremamente selettivo?

Qui vi proponiamo alcuni dei problemi che i candidati hanno dovuto affrontare: se li trovaste molto difficili... non preoccupatevi, in molti sarebbero d'accordo con voi! L'esame di ammissione alla SNS richiede una seria preparazione: se ne avete la curiosità, vi consigliamo di provare a cimentarvi con tanti problemi, inclusi tutti gli altri in questa raccolta... In bocca al lupo!

1 Problema 2023/1

Trovate tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali con la proprietà che

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

per tutti gli x e y reali.

Soluzione

Mostreremo che i polinomi $p(x)$ con la proprietà voluta sono tutti e soli quelli della forma $p(x) = ax + b$ con $b \geq 0$.

L'idea chiave di questa soluzione è quella di procedere in un modo che permetta di ignorare tutti i termini di $p(x)$ salvo quello di grado massimo. Possiamo ottenere questo risultato passando al limite per $x \to \pm\infty$ nella relazione del testo: così facendo, il 'termine dominante' (cioè quello di grado massimo) sarà l'unico che conta. Diamo ora i dettagli di un possibile approccio che segua questa idea.

Sia d il grado del polinomio $p(x)$ e scriviamo $p(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Si osservi che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^d} = a_d, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{x^d} = a_d.$$

Consideriamo la disuguaglianza del testo, scegliamo $y = x$, dividiamo per x^d con $x > 0$ (questo non cambia il verso della disuguaglianza), e prendiamo il limite per $x \to \infty$: si ottiene

$$\frac{p(2x)}{x^d} \leq \frac{2p(x)}{x^d} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{p(2x)}{x^d} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{2p(x)}{x^d}.$$

Osserviamo adesso che $p(2x)$ è un polinomio di grado d il cui coefficiente di grado massimo è $2^d a_d$, mentre $2p(x)$ è un polinomio di grado d il cui coefficiente di grado massimo è $2a_d$. I limiti che appaiono nella disuguaglianza precedente sono quindi $2^d a_d$ e $2a_d$, e otteniamo $2^d a_d \leq 2a_d$.

Scegliamo adesso $x = y = -t$ con $t > 0$ nella disuguaglianza del testo:

$$p(-2t) \leq 2p(-t).$$

Come sopra, osserviamo che $p(-2t)$ è un polinomio in t di grado d il cui termine di grado più alto è $(-2)^d a_d t^d$, e $2p(-t)$ è un polinomio di grado d il cui termine di grado più alto è $2(-1)^d a_d t^d$. Dividiamo per $t^d > 0$ e passiamo al limite per $t \to \infty$, ottenendo

$$(-1)^d 2^d a_d = (-2)^d a_d \leq 2(-1)^d a_d.$$

Distinguiamo ora due casi:

1. se d è pari si ha $(-1)^d = 1$, e le due disuguaglianze ottenute si riducono alla stessa, ovvero
$$2^d a_d \leq 2a_d.$$
D'altro canto, scegliendo nella disuguaglianza del testo $y = -x$ con $x > 0$ troviamo
$$p(0) \leq p(x) + p(-x),$$
dove $p(x)+p(-x)$, dal momento che d è pari, è un polinomio di grado d con termine di grado più alto $2a_d x^d$. Dividendo ancora una volta per $x^d > 0$ e passando al limite per $x \to \infty$, otteniamo
$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{p(0)}{x^d} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)+p(-x)}{x^d} = 2a_d,$$
cioè $a_d \geq 0$ (e in effetti $a_d > 0$, perché stiamo supponendo che $p(x)$ sia di grado esattamente d). Usando $a_d > 0$, dalla disuguaglianza $2^d a_d \leq 2a_d$ segue $2^d \leq d$, cioè $d \leq 1$, e dato che d è pari si deve avere $d = 0$.

2. se d è dispari si ha $(-1)^d = -1$, e abbiamo ottenuto le disuguaglianze
$$2^d a_d \leq 2a_d, \quad -2^d a_d \leq -2a_d,$$
che insieme implicano $2^d a_d = 2a_d$. Dal momento che a_d è diverso da 0, questo implica $2^d = 2$, e cioè $d = 1$.

Siamo perciò interessati a capire quali polinomi di grado al massimo 1 rispettino l'ipotesi del testo: scrivendo $p(x) = ax + b$, ci chiediamo se sia verificata la disuguaglianza
$$p(x+y) = a(x+y) + b \leq ax + b + ay + b = p(x) + p(y).$$
I termini $a(x+y)$ e $ax + ay$ si semplificano, e resta solo la condizione $b \leq 2b$, cioè $b \geq 0$. Concludiamo allora, come già preannunciato, che i polinomi che soddisfano la condizione del testo sono tutti e soli i polinomi $p(x) = ax + b$ con $b \geq 0$.

2 Problema 2023/2

Se a è un parametro reale positivo, calcolate il numero $N(a)$ di soluzioni in x dell'equazione
$$\sin\bigl(a(\sin x + \cos^2 x)\bigr) = 0$$
con $0 \leq x \leq \pi/2$.

Soluzione

La funzione seno si annulla precisamente nei multipli interi di π, per cui stiamo cercando di contare il numero di valori di x con $0 \leq x \leq \pi/2$ per cui
$$a(\sin x + \cos^2(x)) = k\pi,$$
dove k è un intero. Osserviamo che, al variare di x nell'intervallo $[0, \pi/2]$, la funzione $\sin(x)$ assume una e una sola volta ciascun valore nell'intervallo $[0, 1]$. Siamo quindi interessati ai valori assunti dalla funzione
$$\sin x + \cos^2(x) = \sin x + 1 - \sin^2(x)$$
al variare di $\sin(x)$ fra 0 e 1. Chiamiamo per semplicità $t = \sin(x)$ e studiamo la funzione $f(t) = -t^2 + t + 1$ sull'intervallo $[0, 1]$. Tale funzione assume valore massimo per $t = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$, per cui $f(1/2) = 5/4$, e valore minimo agli estremi dell'intervallo, per cui $f(0) = f(1) = 1$.

Inoltre, ogni valore nell'intervallo $[1, 5/4]$ è assunto esattamente due volte, tranne $5/4$, che è assunto esattamente una volta.

Ne concludiamo che la funzione $a(\sin x + \cos^2(x))$ assume tutti e soli i valori nell'intervallo $[a, 5/4a]$, ciascuno due volte, tranne $5/4a$, che è assunto una volta sola. Distinguendo per semplicità i due casi,

1. se $\frac{5}{4}a$ *non* è un multiplo intero di π, il numero $N(a)$ di soluzioni dell'e-quazione proposta nel testo è il doppio del numero di multipli di π nell'intervallo $[a, 5/4a]$.

2. se invece $\frac{5}{4}a$ è un multiplo intero di π, il numero $N(a)$ voluto è uno meno del doppio del numero dei multipli di π nell'intervallo $[a, 5/4a]$.

Contiamo infine il numero di multipli di π nell'intervallo $[a, 5/4a]$. Il più piccolo multiplo di π maggiore o uguale ad a è $\pi \cdot \lceil \frac{a}{\pi} \rceil$, dove $\lceil x \rceil$ denota la parte intera superiore del numero reale x (ovvero il più piccolo intero maggiore o uguale a x), e il più grande multiplo di π minore o uguale a $\frac{5}{4}a$ è $\pi \cdot \lfloor \frac{5a}{4\pi} \rfloor$, dove $\lfloor x \rfloor$ denota la parte intera inferiore di x (ovvero il più grande intero minore o uguale ad x). La risposta è quindi

$$2\left(\lfloor\frac{5a}{4\pi}\rfloor - \lceil\frac{a}{\pi}\rceil + 1\right) - \begin{cases} 0, \text{ se } \frac{5a}{4} \text{ non è un multiplo intero di } \pi \\ 1, \text{ se } \frac{5a}{4} \text{ è un multiplo intero di } \pi \end{cases}$$

3 Problema 2023/3

Siano R un numero reale positivo e k un intero positivo; sia inoltre X un insieme di punti contenuti nel disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$$

di centro l'origine e raggio R del piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che, per ogni punto (x_0, y_0) di $\mathbb{R}^2$, il disco $\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1\}$ di raggio 1 centrato in (x_0, y_0) contenga al più k punti di X (in altre parole: ogni punto del piano $\mathbb{R}^2$ ha distanza strettamente minore di 1 da al più k punti di X). Dimostrate che il numero n dei punti di X soddisfa la disuguaglianza $n \leq k(R+1)^2$.

Soluzione

Per ogni punto P di X consideriamo il disco D_P di raggio 1 centrato in P. Ogni disco D_P è centrato in un punto di D (per ipotesi, i punti di X stanno in D) e ha raggio al massimo 1, perciò D_P è interamente contenuto nel disco

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R + 1\}$$

centrato nell'origine e di raggio $R + 1$.

Osserviamo inoltre che ogni punto Q di D' è contenuto al massimo in k dischi D_P: questa è una conseguenza dell'ipotesi del testo, perché se Q appartiene a D_P, allora P appartiene al disco di raggio 1 centrato in Q, e per ipotesi tale disco contiene al massimo k punti di X. Ne segue che la somma delle aree dei dischi D_P è al massimo k volte l'area del disco D' (ogni punto di D' è coperto al massimo k volte). D'altro canto, l'area del singolo disco D_P è $\pi \cdot 1^2$, perché D_P è di raggio 1, e quindi la somma delle aree dei dischi D_P è $n\pi$. L'area di D' è $\pi(R + 1)^2$. Abbiamo allora ottenuto la disuguaglianza

$$n\pi \leq k\pi(R + 1)^2 \Rightarrow n \leq k(R + 1)^2,$$

come voluto.