Pisa, ottobre 2024

Matematica
il giornalino degli open days

Università di Pisa

notizie, giochi e pillole di matematica

Dipartimento di Matematica

Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Piano Nazionale
Lauree Scientifiche

Realizzato con il contributo del Piano Lauree Scientifiche – Matematica.

Su indicazione della Commissione Terza Missione.

Coordinamento: Luca Bruni

Grafica: Luca Bruni, Eva Silvestri

Realizzato grazie al contributo degli studenti del dipartimento: Federico Allegri, Andrea Baleani, Giuseppe Bargagnati, Luca Bruni, Nora Lif Masi, Francesca Pratali, Margherita Zucchelli

Introduzione

Ecco a voi il **numero 18** del **Giornalino degli Open Days**, una pubblicazione curata da professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa e rivolta principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

Se state considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario che abbia a che fare con la matematica, troverete materiale che fa per voi! Anzitutto, potrete leggere una presentazione del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa. Oltre a una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica e sulle varie opportunità di cui godono i nostri studenti, troverete alcuni dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in matematica.

A seguire, vi presentiamo due articoli divulgativi e due *esperienze* nel Dipartimento di Matematica di Pisa. A raccontarci un po' di matematica abbiamo **Federico Allegri** e **Francesca Pratali**. **Federico**, studente magistrale, ci mostra come si può definire una *derivata* anche in campo aritmetico e come con questa di possano riformulare e approcciare in maniera differente, problemi famosi di Teoria dei Numeri come ad esempio la *congettura di Goldbach* o la *congettura dei primi gemelli*. **Francesca**, dottoranda a Parigi in topologia algebrica, invece, ci introduce in maniera giocosa alla *Teoria delle Categorie*, una branca della matematica che cerca di unire in maniera trasversale le più potenti teorie matematiche.

Nora, studentessa ERASMUS da Berlino, ci racconta le sue impressioni sul Dipartimento, sugli esami e sulla vita matematica pisana descrivendo questo ambiente dopo aver vissuto quello berlinese. **Margherita**, studentessa all'inizio del secondo anno, ci parla del suo primo anno, del suo rapporto con la matematica universitaria pisana e del contesto che ha vissuto.

Abbiamo poi voluto rinnovare la consueta rubrica di problemi del giornalino. Per questa edizione abbiamo chiesto a studenti ed ex studenti i problemi che in un certo senso li hanno "segnati" nel loro percorso di studi prima dell'università e riportato le sensazioni che hanno accompagnato la risoluzione di tali problemi.

SCAN ME

Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo `https://www.dm.unipi.it/terza-missione/home-orientamento/il-giornalino-degli-open-days/`!

Non dimenticate, inoltre, che, se volete affinare le vostre abilità di *problem solving* affrontando altri problemi, ne trovate di ogni genere e livello nella raccolta linkata alla pagina web del giornalino, che potete raggiungere tramite il codice QR qui sopra. Scoprirete i molti esercizi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni.

E se dopo tutto questo non siete ancora sazi di matematica, niente paura! La nostra ultima rubrica contiene alcuni consigli per scoprire e affascinarsi alla matematica all'infuori dell'università!

Infine, un ringraziamento speciale a **Eva Silvestri**, che ha pensato e realizzato la copertina!

Indice

Il corso di laurea in Matematica

Sei indeciso su cosa studiare all'università e sei incuriosito da matematica, ma non sai bene in che cosa ti potresti imbattere? Proveremo ad aiutarti a chiarire le idee, mostrandoti le principali caratteristiche del corso di Laurea in Matematica a Pisa e le numerose opportunità che offre sia per quanto riguarda il percorso universitario che per le prospettive future.

1 Il corso di laurea a Pisa

Il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, riconosciuto come Dipartimento di Eccellenza 2023–2027, offre i Corsi di Laurea Triennale e Magistrale in Matematica. Il primo ha una durata di tre anni accademici e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU); il secondo dura due anni e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

Il corso di laurea triennale a Pisa fornisce una solida preparazione di base nei vari settori della matematica, grazie ad una serie di esami obbligatori. Già al secondo, ma in particolar modo durante il terzo anno sono previsti esami a scelta: in questo modo, grazie alla gran quantità di corsi a scelta attivati, ognuno può approfondire gli argomenti che ha trovato di maggior interesse. Il corso di laurea triennale è diviso in due curricula (è richiesto di scegliere subito, ma c'è la possibilità di cambiare in seguito):

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

Il primo, più teorico, prevede anche una più approfondita preparazione in Fisica, mentre il secondo è più applicativo ed integra lo studio della Matematica con quello dell'Informatica. Nella Tabella 1 sono riportati i due piani di

<table>
<tr><th>Fondamentale</th><th>Computazionale</th></tr>
<tr><td colspan="2">I anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aritmetica (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Laboratorio di introduzione alla matematica computazionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi matematica 1 (15 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria 1 (15 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fisica I con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">II anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algebra 1 (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inglese scientifico (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi matematica 2 (12 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria 2 (12 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Esame a scelta (6 CFU)</td><td>Algoritmi e strutture dati (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">III anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meccanica razionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Fisica II (9 CFU)
Fisica III (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)

4 Esami a scelta (24 CFU)</td><td>Calcolo scientifico (6 CFU)
Laboratorio computazionale (6 CFU)
Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
Ricerca operativa (6 CFU)
3 Esami a scelta (18 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prova finale (9 CFU)</td></tr>
</table>

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2023/2024 (vedi [3]).

studi.

La maggior parte dei laureati triennali sceglie di proseguire gli studi con la magistrale restando a Pisa. I curricula in cui è diviso il corso di laurea magistrale sono cinque: *applicativo*, *didattico*, *generale*, *modellistico* e *teorico*. In questo modo, ad ogni studente viene offerta la possibiltà di specializzare il proprio piano di studi nel ramo che più lo ha interessato e appassionato durante i precedenti anni.

Gli studenti iscritti a matematica possono inoltre usufruire degli ambienti a loro dedicati all'interno del Dipartimento di Matematica, tra cui varie aule studio e due aule computer. Qui gli studenti hanno la possibilità di conoscersi e studiare al di fuori dell'orario di lezione, così da poter collaborare e confrontarsi durante lo studio. Con lo stesso spirito agli studenti del primo anno sono affiancati dei tutor, studenti più avanti nel percorso che li aiutano

SCAN ME

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

ad affrontare i primi esami universitari.

Il nostro dipartimento collabora inoltre con alcune università estere grazie ad accordi internazionali. Ci sono gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio oppure lavorare alla tesi presso un'altra università europea. Attualmente sono attivi accordi di questo tipo con 35 corsi di studio in matematica europei. Simili agli accordi Erasmus sono gli accordi SEMP (Swiss European Mobility Program); abbiamo accordi attivi con le Università di Basilea, Friburgo, Ginevra, Neuchatel, con l'EPFL di Losanna e con l'ETH di Zurigo. C'è poi la possibilità di ottenere un titolo congiunto (*double degree*) grazie all'accordo con la Hokkaido University. L'Università di Pisa fa parte di *Circle U.*, un'Alleanza Universitaria Europea che comprende altri 8 prestigiosi atenei europei. Dal suo lancio nel Novembre 2020, i partner dell'alleanza cooperano con l'obiettivo di creare entro il 2025 un'università europea inclusiva, interdisciplinare e fortemente orientata alla ricerca.

Puoi trovare altre informazioni e rimanere aggiornato sui nuovi accordi sulla pagina dell'Internazionalizzazione

`https://www.dm.unipi.it/international/`

Per ogni altra curiosità, visita la pagina del Corso di Studi seguendo il link `http://www.dm.unipi.it/webnew/it/cds/home-cds` oppure inquadrando il QR qui sopra!

2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? La pagina de "I Mestieri dei Matematici"

`https://www.mestierideimatematici.it`

cerca di rispondere a questa domande, e magari ti stupirà!

In generale risulta che i laureati in matematica sono soddisfatti della scelta fatta e godono di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare sul sito di Almalaurea si possono trarre i seguenti dati che riguardano i nostri laureati magistrali, vedi [2]:

- Il 95,6% dei laureati magistrali del 2022 si dichiara soddisfatto del corso di studi.
- Il 100% dei laureati magistrali del 2022 si dichiara soddisfatto dell'organizzazione degli esami (appelli, orari, informazioni, prenotazioni...).
- Il tasso di occupazione dei nostri laureati a tre anni dalla laurea è molto alto, mediamente intorno al 96,5% (questo include coloro che proseguono con un dottorato).

Da alcuni anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro Dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo è nato il progetto "Matematici al Lavoro".

3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge di solito all'inizio di settembre in diverse sedi in Italia tra cui una è proprio Pisa.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (sono 15 per l'anno accademico 2024/2025), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i due anni successivi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

Anche per il corso di laurea magistrale sono bandite delle borse INdAM: per esempio per l'anno 2024/2025 sono 12, più 6 dedicate in particolare a chi si iscrive a Pisa, di cui almeno 3 per studentesse, come segno concreto della nostra attenzione alla parità di genere.

È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Puoi trovare tutte le informazioni sul sito `https://www.altamatematica.it`.

Gli studenti che si iscrivono qui a Pisa possono richiedere anche una borsa di studio del DSU (Azienda della Regione Toscana per il Diritto allo Studio Universitario) sulla base del reddito familiare. I vincitori di questa borsa ottengono l'esonero dalle tasse universitarie, un contributo per le spese e in alcuni casi anche vitto e alloggio gratuiti. Per avere maggiori informazioni, puoi visitare il sito `https://www.dsu.toscana.it/`.

Bibliografia

[1] `https://www2.almalaurea.it`

[2] `https://www.dm.unipi.it/assicurazione-della-qualita/assicurazione-della-qualita-didattica/situazione-occupazionale-dei-laureati/`

[3] `https://www.dm.unipi.it/didattica/laurea-triennale/regolamenti-corso-di-laurea-triennale/`

La Derivata Aritmetica

di ***Federico Allegri***,
studente magistrale del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa

Sono le 7:00 del mattino, ti svegli spaventato perché sai che avrai l'interrogazione di matematica sulle derivate. Sul bus verso scuola ripassi tutte le derivate fondamentali: «La derivata di x^2 è $2x$, la derivata di sin(x) è cos(x)...». Finché esclami ad alta voce: «La derivata di 15 è 0».

In quel momento, un signore calvo e con un vago accento spagnoleggiante ti guarda e ti dice: «Ragazzo, ma che cosa sta dicendo? La derivata di 15 è 8». Stupito, gli chiedi chiarimenti. Inizia così la magnifica avventura all'interno di un mondo nel quale la derivata di un numero non è sempre 0: scopriamo insieme la derivata aritmetica!

Ciao a tutti! Sono Federico, sono uno studente di matematica al primo anno di magistrale, suono il violino, mi piace leggere e ho due gatti, uno dei quali si chiama Artin in onore di Émil Artin.

La matematica è sempre stata per me una grande passione, sin dai banchi di scuola, ma ho davvero scoperto la sua bellezza all'università, dove ho avuto accesso a un mondo che mai mi sarei aspettato essere così meraviglioso.

1 Introduzione

La derivazione di un numero è un concetto nato per la prima volta nel primo decennio del secolo scorso e fu definita dal matematico spagnolo José Mingot Shelly, che la presentò al Congresso nazionale della *Sociedad Matemática Española* di Granada nel 1911. Purtroppo, le sue idee vennero presto dimenticate e l'unica fonte che abbiamo su di lui e sulla sua definizione di derivata aritmetica è quella data da Dickson nel suo *History of the Theory of Numbers*.

Il concetto di derivata di un intero rinasce solo nel 2001 con la *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS), un enorme database di sequenze di numeri fondato da Neil J. A. Sloane: la definizione di Shelly di derivata aritmetica venne inserita dallo stesso Sloane nell'OEIS e venne poi proposta nel 2002 alla quattordicesima *Summer Conference of International Tournament of Towns*.

Sorge spontaneo chiedersi quale sia lo scopo di questo nuovo strumento: la risposta è che l'idea di associare un concetto di derivata a un numero intero offre molti utili agganci nello studio della Teoria dei Numeri. In particolare, può essere vista come un mezzo di traduzione di alcuni problemi di natura numerica in una forma differente, permettendo così nuovi approcci risolutivi.

2 La derivata aritmetica

2.1 La derivata "classica"

Consideriamo una funzione reale $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo aperto e supponiamo che $x_0 \in I$ sia un punto in cui f è definita. Vorremmo trovare un modo per determinare, se esiste, quale sia il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa x_0. La derivata ci permette di determinare precisamente questo coefficiente angolare: fare la derivata della funzione f in x_0 significa determinare la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Questo concetto si può estendere a ogni punto di I: in questo modo possiamo definire una funzione f', detta *funzione derivata*, che ha la proprietà che $f'(x_0)$ coincide con il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Dato che le uniche funzioni che ci serviranno nel corso della trattazione saranno i polinomi, vediamo come fare per derivare questi ultimi.

Cominciamo dai monomi: sia ax^n un monomio, dove x è una **indeterminata**, a è un numero (naturale, intero, irrazionale, come vi pare!) e n è un numero naturale (cioè 0, 1, 2, 3,...). Come si definisce la derivata rispetto all'indeterminata x del monomio ax^n? È facilissimo! L'idea è quella di moltiplicare a per l'esponente n e diminuire di 1 l'esponente stesso. Scriviamolo in formule:

$$(ax^n)' = nax^{n-1},$$

dove con l'apostrofo $'$ indichiamo la derivata. Ad esempio la derivata di x^4 è $4x^{4-1} = 4x^3$, oppure la derivata di $(54x^8)' = 54 \cdot 8x^{8-1} = 432x^7$ e così via. Osserviamo ora una cosa importantissima: con la definizione data sopra, la derivata di un qualsiasi numero è 0. Infatti, detto a un numero reale, derivare la funzione $f(x) = a$ vuol dire determinare una funzione $f'(x)$, tale che per ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0)$ coincida con il coefficiente della retta tangente a $f(x) = a$ nel punto (x_0, a). Tuttavia, dato che la funzione $f(x) = a$ è rappresentata da una retta orizzontale nel piano cartesiano, in ogni punto la retta tangente coincide con la funzione stessa, e in particolare ha coefficiente angolare nullo.

Veniamo ora ai polinomi, che sono "somme di monomi": sia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$$

un polinomio, dove x è una indeterminata e $a_0, ..., a_n$ sono numeri. La derivata di $p(x)$, che si indica con $p'(x)$, è semplicemente:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$$

ovvero è la somma delle derivate dei singoli monomi che compongono $p(x)$. Con un esempio cerchiamo di capire meglio: vogliamo derivare il polinomio $p(x) = 3x^4 + x^2 - 2$; basta derivare ogni singolo addendo: $(3x^4)' = 12x^3$, $(x^2)' = 2x$, e $(2)' = 0$, ottenendo così che

$$p'(x) = 12x^3 + 2x.$$

Potete provare a fare tutti gli esempi che volete.

2.2 La derivata aritmetica

Passiamo allora adesso alla definizione tanto attesa: come si definisce la *derivata aritmetica* di un numero? L'idea chiave per definire la derivata aritmetica di un numero è quella di adattare agli interi le classiche regole di derivazione per polinomi.

> **Attenzione!** Questa è una **nuova** derivata, definita solo sui numeri, quindi non aspettiamoci come sopra che faccia sempre zero, tutto questo scritto sarebbe altrimenti poco interessante.

Nell'articolo di Shelly del 1911 viene presentato il seguente paragone: dato che la derivata di

$$p(x) = x^\alpha$$

è

$$p'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$

perché non definire la derivata aritmetica considerando come indeterminata i numeri primi? Definiamo prima cosa sono questi numeri.

Definizione 1 (Numero primo)**.** *Un numero intero p è detto numero primo se ha esattamente 4 divisori distinti.*

Quindi, brutalmente, i monomi che consideriamo adesso sono i numeri del tipo p^n, dove p è un numero primo e n un numero naturale: avremo che la derivata aritmetica di un numero del tipo p^n è np^{n-1}, ancora una volta seguendo le regole riportate sopra. Facciamo degli esempi per scaldarci un po'.

- Qual è la derivata di 25? Dato che $25 = 5^2$, avremo che

$$25' = 2 \cdot 5 = 10.$$

- Qual è invece la derivata di 81? Dato che $81 = 3^4$, si avrà che

$$81' = 4 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108.$$

- Qual è poi la derivata di $3 = 3^1$? Sarà

$$3' = 1 \cdot 3^0 = 1$$

Questa ultima regola vale in generale:

Proposizione 1. *La derivata aritmetica di un numero primo è sempre* 1*.*

Come facciamo invece a derivare aritmeticamente un numero che non è una potenza di un primo, tipo 10 o 15 o 18? Per prima cosa definiamo una nuova regola di derivazione valida sui prodotti: se un numero si scrive come un prodotto tra due numeri primi, ad esempio $p \cdot q$ con p e q primi non necessariamente distinti, la derivata si fa in questo modo:

$$(pq)' = p' \cdot q + p \cdot q' = q + p,$$

ovvero spezziamo il prodotto in una somma di due addendi, nel primo scriviamo la derivata del primo numero che compare e lo moltiplichiamo per il secondo numero non derivato, mentre nel secondo addendo facciamo le cose al contrario (piccolo accorgimento per i più esperti: la derivata classica sui prodotti tra funzioni agisce proprio come sopra!). Questa regola vale anche per prodotti di 3, 4, 5 primi: basterà aumentare coerentemente il numero di addendi; ad esempio:

$$(pqrs)' = p'qrs + pq'rs + pqr's + pqrs'.$$

Attenzione! Questa regola è inoltre concorde con la regola riportata sopra, infatti possiamo pensare ad esempio p^2 come $p \cdot p$ e utilizzare la formula, ottenendo $(p^2)' = (p \cdot p)' = p' \cdot p + p \cdot p' = 2p' \cdot p = 2p$.

E se ci troviamo davanti un numero a caso, tipo 2539276429409192, cosa possiamo fare? Per derivare un numero come questo, dobbiamo appellarci a un risultato fondamentale dell'aritmetica, che riportiamo senza dimostrare:

Teorema 2 (fondamentale dell'aritmetica)**.** *Ogni numero intero diverso da* 0, *da* 1 *e da* -1 *può essere scritto in modo unico, a meno del segno e dell'ordine dei fattori, come prodotto di numeri primi.*

Grazie a questo teorema e alla regola sui prodotti riportata sopra, possiamo derivare qualsiasi numero vogliamo!

Sia infatti N un numero intero, allora possiamo scrivere N come prodotto di numeri primi grazie al teorema precedente: esisteranno (unici) dei numeri primi $p_1, ..., p_n$ distinti e dei numeri naturali positivi $a_1, ..., a_n$ tali che

$$N = p_1^{a_1} ... p_n^{a_n}.$$

Utilizzando ora la regola di derivazione sul prodotto abbiamo concluso! Facciamo degli esempi per capire bene come funziona la cosa.

- La derivata di 45 si calcola come segue:

$$(45)' = (3^2 \cdot 5)' =$$
$$(3 \cdot 3 \cdot 5)' = 3' \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3' \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 5' = 15 + 15 + 9 = 39.$$

- La derivata di 900 invece è

$$900' = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2)' =$$
$$(2^2)' \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot (3^2)' \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot (5^2)' = 900 + 600 + 360 = 1860.$$

In quest'ultimo esempio abbiamo agito in maniera differente: ci siamo accorti che non ha molto senso scrivere la derivata di 2^2 come la derivata di $2 \cdot 2$ (anche se è perfettamente lecito), ma possiamo considerare questo come un unico blocchetto e applicare la prima regola di derivazione che abbiamo visto: sta a voi verificare che i due risultati coincidono.

Infine, per completezza, dobbiamo esplicitare la derivata aritmetica di 0 e 1, in quanto questi non sono né numeri primi, né possono essere fattorizzati come prodotto di numeri primi, e quindi non possiamo applicare le regole viste: per non generare contraddizioni, poniamo semplicemente $1' = 0' = 0$.

La tabella sottostante mostra le derivate aritmetiche dei numeri da 0 a 38.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n'	0	0	1	1	4	1	5	1	12	6	7	1	16

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
n'	1	9	8	32	1	21	1	24	10	13	1	44	10

n	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
n'	15	27	32	1	31	1	80	14	19	12	60	1	21

Tabella 1: Derivate aritmetiche dei numeri da 1 a 38

3 Derivate successive

La derivata aritmetica di un numero è ancora un numero, quindi ha perfettamente senso continuare a derivarlo. Possiamo allora estendere il concetto alla derivata seconda, terza, quarta... Ad esempio, la derivata seconda di 15 è:

$$(15)'' = (3 \cdot 5)'' = (3' \cdot 5 + 3 \cdot 5')' = 8' = (2^3)' = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

È interessante cercare di capire quale sia il comportamento della derivata k-esima di un numero n all'aumentare di k: in generale purtroppo l'andamento è molto irregolare, cioè non si può dire a priori cosa succederà a un numero quando lo deriviamo tante volte. Ci sono casi in cui la derivata va a 0 dopo poche derivazioni, ad esempio considerando le derivate successive di 10 otteniamo la sequenza $10, 7, 1, 0, 0, 0, ...$, e casi in cui invece cresce rapidamente e non sappiamo dove andrà a finire, come si vede considerando per esempio la sequenza delle derivate successive di 15: $15, 8, 12, 16, 32, 80, 176, 368...$

Analizziamo un caso particolare: consideriamo i numeri della forma

$$n = p^p n_1$$

dove p è primo e n_1 è un numero naturale non divisibile per p. Se deriviamo n otteniamo

$$n' = p \cdot p^{p-1} n_1 + p^p n_1' = p^p n_1 + p^p n_1' = n + p^p n_1' \geq n,$$

con uguaglianza solo quando $n_1 = 1$. Si ha quindi che per interi n che posseggono un divisore proprio (ovvero diverso da n) del tipo p^p, la derivata k-esima tenderà a crescere sempre di più (in modo più matematico si direbbe che $\lim_k n^{(k)} = +\infty$; se invece $n = p^p$, allora $n' = n$ e quindi anche $n^{(k)} = n$ per ogni k numero naturale. Il primo fatto è facilmente verificabile: sia $n = p^p n_1$ con $n_1 \neq 1$, allora

$$n' = n + p^p n_1' > n$$
$$n'' = (n')' = (n + p^p n_1')' = n' + p^p n_1' + p^p n_1'' = n + 2p^p n_1' + p^p n_1'' > n'$$
$$n''' = (n'')' = (n' + p^p n_1' + p^p n_1'')' = n'' + p^p n_1' + 2p^p n_1'' + p^p n_1''' > n''$$

e così via. Il punto è che a ogni derivazione si aggiunge il termine $p^p n_1'$, che è positivo.

Esiste una congettura molto interessante sull'andamento delle derivate successive, che risulta ancora oggi indimostrata (per maggiori dettagli si veda [2]):

Congettura 1 (Barbeau). *Per ogni intero n esiste una costante k_0 tale che per ogni $k \geq k_0$ possono succedere due cose:*

- $n^{(k)} = 0$,
- $n^{(k)} \neq 0$ *ed esiste un primo p tale che $n^{(k)}$ è un multiplo di p (ovvero p divide tutte le derivate successive alla k-esima).*

Nulla vieta a voi di provare a risolvere questo problema. Proponiamo un esempio per capire cosa dice la congettura: abbiamo già osservato che la successione delle derivate successive di 10 va a 0 dopo 3 derivazioni. Consideriamo nuovamente la successione delle derivate di 15: possiamo notare che già dalla prima derivazione le derivate cominciano ad essere sempre pari ed effettivamente se continuassimo a derivare tante volte continueremmo a ottenere numeri pari. Questo fatto è concorde con la congettura di Barbeau: in questo caso $k_0 = 1$ e $p = 2$.

4 Equazioni differenziali aritmetiche

Passiamo ora a una parte molto importante, che è quella che ci servirà a dare un senso a tutto questo cumulo di parole e simboli. Parliamo di equazioni differenziali aritmetiche!

Consideriamo un numero naturale k; vogliamo capire chi sono quei numeri naturali n tali per cui $n' = k$. Quella scritta sopra è un'**equazione differenziale**, cioè un'equazione in cui compare l'incognita n, accompagnata da una sua derivata. Possono esistere equazioni differenziali anche legate alle derivate successive, cioè possiamo chiederci quali siano i numeri naturali n tali per cui $n'' = k$, $n''' = k$ e così via... e possiamo anche considerare equazioni più complicate in cui intrecciamo derivate successive e numeri, ad esempio $n''' + n'' - n^5 = 8$.

Nel primo caso che abbiamo introdotto, dovrebbe risultare abbastanza chiaro che per certi valori di k esistono infinite soluzioni all'equazione differenziale: se per esempio $k = 1$, si ha che l'equazione $n' = 1$ ha infinite soluzioni, ad esempio, tutti i numeri primi sono soluzione (e sono anche le sole soluzioni, lasciamo a voi il compito di provare a dimostrarlo).

L'equazione differenziale $n' = n$ invece, abbiamo visto ad esempio avere soluzione $n = p^p$, con p numero primo. Questi sono casi abbastanza semplici di equazioni differenziali aritmetiche, la cui soluzione risulta quasi immediata. Generalmente, però, è molto difficile trovare la soluzione di un'equazione differenziale, e spesso neanche i computer riescono in questo intento. Ma perché allora fasciarci la testa su questo problema? Perché, oltre a poter avere un interesse intrinseco, la derivata aritmetica permette di tradurre molti problemi della Teoria dei Numeri in termini di equazioni differenziali, con lo scopo di approcciare il problema da un punto di vista differente e nuovo. Questo significa che, se riuscissimo a trovare un metodo per risolvere equazioni differenziali aritmetiche, si sarebbe allo stesso tempo riusciti a risolvere alcuni problemi aperti di teoria dei numeri! Facciamo degli esempi di queste traduzioni.

4.1 La congettura di Goldbach (forte)

Uno dei problemi della matematica più famosi al giorno d'oggi è senz'altro la congettura di Goldbach. Su questo problema, Hardy, uno dei più importanti teorici dei numeri del '900, si è espresso come segue:

> *"Goldbach's conjecture is not only the most famous and difficult problem in number theory, but the whole of mathematics"*

Vediamo come recita questa congettura:

Congettura 2 (Goldbach)**.** *Ogni numero pari maggiore di* 2 *può essere scritto come somma di due numeri primi, non necessariamente distinti.*

Effettivamente se si prova a cercare un controesempio a mano, non ci si riesce: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5$ e così via. Il fatto che valga per tutti i numeri che fino ad oggi sono stati provati, purtroppo non è una dimostrazione; dovremmo mostrare infatti che questo risultato vale per ogni numero pari e non solo per alcuni (e questi sono infiniti, quindi a mano proprio non ci si può riuscire!). Ci sono molti risultati parziali sul problema di Goldbach, che affermano cose molto interessanti, ma nessuno di questi riesce effettivamente a dimostrare la veridicità o la falsità della congettura. Vediamone alcuni: un primo risultato, dovuto a Vinogradov, afferma che *quasi tutti* gli interi pari sono esprimibili come somma di due primi, dove il significato di *quasi tutti* è il seguente: chiamiamo $N(n)$ il numero di interi pari minori di n che non si possono scrivere come somma di due numeri primi. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N(n)}{n} = 0.$$

Una scoperta di Landau afferma invece che, se la congettura di Goldbach è falsa, allora questa è falsa al più per lo 0% dei numeri pari, dove con "al più 0%" indica che possono esistere delle eccezioni (possibilmente anche infinite), ma sparse un po' a caso tra tutti i numeri pari.

Vediamo come possiamo riscrivere il problema di Goldbach sotto forma di equazione differenziale aritmetica. In simboli il problema riportato sopra si scrive come segue: per ogni numero naturale $n > 1$, esistono p e q numeri primi tali che $2n = p + q$. Basta adesso osservare che $p + q$ è la derivata aritmetica di $m = pq$ e otteniamo il seguente modo equivalente di formulare la congettura (ricordiamo che un numero è detto **semiprimo** quando è prodotto di due primi non necessariamente distinti, ad esempio 9, 10, 15 e 21 sono numeri semiprimi):

Congettura 3. *Sia* $a > 1$ *un numero naturale. L'equazione differenziale aritmetica* $n' = 2a$ *ha sempre almeno una soluzione semiprima.*

Dovrebbe adesso risultare chiaro perché lo studio delle equazioni differenziali aritmetiche possa essere importante nella risoluzione di certi problemi!

4.2 I numeri primi gemelli

Un'altra importante congettura, che risale a Euclide, riguarda i numeri primi gemelli.

Definizione 2. *Due numeri primi p e q sono detti primi gemelli se $q = p + 2$, ovvero se distano 2 l'uno da l'altro.*

Per esempio 5 e 7 o 107 e 109 sono coppie di primi gemelli. Vediamo come recita la congettura.

Congettura 4 (dei primi gemelli)**.** *Esistono infiniti numeri primi p tali che anche $p + 2$ sia primo.*

Un importante risultato di Eulero ci dice che

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{p \text{ primi}} \frac{1}{p} = \infty,$$

ovvero che prendendo tutti i reciproci dei numeri primi e sommandoli "otteniamo una cosa grande quanto vogliamo e che cresce sempre di più". Nel 1915 il matematico norvegese Viggo Brun ha dimostrato invece che

$$\sum_{p, p+2 \text{ primi}} \frac{1}{p} < \infty,$$

cioè che limitando la somma ai primi "che hanno un primo gemello" si ottiene invece un numero finito, che indichiamo con $B_2 = 1,902...$ e che chiamiamo *costante di Brun* (per una dimostrazione si veda, ad esempio [6]). Questo, matematicamente, può essere tradotto in due modi diversi: o i primi gemelli sono in numero finito, o crescono talmente velocemente che la somma dei loro reciproci rimane limitata. A oggi è stata dimostrata da Chen Jingrun una variante "debole" del problema dei primi gemelli, che dice che esistono infiniti numeri primi p tali che $p + 2$ sia un numero primo o un semiprimo (si veda, ad esempio [4]).

Vediamo ora come tradurre il problema dei primi gemelli in termini di derivata aritmetica.

Proposizione 3 (Sui primi gemelli)**.** *Condizione necessaria per la validità della congettura dei primi gemelli è che l'equazione differenziale $n'' = 1$ abbia infinite soluzioni tra i naturali del tipo $n = 2p$, con p primo.*

Infatti, se la congettura dei primi gemelli è vera, allora esistono infiniti primi p tali per cui anche $p+2$ è primo, ovvero $(p+2)' = 1$. Ma $p+2$ è la derivata aritmetica di $2p$, e quindi in particolare $(2p)'' = 1$, cioè $2p$ è soluzione dell'equazione differenziale $n'' = 1$.

Una riscrittura di questo genere, in termini di condizione necessaria, è un approccio che generalmente si usa per dimostrare la falsità di un problema: se infatti si dimostrasse che l'equazione differenziale $n'' = 1$ ha un numero finito di soluzioni o che ne ha infinite, ma quelle del tipo $n = 2p$ sono in numero finito, allora si sarebbe risolta in negativo la congettura dei primi gemelli. In realtà, ad oggi, si pensa che questa sia vera, anche se non si è ancora riusciti a dimostrarla... Però non si sa mai.

5 La congettura di Giuga e il legame con i primari pseudo-perfetti

Un altro importante esempio di applicazione delle derivate aritmetiche è legato ai numeri di Giuga. Nella prima metà del secolo scorso, il matematico Giuseppe Giuga ipotizzò la seguente congettura, che è ancora oggi un problema aperto:

Congettura 5 (Giuga (1950)). *Sia n un numero naturale; n divide*

$$1^{n-1} + 2^{n-1} + ... + (n-2)^{n-1} + (n-1)^{n-1}$$

solo se n è primo.

Questa è stata verificata dal matematico brasiliano Paulo Ribenboim per i numeri primi $p < 10^{1700}$ (si veda, ad esempio, [6]).

Giuga dimostrò che l'esistenza di un numero n che soddisfa le due seguenti relazioni (ricordiamo che quando scriviamo che $p \mid n$, intendiamo che p è un divisore di n, ovvero che esiste un numero intero a tale che $n = a \cdot p$)

$$p - 1 \,\Big|\, \frac{n}{p} - 1 \tag{5.1}$$

$$p \,\Big|\, \frac{n}{p} - 1 \tag{5.2}$$

per ogni primo p divisore di n, sarebbe un controesempio alla Congettura 5 (chiaramente a oggi non si sono trovati numeri che soddisfano contemporaneamente le condizioni (5.1) e (5.2), altrimenti sapremmo già che la congettura risulterebbe falsa). Un numero che rispetta la condizione (5.2) si chiama **numero di Giuga**. A oggi sono conosciuti soltanto 13 numeri di Giuga: il più piccolo è 30, a seguire invece troviamo 858, 1722, 66198, 2214408306... Non sappiamo se i numeri di Giuga siano in numero finito o no, anche se si pensa che ne esistano infiniti. Per capire meglio il significato di cosa sia un numero di Giuga, facciamo vedere, usando la definizione, che 30 rispetta la proprietà (5.1): si ha che

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

e vale che

$$\begin{aligned} 2 &\Big| \frac{30}{2} - 1 = 14, \\ 3 &\Big| \frac{30}{3} - 1 = 9 \\ 5 &\Big| \frac{30}{5} - 1 = 5 \end{aligned}$$

e quindi la condizione (5.1) è rispettata per ogni primo che divide 30, ovvero 30 è un numero di Giuga.

Ma qual è il legame che c'è tra i numeri di Giuga e il nostro studio sulla derivata aritmetica? È stato osservato che tutti e 13 i numeri di Giuga conosciuti sono soluzione dell'equazione differenziale $n' = n + 1$. Possiamo approcciare il problema della ricerca dei numeri di Giuga come segue:

Congettura 6. *I numeri di Giuga sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale aritmetica $n' = a \cdot n + 1$ con a intero, ma tutte le soluzioni a oggi note hanno $a = 1$.*

5.1 Primari pseudo-perfetti

Cerchiamo adesso di collegare la congettura di Giuga a una classe di numeri naturali, detti numeri primari pseudo-perfetti. Definiamo prima di tutto che cos'è un numero perfetto.

Definizione 3. *Un numero intero n è perfetto se è somma dei suoi divisori propri, incluso 1.*

Ad esempio, 6 è un numero perfetto, infatti $6 = 1 + 2 + 3$ e 1, 2 e 3 sono gli unici divisori propri di 6. Anche 28 è un numero perfetto, in quanto $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Prendiamo ora in considerazione il numero $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ e consideriamo i seguenti rapporti: $\frac{42}{2} = 21$, $\frac{42}{3} = 14$, $\frac{42}{7} = 6$, e vale che $42 = 1 + 21 + 14 + 6$, ovvero 42 è somma tra 1 e i rapporti tra 42 e i suoi divisori primi. I numeri di questo tipo sono detti **primari pseudo-perfetti** (PPP per semplicità). Più formalmente:

Definizione 4. *Un numero n è un PPP (primario pseudo-perfetto) se rispetta la relazione*

$$n = 1 + \sum_{p|n,\ p \text{ primo}} \frac{n}{p}.$$

I numeri PPP sono stati utilizzati per la prima volta nel tentativo di dimostrazione di una congettura di Erdös e Moser (che non è ancora stata provata), la quale recita come segue (per informazioni più dettagliate, si veda, ad esempio [3]):

Congettura 7 (Erdös e Moser (1955))**.** *L'equazione $1^k + 2^k + ... + n^k = (n+1)^k$, con k e n numeri naturali, non ha soluzione se non quella banale $1 + 2 = 3$.*

Si può dimostrare che i PPP godono di un'importante proprietà legata alla derivata aritmetica, vale infatti il seguente teorema.

Teorema 4. *L'equazione differenziale aritmetica $n' = n - 1$ ha come soluzione i numeri PPP.*

Grazie a questo teorema possiamo analizzare il legame che sussiste tra i numeri di Giuga e i PPP.

Consideriamo n un numero naturale e scriviamo $n = m \cdot k$, con m e k naturali. Derivando entrambi i membri dell'uguaglianza si ottiene che $n' = m' \cdot k + m \cdot k'$. Supponiamo ora che m sia un PPP, allora, per il Teorema 4

$$n' = k' \cdot m + k \cdot (m - 1) = n + (k' \cdot m - k).$$

Imporre che la somma tra parentesi faccia 1 equivale a imporre che n sia un numero di Giuga, mentre imporre che sia uguale a -1 equivale a imporre che n sia un PPP. Inoltre, nel caso speciale in cui k è primo, si ha che $k' = 1$ e quindi $m - k = 1$ implica che n è un numero di Giuga, mentre $m - k = -1$ implica che n è un PPP. In altre parole stiamo affermando quanto segue: se $m - 1$ o $m + 1$ è un numero primo, allora, partendo da un PPP, possiamo, tramite un semplice prodotto, calcolare o un numero di Giuga o un PPP: se $m - 1$ è primo allora $m(m - 1)$ è un numero di Giuga, mentre se $m + 1$ è primo allora $m(m + 1)$ è ancora un PPP. Mostriamo con due esempi la veridicità di queste affermazioni: 6 è un numero PPP e $6-1=5$ è primo, vale che $5 \cdot 6 = 30$ che è un numero di Giuga. Anche $6+1=7$ è primo, e vale che $6 \cdot 7 = 42$, che abbiamo già visto essere un numero primario pseudo-perfetto.

Bibliografia

[1] William D. Banks, C. Wesley Nevans, and Carl Pomerance. A remark on giuga's conjecture and lehmer's totient problem. *MSC Numbers*, 11A07, 11N25, 2009.

[2] E. J. Barbeau. Remark on an arithmetic derivative. *Canad. Math. Bull.*, 4(2), 1961.

[3] William Butske, Lynda M. Jaje, and Daniel R. Mayernik. On the equation $\sum_{p|n} \frac{1}{p} + \frac{1}{n} = 1$, pseudoperfect numbers and perfectly weighted graphs. *Math. Comp.*, 69(229):407–420, 2000.

[4] J.R. Chen. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Kexue Tongbao*, 11(9):385–386, 1966.

[5] Paolo P. Lava Giorgio Balzarotti. *La derivata aritmetica*. Hoepli, 2013.

[6] Paulo Ribenboim. *The New Book of Prime Numbers Records*. Springer-Verlag, New York, 1996.

Limiti revisited: teoria delle categorie

di ***Francesca Pratali***,
Dottoranda in topologia algebrica all'Université Sorbonne Paris Nord

1 Perché Teoria delle Categorie?

La *teoria delle categorie* è una branca relativamente giovane della matematica, nata dalla *topologia algebrica*[1] e progettata per descrivere in modo uniforme vari concetti strutturali provenienti da diversi campi matematici. È una disciplina trasversale che interseca molte branche della matematica oltre alla topologia algebrica, come la *geometria algebrica*, l'*informatica*, la *logica*... In effetti, la teoria delle categorie fornisce un bagaglio di concetti (e teoremi su essi) che costituiscono un'astrazione di molte idee concrete in diversi rami della matematica.

Da un certo punto di vista, la teoria delle categorie non è altro che un *linguaggio* con cui descrivere uniformemente fenomeni e costruzioni che sono trasversali nella matematica. Molti matematici e matematiche si sono espressi al riguardo:

- La matematica Emily Riehl scrive, nel suo libro *Category Theory in Context*[2]:

> Atiyah ha descritto la matematica come "scienza dell'analogia". In questo senso, la teoria delle categorie si occupa di analogia matematica. La teoria delle categorie fornisce un linguaggio interdisciplinare per la matematica,

[1] La topologia algebrica è lo studio di *spazi topologici* (ovvero degli spazi geometrici con una certa nozione molto debole di *distanza* tra i punti) per mezzo di *invarianti algebrici*, ovvero oggetti di natura algebrica che sono gli stessi per spazi *equivalenti* (dove equivalenti può voler dire *omeomorfi*, o *omotopi* o..... ma questa è un'altra storia!)

[2] Disponibile online sul sito dell'autrice in libero accesso

> progettato per delineare fenomeni generali, che consente il trasferimento di idee da un'area di studio all'altra. La prospettiva della teoria delle categorie può funzionare come un'astrazione semplificante, isolando le proposizioni che valgono per ragioni formali da quelle la cui dimostrazione richiede tecniche proprie di una determinata disciplina matematica.

- Citando Hoare in *Notes on an Approach to Category Theory for Computer Scientists*:

  > La teoria delle categorie è la branca più generale e astratta della matematica pura. [...] Il corollario di un alto grado di generalità e astrazione è che la teoria non fornisce quasi alcun aiuto per risolvere i problemi più specifici all'interno di una qualsiasi delle sottodiscipline a cui si applica. È uno strumento per il generalista, di scarso beneficio per il professionista [...].

- Citando A. Asperti e G. Longo in *Categories, Types, and Structures. Foundations of Computing Series*:

  > La teoria delle categorie è un gergo matematico. [...] Molti formalismi e strutture diverse possono essere proposte per quello che è essenzialmente lo stesso concetto; il linguaggio e l'approccio categoriale possono semplificare attraverso l'astrazione, mostrare la generalità dei concetti e aiutare a formulare definizioni uniformi.

- Concludiamo citando D.S. Scott, che nel suo libro *Relating theories of the lambda calculus* scrive che

  > [La teoria delle categorie offre] teoria pura delle funzioni, non una teoria delle funzioni derivate dagli insiemi.

In questo articolo adotteremo precisamente questo ultimo approccio alla disciplina, e affronteremo un concetto fondamentale della teoria delle categorie, quello di *limite*.

2 Insiemi senza elementi

Cominciamo in modo originale: facciamo un gioco.

> Quanto possiamo dire sugli insiemi *senza* parlare dei loro elementi?

Abbiamo ancora il diritto di parlare di *funzioni* da un insieme all'altro, inclusa la funzione *identità*, e persino *composizione* di queste funzioni, ma non possiamo parlare delle cose all'interno di un insieme, dei suoi elementi.

Potrebbe sembrare una restrizione sciocca, e va bene, non devo convincervi che ha senso. Se, però, dovessi provare a convincervi, potrei menzionare il fatto che la stessa idea di appartenenza ad un insieme è un'idea primitiva indefinibile in matematica, e che usare questa intuizione informalmente ha portato, in passato, a paradossi logici - il *paradosso di Russel* è forse uno dei più celebri esempi.

> **Paradosso di Russel:**
> Sia X l'insieme i cui elementi sono gli insiemi che non appartengono a se stessi, cioè $X = \{Y \text{ tale che } Y \notin Y\}$. Allora $X \in X$ oppure $X \notin X$?

Dunque ha senso chiedersi se, al posto di *assumere* (nel senso di porre come *assioma*) che l'appartenenza ad un insieme ha senso, possiamo iniziare con delle fondazioni diverse, come ad esempio le funzioni, e *dedurre* l'idea di appartenenza in modo logicamente coerente.

Ma, di nuovo, non devo convincervi. Prendetemi pure in giro. È solo un gioco, e quelle sono le regole. Esercitiamoci.

Possiamo dire

$$\text{L'insieme } X \text{ ha un solo elemento} \tag{2.1}$$

senza parlare di elementi?

Sorprendentemente, **sì**! Invece che parlare di quell'unico elemento, posso dire questo:

$$\text{Dato un qualsiasi altro insieme } Y\text{, esiste } \textit{un'unica} \text{ funzione } f\colon Y \to X. \tag{2.2}$$

Dimostriamo che queste due affermazioni sono equivalenti. Chiaramente, se X ha un solo elemento, allora (2.2) è vera. Supponiamo adesso che (2.2) sia vera, e dimostriamo che X ha un solo elemento.

> **Reductio ad absurdum:**
> per provare che una certa *proposizione* matematica è vera. L'idea consiste nell'osservare che l'implicazione logica $A \Rightarrow B$ ha lo stesso valore di verità di $\neg B \Rightarrow \neg A$, e dimostrare quest'ultima.

Lo facciamo procedendo *per assurdo*: se (2.2) è vera e X ha più di un elemento, possiamo prendere un insieme Y con un elemento solo e scegliere dove inviarlo: ci sono esattamente tante possibilità quanto gli elementi di

X, e visto che per ipotesi X aveva più di un elemento, abbiamo più di una funzione $Y \to X$, il che contraddice (2.2), assurdo. Quindi se (2.2) è vera, X deve avere un unico elemento, come volevamo.

Quindi l'esistenza di esattamente un'unica funzione $Y \to X$, *per qualsiasi insieme* Y, è esattamente equivalente a dire che X ha un unico elemento.

Esercizio 1. *Riuscite a trovare un modo di dire*

L'insieme X è vuoto

senza parlare dei suoi elementi?

Proviamo adesso a spingerci oltre, e capiamo come dire

L'insieme X ha *gli stessi elementi* dell'insieme Y

senza parlare degli elementi di questi insiemi. Okay, questa domanda è malposta: visto che non possiamo nominare o descrivere questi elementi (non possiamo proprio parlare di loro), non possiamo dire esattamente questo. Ma possiamo riformulare la proposizione dicendo che

L'insieme X ha lo stesso *numero* di elementi dell'insieme Y (2.3)

Non solo questa formulazione è coerente con il nostro gioco, ma siamo anche capaci di esprimere (2.3) con le nostre restrizioni di linguaggio. La risposta non sarà certo una novità:

C'è una funzione $f\colon X \to Y$, ed un'altra funzione $g\colon Y \to X$, tali per cui $g \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

In matematica, questa si chiama *corrispondenza bigettiva*, e dimostra che due insiemi hanno lo stesso numero di elementi - anzi, per meglio dire, che hanno la stessa *cardinalità*, visto che potrebbero essere infiniti, e quindi non un numero in sé. Un altro modo per esprimere (2.3) è dire che gli insiemi X e Y sono lo stesso *a meno di una corrispondenza bigettiva*, o, più astrattamente, *a meno di isomorfismo.* Fissiamo questa terminologia in una definizione.

Definizione 5. *Una funzione tra insiemi $f\colon X \to Y$ è un isomorfismo se esiste $g\colon Y \to X$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Diciamo che due insiemi X e Y sono isomorfi se esiste un isomorfismo tra i due.*

Bene. Queste sono quindi le regole del gioco, e questo il pattern che seguiremo. Passiamo adesso a cose più complicate, e scopriamo che cos'è un limite in teoria delle categorie.

3 Limiti... ma in teoria delle categorie

3.1 Decostruiamo il prodotto cartesiano

Continuiamo dunque con il nostro gioco. Prendiamo una coppia di insiemi, chiamiamoli X e Y. Ci hanno insegnato che il *prodotto cartesiano* di X e Y, che chiamiamo $X \times Y$, è l'insieme dato dalle coppie ordinate (x, y), dove x è un elemento di X e y un elemento di Y:

$$X \times Y = \{(x, y) \text{ tale che } x \in X, y \in Y\}.$$

E adesso poniamoci la seguente domanda:

> Possiamo definire il *prodotto cartesiano* senza parlare di elementi?

Di nuovo, non possiamo veramente sperare di sapere *come* gli elementi dei nostri insiemi siano chiamati, ma **possiamo** dire che un insieme ha il *numero* giusto di elementi per essere il prodotto cartesiano, e possiamo anche fornire una coppia di funzioni che forniscono le componenti della coppia ordinata, fornendo un modo per interpretare tutto ciò che è presente in quell'insieme come una coppia ordinata.

Vediamo quindi come si fa. Innanzitutto, il prodotto cartesiano di due insiemi è naturalmente munito di due funzioni $p\colon X \times Y \to X$, $q\colon X \times Y \to Y$, chiamate *proiezioni*. In un mondo in cui possiamo parlare di elementi, p e q sono definite come

$$p(x, y) = x \qquad q(x, y) = y$$

per ogni (x, y) in $X \times Y$.

Chiaramente, posta così abbiamo un problema: le proiezioni sono definite in termini di ciò che fanno sugli elementi, ma non possiamo parlare di elementi.

Quello che possiamo fare è osservare che le proiezioni sono caratterizzate da una certa **proprietà universale** che rende $X \times Y$ *finale* tra gli insiemi

Ciao! Sono Francesca e sono dottoranda all'Université Sorbonne Paris Nord. Il mio percorso universitario è stato quasi interamente pisano: finito il Liceo Classico, ho studiato matematica all'Università di Pisa sia in triennale che in magistrale, e durante quest'ultima ho avuto l'opportunità di fare un Erasmus a Parigi ed una tesi in cotutela tra Pisa e Parigi.

I miei anni a Pisa e in Dipartimento sono stati intensi e fantastici, ed uscite in Piazza delle Vettovaglie si alternavano a lunghe sessioni di studio collettivo in DIP.

Nel tempo libero mi piace imparare a stare in equilibrio sugli oggetti recitando teoremi!

che godono di questa proprietà. Incredibilmente, questo basta a definire il prodotto cartesiano $X \times Y$!

Definizione 6. *Il prodotto cartesiano di X e Y è dato da un insieme Z e due funzioni $p\colon Z \to X$, $q\colon Z \to Y$ con la seguente proprietà: per qualsiasi insieme S e per qualsiasi coppia di funzioni $f\colon S \to X$ e $g\colon S \to Y$ esiste un unico $h\colon S \to Z$ tale che $f = p \circ h$ e $g = q \circ h$.*

Possiamo esprimere quanto sopra con il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\ & Z \arrow[dl, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Esercizio 2. *Se un tale insieme Z esiste, è unico a meno di isomorfismo. In particolare, possiamo chiamare Z direttamente $X \times Y$.*

Svisceriamo la definizione:

- Le funzioni f e g servono a indicare che a ogni elemento di S è associata una certa coppia di elementi di X e Y, determinata da f e g.

- L'esistenza di h significa che, per qualsiasi scelta di elementi di X e Y, esiste un elemento in Z che vi corrisponde. Le proiezioni p e q ci dicono a quale X e quale Y corrisponde ogni elemento.

- Il fatto che h sia unico significa che esiste un solo elemento di questo tipo per ogni coppia, perché altrimenti si potrebbe scegliere a quale elemento h punta.

Insomma, tutto sommato questo dice che $X \times Y$ ha esattamente un elemento in esso per ogni scelta di una coppia di elementi di X e Y, e p e q ci dicono quale coppia è. Successo!

Esercizio 3. *Il prodotto cartesiano di X e Y dipende solamente dalla classe di isomorfismo di X e Y. In altre parole, se X è isomorfo a X' e Y è isomorfo a Y', allora $X \times Y$ è isomorfo a $X' \times Y'$. Riuscite a dimostrarlo usando solo proprietà universali?*

I limiti, per davvero

La caratterizzazione del prodotto cartesiano di due insiemi tramite una proprietà universale è istanza di un concetto più generale in teoria delle categorie, chiamato *limite*. (Attenzione: si tratta di un concetto solo lontanamente correlato ai limiti che potreste aver visto nel calcolo, quindi se è questo che vi è saltato in mente, fate pure e dimenticatelo di nuovo.)

La definizione rigorosa di limite prevede quella di *categoria* e di *funtore* tra due categorie, ma, per non rendere questo articolo troppo lungo, ci limiteremo a dare un'idea di cosa è un limite in generale e a dare una definizione precisa solo in casi molto particolari.

Definizione 7. *Sia $n \geq 1$ un numero naturale, e consideriamo la collezione di insiemi $\{X_i\}_{i=1}^n$. Il limite di $\{X_i\}_{i=1}^n$ è un insieme Z e funzioni $p_i \colon Z \to X_i$ tale che, per ogni altro insieme S e funzioni $f_i \colon S \to X_i$, esiste un'unica funzione $h \colon S \to Z$ tale che $f_i = p_i \circ h$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.*

Osservazione 1. *Il limite di $\{X_i\}_{i=1}^n$ non è altro che... il prodotto cartesiano $Z = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, e le funzioni $p_i \colon Z \to X_i$ non sono altro che le proiezioni. Come avevamo osservato in precedenza, il prodotto cartesiano è unico a meno di isomorfismo. In effetti, anche qua osserviamo che il prodotto cartesiano di insiemi non è strettamente unico: in particolare, ogni permutazione dell'ordine dei fattori in $X_1 \times \cdots \times X_n$ ha la stessa proprietà universale.*

Finora abbiamo considerato il limite di una collezione di insiemi $\{X_i\}_i$, ma possiamo complicare la storia e aggiungere *relazioni* tra gli insiemi della nostra collezione, ovvero *funzioni* che collegano un certo X_i ad un altro X_j; chiamiamo *diagramma* una qualsiasi collezione di insiemi e di mappe tra questi. Vediamo un caso particolarmente semplice ma impo

Definizione 8. *Siano X e Y due insiemi, e $f, g \colon X \to Y$ due funzioni da X in Y. Consideriamo il diagramma dato da*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Il limite di tale diagramma è il dato di un insieme Z, una funzione $\varphi \colon Z \to X$ tale che $f \circ \varphi = g \circ \varphi$, e con la seguente proprietà universale: per ogni altro insieme S e funzione $k \colon S \to X$ per cui $f \circ k = g \circ k$, esiste un unica mappa $h \colon S \to Z$ tale per cui $\varphi \circ h = k$.

Diciamo che (Z, φ) è l'equalizzatore delle mappe $f, g \colon X \to Y$.

Visivamente, possiamo illustrare quanto appena scritto come segue:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dashed, "\exists ! h"] \arrow[rr, bend left, "k"] & Z \arrow[r, "\varphi"] & X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Consideriamo un caso particolare della Definizione 8, in cui $X = Y$, $f\colon X \to X$ è una mappa qualsiasi e $g = \mathrm{id}_X$. Dunque il diagramma è semplicemente dato da

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_X"'] & X \end{tikzcd}$$

Esercizio 4. *Quale è l'equalizzatore di $f\colon X \to X$ e dell'identità di X ?*

Sdipanando la definizione, arriviamo alla seguente caratterizzazione:

Il limite è dato da un insieme Z e una funzione $\varphi\colon Z \to X$, tale per cui $f \circ \varphi = f$ e per ogni altro insieme S e funzione $k\colon S \to X$ in cui $f \circ k = k$, esiste un'unica funzione $h\colon S \to Y$ tale che $\varphi \circ h = k$.

Ma cosa significa veramente?

- $f \circ \varphi = f$ significa che φ non cambia nulla nel risultato di f. In altre parole, per qualsiasi x della forma $x = \varphi(y)$, si deve avere $f(x) = x$. Dunque l'immagine di φ è data dai valori che rimangono invariati dalla funzione f: questi sono chiamati **punti fissi** (o talvolta *punti stazionari*). Quindi φ può puntare solo ai punti fissi di f.

- Secondo la stessa logica, qualsiasi scelta di k può puntare solo ai punti fissi di k. In particolare, è possibile scegliere una funzione k che punti a qualsiasi sottoinsieme di punti fissi di X.

- Che h esista, quindi, significa che l'immagine di φ deve essere data da *tutti* i punti fissi di f. (Se per assurdo esistesse $x \in X$ punto fisso non nell'immagine di φ, allora potremmo scegliere $k\colon \{*\} \to X$, $k(*) = x$, e k non potrebbe essere ottenuta componendo con φ, assurdo).

- Il fatto che h sia unico significa che φ deve essere *iniettiva*.

Quindi Z è in corrispondenza uno-a-uno con i punti fissi di f, e φ è quella corrispondenza uno-a-uno. In sostanza, *a meno di isomorfismo*, **l'equalizzatore di $f\colon X \to X$ e dell'identità $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ è dato dai punti fissi di f, e la mappa $Z \to X$ è l'inclusione.**

Più in generale, dato un diagramma qualsiasi, possiamo sempre chiederci quale sia il suo *limite*, ovvero quell'insieme Z e quelle mappe da Z negli insiemi del diagramma in questione che sono *universali*.

Per esempio, possiamo considerare il caso estremo dato dal diagramma *vuoto*, ovvero senza insiemi né funzioni tra di essi. Bene, allora il *limite* di questo diagramma deve essere solamente un insieme Z con la seguente proprietà universale: per qualsiasi altro insieme S, esiste un'unica funzione $f\colon S \to Z$. Se questo vi suona familiare non è un caso: questa era la risposta alla prima domanda del nostro gioco in cui abbiamo descritto gli insiemi con un solo elemento! In teoria delle categorie, il limite del diagramma vuoto si chiama *oggetto terminale*.

Con questo nuovo linguaggio, dunque, possiamo dire che nella categoria degli insiemi l'oggetto terminale è l'insieme con un unico elemento, unico a meno di isomorfismo.

Esercizio 5. *Quale è la proprietà universale del limite del diagramma di insiemi $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{g} W$? Qual è il limite del diagramma di sopra quando scegliamo $X = \{*\}$ come l'insieme con un unico elemento?*

Questi sono solo esempi di diagrammi di cui possiamo provare a calcolare il limite, ed è sorprendente quante costruzioni a noi ben note non siano altro che istanze della più generale nozione di limite. Sebbene i diagrammi possano diventare arbitrariamente complicati, un certo principio di semplicità sottende la nozione di limite di un diagramma, e scopriamo che prodotti ed equalizzatori sono *sufficienti* per calcolare il limite di un diagramma qualsiasi. Questo è il contenuto di un teorema fondamentale di teoria delle categorie.

Teorema 5. *Il limite di un qualsiasi diagramma di insiemi può essere espresso come equalizzatore di due funzioni tra prodotti di insiemi.*

Tirando le somme

La teoria delle categorie è un linguaggio per descrivere uniformemente costruzioni matematiche, e quella di oggi non era altro che la voce *limite* sul vocabolario, fatto di molte altre pagine. Studiarne e comprenderne la grammatica è un eccellente esercizio di astrazione, e permette di avere uno sguardo più ampio e trasversale nella matematica. Come tutti i linguaggi, d'altronde, la teoria delle categorie è un *mezzo*, e come concludere se non indicandovi alcune delle (numerose!) applicazioni che si possono fare di questa disciplina?

- provare a pensare in modo categorico la teoria degli insiemi, sostituendo la nozione primitiva di appartenenza con quella di *funzione*, non è semplicemente un gioco: portando avanti in modo rigoroso la teoria, si ottiene un tipo alternativo di teoria degli insiemi per la matematica, chiamata "Teoria Elementare della Categoria degli Insiemi", o in breve *ETCS* (per l'acronimo della traduzione in inglese). Se nella tradizionale teoria degli insiemi di Zermelo-Frenkel, si assume che esista una nozione di appartenenza e si lavora per costruire coppie ordinate, relazioni e funzioni. Nell'ETCS, invece, si assume una nozione di funzione e si lavora a ritroso per recuperare coppie ordinate e simili.
- questo stesso approccio, motivato stavolta da considerazioni inerenti alla branca della *logica matematica*, ha dato luogo alla disciplina della *teoria dei tipi*, sviluppatasi parallelamente alla teoria delle categorie, e, successivamente, della *teoria omotopica dei tipi* (*Homotopy Type Theory*, o *HoTT*). Queste teorie si collocano a cavallo tra logica matematica, informatica (precisamente la branca del *calcolo*) e, con l'avvento di HoTT, della topologia algebrica. Personal fact: lo studio di queste teorie è stato il centro focale della mia tesi triennale!
- riformulare costruzioni e proprietà di insiemi senza riferimento diretto agli elementi ha il vantaggio di permettere di dare le stesse definizioni in qualsiasi altra *categoria*, cioè un insieme di oggetti e di frecce tra di esse che si compongono in modo simile alla composizione di funzioni. Si può, ad esempio, considerare qualsiasi struttura algebrica (*gruppi*, *anelli*, ecc.) e gli omomorfismi tra di loro, o gli *spazi topologici* e le *funzioni continue* tra di loro. In particolare, in una qualsiasi categoria è possibile dare la nozione di *isomorfismo* tra due oggetti, e lavorare con gli oggetti di una categoria *a meno di isomorfismo*. Talvolta, però, può essere necessario considerare due oggetti di una categoria *equivalenti* non solo quando sono isomorfi. Per gli insiemi questo non è molto interessante, ma lo diventa non appena consideriamo oggetti con un po' più di struttura. Ad esempio, dati due *spazi topologici* (oggetti geometrici muniti di una certa nozione di *continuità*), possiamo domandarci se uno possa essere *deformato in modo continuo* fino ad arrivare a coincidere con l'altro. Se questo avviene, non diciamo più che i due spazi sono isomorfi (perché non c'è più una "corrispondenza uno-a-uno"), ma diciamo piuttosto che i due spazi topologici sono *omotopi*. Sono queste le considerazioni che hanno dato luogo alla *teoria dell'omotopia*, una branca della topologia algebrica che si occupa di studiare oggetti a meno di nozioni più deboli di isomorfismo. È una

delle discipline della matematica in cui più sono applicati i metodi ed il linguaggio della teoria delle categorie!

Insomma, potremmo continuare ancora, dando più dettagli, espandendo definizioni, enunciando altri teoremi ed applicazioni del linguaggio che è la teoria delle categorie. Ci fermiamo qui, però, sperando di avervi incuriosito abbastanza da volerne sapere di più!

Bibliografia

[1] The Univalent Foundations Program (2013) *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, Institute for Advanced Study.

[2] Hatcher, Allen (2002) *Algebraic Topology*, Cambridge University Press.

[3] Riehl, Emily (2014) *Category Theory in Context*, `https://math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf`

[4] Sito NLAB, ETCS, `https://ncatlab.org/nlab/show/ETCS`

In Erasmus a Pisa

di ***Nora Lif Masi***,
studentessa triennale del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa

1 Da Berlino a Pisa

Nel quadro di uno scambio Erasmus ho deciso di passare l'ultimo anno accademico non a Berlino, dove sono regolarmente iscritta alla facoltà di matematica, ma presso il Dipartimento di matematica dell'Università di Pisa. Sono venuta qui senza sapere veramente che posto fosse questo Dipartimento. Nelle mie cerchia la matematica dell'UniPi non godeva di una fama particolare, né in negativo né in positivo. Al massimo si sapeva della Normale, una specie di scuola di eccellenza, ma quella era una cosa a parte. Avevo fatto due anni di matematica a Berlino, mi ero divertita abbastanza, scocciata quanto serve, e da mezza italiana nata qui non vedevo l'ora di tornare nel mio paese natale. La scelta di Pisa come facoltà per l'Erasmus era dovuta solo alle mie origini toscane.

Nella mia Università a Berlino ci sono molte persone come me, che hanno iniziato a fare matematica un po' per caso; visto che superano gli esami continuano ad andare avanti, finiscono la triennale e poi decideranno come proseguire il loro percorso. Anche se tra i miei amici c'era molta gente che prendeva buoni voti non c'era nessuno che definirei davvero appassionato alla matematica, nessuno che avesse fatto le Olimpiadi o anche semplicemente che studiasse di più dello stretto necessario.

Ciao mi chiamo Nora, ho 20 anni. Sono nata a Bologna ma vivo a Berlino dal 2011, e lì ho iniziato la facoltà di matematica. In realtà all'inizio dell'università avevo fatto richiesta anche a psicologia, convinta che avrei preferito fare quella. Poi fui presa a matematica, il che voleva dire che non sarei potuta entrare a psicologia, e ho letteralmente pianto di tristezza.

Questa facoltà quindi l'ho iniziata un po' a caso, ma anche in questo modo si può fare davvero tanta matematica, e anche divertirsi.

E poi se un giorno dovessi rompermi ho sempre il mio piano B, fare *l'idraulico*

2 Studiare a Pisa

A Pisa ho trovato un altro mondo. Nell'anno che ho passato in questo Dipartimento ho conosciuto un sacco di persone, di ogni anno, e anche se forse non tutti bruciano per la matematica, la maggior parte ha comunque un approccio diverso verso questa disciplina di quello che avevo conosciuto io fino ad allora. Probabilmente un po' è dovuto alla difficoltà degli esami. Sopratutto quelli obbligatori a Pisa risultano particolarmente ostici, con quote di bocciature altissime.

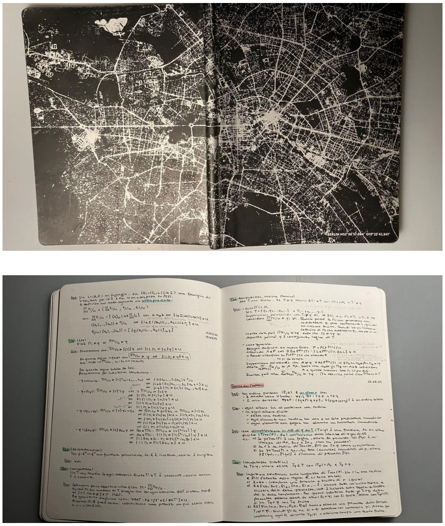


Figura 1: Il mio quaderno degli appunti di Logica.

È normalissimo rimanere indietro con gli esami, trovarsi a dover riprovare uno scritto per la terza o quarta volta, restando incerti di passare. È normalissimo anche rischiare di trovarsi in serie difficoltà ad un esame anche se si è molto preparati. Resta il fatto che a Pisa, di sicuro, la matematica s'impara per davvero. Studiando per gli esami che ho dato qui, sono entrata dentro la matematica come ancora non mi era successo. Ho tratto da ogni singolo corso che ho seguito più sapere di quanto non fossi riuscita a raccoglierne nei miei anni in Germania e ho imparato a studiare "la teoria" come si deve. Quindi mi sembra normale che dopo avere passato anni in questa facoltà, a forza di studiare e calcolare e dimostrare, uno o si annoia e lascia stare, o si innamora sempre di più della matematica. Qui c'è gente che quando non si prepara per gli esami, studia cose più avanzate, c'è gente che anche nelle pause parla di definizioni viste e non viste, che menziona dei teoremi per poi poter dire «che figata vero?». A Berlino non succede che ragazzi del primo anno vadano a seguire corsi del secondo/terzo per "cultura generale" e non mi era capitato di vedere studenti che vanno ad un orale sperando di "divertirsi". Ma anche chi non è così tanto preso, chi (come me) nelle pause magari preferirebbe parlare di calcio, anche questi imparano ad apprezzare la bellezza e la potenza della matematica. E finiscono per dire «però è la materia più bella del mondo» dovendo rifare un'esame per la seconda volta, o «per fortuna studio matematica» dopo nove ore passate in Dipartimento. Forse per alcuni di voi questo potrebbe sembrare normale. Per me non lo era.

3 Colleghi e amici

Una cosa alla quale mi sono abituata facendo matematica a Pisa sono i fenomeni, quelli bravi bravi. Siccome Pisa ha un'ottima offerta a livello didattico s'iscrivono qui tutti quei ragazzi che la matematica l'hanno già vista a livelli più alti di quello scolastico, ai quali tutto sembra riuscire facile, che leggono le cose una volta e le hanno già capite. Ho già parlato di voti bassi e di scritti non superati, ma ci sono ovviamente quelli che invece prendono tutti trenta e a volte pure la lode. Tutta questa gente può mettere un po' a disagio chi, come me, si sente più "normale" o poco adatto. Ma in realtà l'inizio è difficile per quasi tutti, anche per quelli che poi diventano bravi bravi. Si impara tutti strada facendo, si impara a studiare, si impara ad accettare qualche voto basso o invece a continuare a lottare per arrivare a quelli più alti. Si impara a fare le cose con i propri tempi, a correre o a lasciare correre gli altri. E sopratutto, e questo in particolar modo a Pisa, si impara ad aiutarsi a vicenda. Perché una condivisione e una collaborazione come l'ho vista in queste aule studio io non la conoscevo e sono sicura che sia molto rara, se non unica. Qui si studia tutti insieme, dal primo al quinto (o settimo) anno. Il Dipartimento è sempre popolato, in tutte le ore del giorno, e nelle aule studio non c'è mai vero silenzio. Ovviamente c'è molta collaborazione tra quelli che stanno seguendo lo stesso corso, facendosi domande e/o mettendosi in due o in tre alla lavagna a fare esercizi o dimostrazioni. Ma oltre a questo c'è moltissimo scambio tra i vari anni. Quelli più avanti con gli studi li ho visti aiutare i nuovi arrivati, come loro erano stati aiutati da quelli ancora prima. Quelli più pronti li ho trovati sempre disposti ad aiutare chi era in difficoltà, a rispondere alle loro domande o chiarire i loro dubbi. Si creano amicizie tra matricole e laureandi, piene di scambio e consigli, che contribuiscono tantissimo alla formazione e allo sviluppo di ognuno. Io ho capito qui cosa sia veramente la matematica, dove possa portare. Ascoltando i discorsi e

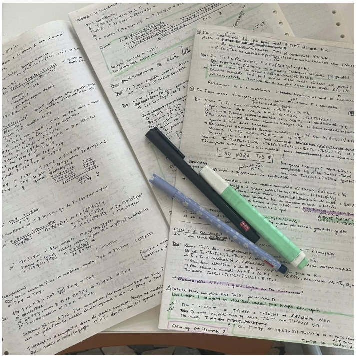


Figura 2: Appunti e fogli di studio, un po' disordinati.

i ragionamenti di altri ragazzi ho imparato ad apprezzarla molto di più, a desiderare di conoscerla sempre più a fondo. E ho capito quanto di più possa essere bella e quanto di meno esasperante, quando la condividi con gli altri. Pure io, da ragazza mezza straniera in Erasmus, ho trovato il mio posticino in questo Dipartimento. Ho avuto la fortuna di trovare un gruppo di amici davvero speciale, grazie al quale non mi sono mai dovuta sedere al tavolo a studiare da sola, ho sempre avuto qualcuno accanto con il quale ridere (o piangere) o fare merenda. E oltre a loro ho studiato e parlato con tante altre persone di vari anni, sempre disposte a rassicurarmi e a darmi consigli, che mi hanno fatto sentire bene in queste aule anche quando mi stavo disperando per un esame. Perché le difficoltà ci sono e a Pisa sono tante, ma proprio qui, a Pisa, non ti trovi mai costretto ad affrontarle da solo.

Il mio primo anno in Dipartimento

di ***Margherita Zucchelli***,
studentessa triennale del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa

Ciao! Mi chiamo Margherita ed ho appena concluso il mio primo anno a Matematica. Vorrei condividere la mia esperienza con l'obiettivo di fornire considerazioni ai coraggiosi che stanno valutando questa facoltà. Prima di tutto mi piacerebbe tranquillizzare chi pensa di non avere le basi adeguate per via della preparazione ricevuta a scuola. La matematica universitaria non è la naturale continuazione della materia che conoscete, quindi nozioni concrete avvantaggiano ben poco. A questo punto, meglio sapere di non sapere. Le materie del primo anno sono Analisi, Aritmetica, Fisica, Geometria, Programmazione e LIMCO. Alcune, come Analisi, trattano argomenti leggermente più vicini alla matematica che vi è familiare, ma in ogni caso l'approccio è molto più formale ed astratto. Questa per me è stata la grande difficoltà (e bellezza) del primo anno. Quindi sicuramente un po' di manualità nel problem solving può fare comodo all'inizio, ma un metodo di studio serio e strutturato, unito all'attitudine a capire davvero gli argomenti studiati, sono prerequisiti molto più importanti.

Per me la matematica è sempre stata una materia appassionante e divertente, quindi questo percorso era una delle due possibili scelte alla fine del liceo, insieme ad una scuola di falegnameria. Ho optato per la prima solo a maggio della quinta liceo, dopo essere stata a Cesenatico alle Olimpiadi. Paradossalmente il fattore decisivo non è stata direttamente la materia ma la comunità che le si crea spontaneamente intorno. Cesenatico è una piccola città sul mare che per tre giorni è invasa da studenti da tutta Italia, che qui si raccolgono per disputare gare di matematica. Si respira grande passione in tutta la città, si cammina per strada la sera con un gelato e si incontrano le squadre che discutono per una dimostrazione o si vedono ragazzi risolvere problemi sulle tovagliette durante i pasti. Questo fervore condiviso mi ha un po' inglobata ed ho deciso che la falegnameria avrebbe potuto aspettare.

Una volta cominciato il primo semestre, piena di entusiasmo ho iniziato a seguire le lezioni. Tuttavia, il mio approccio allo studio inizialmente è stato molto simile a quello che avevo al liceo: seguivo tutti i corsi, accontentandomi di riuscire a stare al passo con i concetti nuovi che venivano man mano introdotti. Inoltre, all'università gli studenti possono gestire in maniera più autonoma il proprio tempo rispetto che a scuola e dunque, inebriata da questa nuova libertà, nel primo semestre mi sono riempita di impegni pomeridiani. Pensavo che la mia organizzazione dello studio fosse adeguata, dato che finora aveva sempre funzionato, ma una volta giunta la prima sessione di esami mi sono dovuta ricredere. Infatti, le materie che pensavo di aver bene assimilato durante il semestre, nel momento in cui ho iniziato effettivamente a preparare gli esami mi sembravano estranee ed ho avuto la sensazione di dover ristudiare tutto da zero. In quei momenti, mi sono sentita un po' persa ed ho dubitato che questo fosse il percorso giusto per me.

Ciao, io sono Margherita ed appunto studio matematica. Beh questo trafiletto serve per dire che c'è anche altro nella mia vita!

Per esempio sono una scout (sfegatata), nei weekend faccio l'arbitro di calcio e mi piace arrampicare. Mi diverte fare belle foto ma anche (assai più spesso) immortalare momenti assolutamente ordinari. Mi entusiasmano i lavoretti tipo DIY ma non riesco tanto ad incastrarli nelle mie giornate. Di solito cerco di regalare oggetti fatti a mano per unire l'utile al dilettevole. Studio tedesco e sarei curiosa di provare tante altre cose! Tuttavia, già per gestire queste devo ricorrere a discrete dormite sui tavoli del dipartimento, quindi direi che al momento questo è più o meno tutto!

Nell'incertezza ho iniziato il secondo semestre, anche un po' contrariata per il fatto che mi ero resa conto di dover rinunciare ad alcune attività pomeridiane per lasciare spazio all'università. Senza girarci attorno: questa è una facoltà molto bella, ma sicuramente un po' ingombrante e richiede tanto studio. Per fortuna, io e la matematica abbiamo smesso di bisticciare. Le cose hanno iniziato a migliorare e, poco alla volta, ho acquisito più sicurezza. Mi sono appassionata moltissimo, non solo per ciò che si impara, ma forse ancor più per il modo in cui si impara. Certo, è fondamentale conoscere la teoria e le definizioni, ma l'apprendimento passa soprattutto attraverso gli esercizi. Questo è un aspetto puramente soggettivo, ma a me piace che il mio studio comprenda anche momenti in cui chiudo gli occhi per cercare di interiorizzare concetti con calma. Inoltre mi affascina la sensazione di studiare per scoprire idee e nuovi “attrezzi” per affrontare la materia.

Inoltre, questo approccio così pratico all’apprendimento si presta molto bene alla condivisione tra studenti. All’inizio, soprattutto in una disciplina come matematica, il confronto con gli altri può intimorire, ma per me il superamento di questa paura è stato fondamentale per il cambiamento positivo che ho vissuto nel secondo semestre. Ho avuto la fortuna di trovare un gruppo di studio ed ogni problema si risolve con un brainstorming collettivo. In generale, anche per chi preferisce studiare in autonomia, in dipartimento c’è molto supporto tra gli studenti e non credo esista qualcuno in tutto l’edificio che si rifiuterebbe di darti una mano con un esercizio. Questo è un aspetto che secondo me va tenuto in considerazione nella scelta, perché l’ambiente è davvero unico. Io adesso sono soddisfatta, ma il tempo impiegato nello studio è considerevole e penso che se studiassi qualcos’altro o la stessa materia da un’altra parte avrei smesso. Per via dell’alto livello accademico gli iscritti

Figura 1: Tipico pomeriggio in Dipartimento

a a questa facoltà vengono da tutta Italia, quindi il dipartimento è un punto di riferimento a 360°, anche socialmente. Non essendo tantissimi alla fine tutti si conoscono almeno di vista e per via della passione che condividiamo c’è uno spontaneo affiatamento collettivo. In conclusione, per ora sono soddisfatta della mia scelta, ma mi rendo conto che siano necessarie passione e una buona dose di fiducia nel percorso intrapreso.

Se state valutando questo corso di studi, vi consiglio di iscrivervi alla ’Settimana Matematica’, una bellissima iniziativa del dipartimento. Partecipare vi permetterà di farvi un’idea dell’ambiente e di come si svolge una lezione universitaria. Insomma, male non può fare! Spero di avervi chiarito un po’ le idee, buona fortuna per la vostra scelta!

Sfide matematiche: problemi significativi proposti dagli studenti

In questa nuova rubrica di problemi, abbiamo deciso di raccogliere una lista di esercizi che, in un certo senso, sono stati significativi per studenti ed ex studenti del Dipartimento di Matematica di Pisa. Oltre ai testi, abbiamo deciso di riportare anche le sensazioni che hanno accompagnato l'affrontare i problemi proposti

Palline e contenitori

In quanti modi puoi mettere 6 palline in 4 contenitori?

> *"La professoressa poi osservò «per rappresentare 4 contenitori però non mi serve disegnare tutti i lati, basta disegnare 3 stanghette per delimitare i confini». Disegnò quindi 3 stanghette e 6 palline. Mi ricordo tutt'ora la sensazione che provai in quel momento..."*

Damiano Bussagli, ex studente

Pulce scalatrice

Una pulce si trova alla base di un cilindro con raggio di base r e altezza h. Quanta strada deve percorrere al minimo per arrivare sulla sommità del cilindro e aver fatto almeno un giro intorno ad esso?

> *"Perché slegare il cilindro è una bellissima idea!"*

Alberto Bucci, dottorando

Geometria del binomio

C'è un modo di dimostrare geometricamente la formula del quadrato di binomio?

> *"La sensazione è stata buffissima: un mix tra scoperta e stupore!"*
>
> Viola Giovannini, dottoranda

Il soffitto

Tonio: «La cappella ha venti pareti: è un icosagono. La decorazione che ho fatto per il soffitto consiste di travi sottili a tracciare i 20 lati e le 170 diagonali.»
Renzo: «Quanti sono i triangoli rettangoli, che le travi, o parti di esse formano e che hanno il vertice dell'angolo retto sul perimetro dell'icosagono?»

> *"Questo ho smattato un'ora! E' un problema delle Olimpiadi a squadre, durante il covid. Quindi, dopo mesi chiusi in casa, siamo andati in pineta a fare la gara. No, bellissimo! Mi era piaciuto proprio farlo, pensavo fosse fatto per me!"*
>
> Margherita Zucchelli, studentessa

Viaggio in autostrada

Un turista parte per un viaggio di 800km in autostrada; alla partenza ha fatto il pieno di carburante, e con il pieno ha un'autonomia di 200km; ma, a causa di uno sciopero, i distributori di benzina hanno una probabilità del 50% di essere chiusi; lungo l'autostrada il turista troverà un distributore ogni 100km, e, se il distributore sarà aperto, ogni volta farà il pieno. Che probabilità ha il turista di arrivare a destinazione?

> *"Un problema apparentemente di probabilità (del resto, c'è scritto probabilità...) che si risolve con una specie di successione "à la Fibonacci"? E chi l'aveva visto mai! Infatti quando pensavo (dopo giorni e giorni!) di aver trovato la soluzione non sapevo nemmeno giustificare se fosse giusta o no (quindi a posteriori potrei dire che non avevo davvero trovato la soluzione, anche se allora ero più propenso per il sì)."*
>
> Giuseppe Bargagnati, postdoc

Formica su griglia

Una formica si trova sul vertice in basso a sinistra di una griglia rettangolare di dimensioni $m \times n$. Quanti sono i possibili percorsi per raggiungere il vertice in alto a destra potendosi spostare solamente a destra o in alto?

"Il fatto è che devi per forza fare n passi in alto e m passi a destra e quindi è come contare le stringhe di lunghezza $n + m$ con n lettere su e m lettere destra."

David Vencato, studente magistrale

Tratte aeree

In una nazione ci sono 2010 aeroporti. Alcuni di questi aeroporti sono collegati con dei voli di sola andata (il che non esclude che tra due aeroporti possano esserci voli in entrambe le direzioni). Il sistema dei collegamenti è tale da rispettare le seguenti due condizioni:

(a) da ogni aeroporto è possibile raggiungere ogni altro aeroporto mediante un'opportuna successione di voli,
(b) se si cancella anche un solo volo, la condizione (a) non è più soddisfatta.

Un giorno una compagnia aerea decide di cancellare un volo. Determinare in quanti modi, al massimo, è possibile aprire un nuovo volo (eventualmente anche quello appena chiuso) in modo tale che le condizioni **(a)** e **(b)** siano nuovamente entrambe soddisfatte.

"Questo problema di combinatoria non mi tornava mai! Ci sarò stato sopra credo due giorni, perché ogni volta mi veniva un risultato diverso contando in modi diversi. Mi divertii tanto, onesto, anche se dopo un po' volevo strappare tutto!"

Federico Allegri, studente magistrale

Il cammino della lumaca

Una lumaca si trova all'estremo di un elastico e la sua *casina* si trova all'altro estremo. La lumaca si muove con velocità $1\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, mentre l'elastico si allunga di $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. La lumaca arriverà mai alla casina?

"Ho sentito un grande fascino verso la matematica! Pensare alle cose in modo matematico ti porta a dedurre cose controintuitive, il che è molto affascinante!"

Marco Miani, dottorando

Come se le tirano le ancelle

Alice sta giocando con le sue 10 ancelle. All'inizio Alice ha la palla in mano. Ogni volta che Alice ha la palla in mano sceglie un'ancella a caso (con la stessa probabilità tra tutte) e le passa la palla; ogni volta che un'ancella ha la palla in mano la passa con $\frac{1}{2}$ di probabilità a Alice e con $\frac{1}{18}$ di probabilità a ognuna delle altre ancelle. Dopo dieci passaggi ben riusciti però la palla viene lanciata un'ultima volta sbagliando la mira. Qual è la probabilità che sia stata proprio Alice a sbagliare l'ultimo lancio?

> *"...la connessione tra quello che sembra un calcolo probabilistico e la successione per ricorrenza che puoi usare per esprimerlo mi ha lasciato a bocca aperta! E mi ha dato una botta di adrenalina immensa quando ho saputo di averlo risolto correttamente"*
>
> Alessio Bernazzi, studente magistrale

Il trucco di Euclide

Determinare il valore delle cifre a, b in modo che i tre numeri $34ab7$, $33ab$, $ab75$ abbiano un fattore comune intero maggiore di uno.

> *"Dopo un'ora che ci stavo dietro finalmente un lampo: «No va beh assurdo! Si fa con Euclide!». Brividi. In autobus non facevo altro che ripetere al prof e ai miei amici l'intuizione che c'era dietro."*
>
> Luca Bruni, ex studente

Matematica nei media

In questa ultima sezione segnaliamo un libro, un film, un canale youtube debitamente recensiti da studenti ed ex studenti del Dipartimento per stimolare la curiosità nella matematica all'infuori di quella che si studia all'università.

1 Il teorema di Margherita - A. Novion, 2023

Margherita, una studentessa di matematica dell'École normale supérieure di Parigi, decide di cambiare completamente vita dopo che un errore scoperto all'ultimo momento dal suo relatore ne invalida la tesi di laurea sulla congettura di Goldbach.

La matematica al cinema e *Il teorema di Margherita* di Giuseppe Bargagnati

A dispetto della definizione di "regina delle scienze" (dovuta a Gauss), la matematica (e soprattutto quella più teorica) non gode della stessa fortuna di altre discipline scientifiche in termini di rappresentazione televisiva e cinematografica, almeno negli ultimi anni: basti pensare a come la chimica sia stata per un lungo periodo la regina indiscussa della serialità televisiva, grazie a *Breaking Bad* di Vince Gilligan (poi emulato anche dalle nostre parti, con la trilogia cinematografica di *Smetto quando voglio*), e la fisica sia arrivata quest'anno addirittura a vincere l'Oscar con *Oppenheimer*, dopo che già in *Interstellar* e in *Tenet*

Christopher Nolan aveva provato ad amalgamare teorie fisiche complicate in oggetti filmici altamente spettacolari, in cui la componente scientifica non era banale orpello intellettualoide quanto piuttosto premessa fondamentale dei movimenti di mondo messi in scena.

Questa posizione di subalternità può essere ricondotta sostanzialmente a due fattori: da una parte, la sostanziale inapplicabilità (perlomeno immediata) della matematica teorica più spinta, che impedisce di rendere concrete le ricadute nel "mondo reale" delle formule che appaiono sulle lavagne (un analogo di quello che erano le metanfetamine per *Breaking Bad* e la bomba atomica per *Oppenheimer*, per capirci), e dall'altra la difficoltà di rendere spettacolare una disciplina che, per lunghi tratti, segue traiettorie prevalentemente mentali e difficilmente traducibili in termini cinematografici. Quest'ultimo aspetto problematico, comune per la verità alla maggior parte delle discipline puramente teoriche, era stato già riscontrato da Alfred Hitchcock, che nel sottovalutato *Sipario Strappato* aveva risolto in maniera poco soddisfacente (per sua stessa ammissione) una delle scene clou del film, basata su un confronto alla lavagna tra due scienziati (uno dei quali interpretato da Paul Newman), nella fattispecie fisici teorici, in cui uno doveva, con un escamotage, rubare la teoria scientifica dell'altro ingannandolo a colpi di gessetto. Non stupisce dunque che, per mettere in scena la regina delle scienze, si sia fatto ricorso negli anni a strade più laterali, scegliendo di mettere al centro i drammi dell'uomo più che le peculiarità della materia (vedasi *Morte di un matematico napoletano* di Mario Martone, in cui il fatto che il protagonista, Renato Caccioppoli, sia stato uno dei più importanti analisti italiani del Novecento assume un ruolo a dir poco secondario), o magari spettacolarizzando i suoi fantasmi interiori e spingendo il pedale sul melodramma (come in *A beautiful mind* di Ron Howard). Nessuna delle opere citate, tuttavia, restituisce in maniera vagamente credibile l'esperienza della ricerca nella vita quotidiana di un matematico o di una matematica:

Ciao! Sono Giuseppe, sono un postdoc in topologia e un grande appassionato di cinema. Attualmente sono all'università di Bologna, ma il mio percorso di formazione, dalla triennale al dottorato, è avvenuto interamente all'Università di Pisa.

Una delle cose che più mi piacciono della matematica è il suo essere una materia intrinsecamente sociale, che penso renda al meglio quando fatta (o raccontata) insieme ad altra persone. Nel tempo libero scrivo anche una newsletter, Happy Hour (a tema cinematografico), e, che ci crediate o meno, ho condotto una decina di puntate del Rischiatutto.

cosa che invece fa *Il teorema di Margherita* di Anna Novion, presentato fuori concorso al Festival di Cannes del 2023. La protagonista Marguerite (interpretata da un'ottima Ella Rumpf) è una dottoranda in teoria dei numeri alla Scuola Normale Superiore di Parigi che sta lavorando sulla Congettura di Goldbach. Dopo aver trovato un errore nella propria tesi di dottorato durante un seminario (peggior incubo di tutti i dottorandi del pianeta), Marguerite decide di lasciare la materia e dedicarsi ad altro, prima che il richiamo della teoria dei numeri e l'amicizia con Lucas, altro studente del suo relatore impegnato nello stesso ambito, la portino a riavvicinarsi alle lavagne. Al netto di una deriva sentimentale un po' formulaica, e di una descrizione della protagonista che poggia su alcuni stereotipi che accompagnano la figura del matematico (non sempre e non tutti immotivati, in verità: chiunque abbia studiato matematica avrà di sicuro molte amiche e amici fissati col Mahjong), *Il teorema di Margherita* ha il merito di restituire in maniera abbastanza onesta un ambiente sottoraprresentato, per di più da un punto di vista purtroppo ancora svantaggiato come quello femminile (le difficoltà di Marguerite di imporsi in un contesto patriarcale e a forte prevalenza maschile riescono a filtrare tra le righe del racconto), inserendo la parabola della protagonista in una storia quanto mai contemporanea di "burnout" e "grandi dimissioni", e riuscendo nei momenti più riusciti ad abbandonare il realismo lanciandosi verso derive quasi oniriche, come quando le complicatissime formule (tutte matematicamente corrette, supervisionate dalla matematica francese Ariane Mezard) escono dalle lavagna invadendo ogni superficie della casa.

2 Matematica su YouTube

di Andrea Baleani

Esistono numerosi canali YouTube di divulgazione scientifico matematica. Di seguito ne ho selezionati particolarmente interessanti!

Ciao! Sono Andrea, uno studente di matematica all'ultimo anno della magistrale.

Adoro i giochi da tavola e la grafica digitale, sono un appassionato di blues ed un eterno dungeon master fin dalla prima adolescenza. Della matematica apprezzo l'aspetto ludico: risolvere enigmi utilizzando tutte le regole del gioco, avere tanta fantasia, ricercare connessioni e pattern inaspettati, cambiare frequentemente prospettiva su un problema alla ricerca del momento "Eureka!".

2.1 3Blue1Brown

3Blue1Brown, alias di Grant Sanderson, è un laureato in matematica a Stanford che nel 2015 decide di iniziare la sua carriera su Youtube come divulgatore. Grant trasforma la sua eterocromia settoriale in un logo che diventa presto marchio di qualità: su uno sfondo nero eleganti animazioni portano avanti la spiegazione mentre dei simpatici π ascoltano e si arrovellano sulla questione.

> Mi metto a contare il numero di rimbalzi ed esce fuori π! Pensavo peggio, invece bastava la quantità di moto.
>
> `https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs`

> Sembrava funzionare tutto perfettamente, fino a quando... Una prospettiva diversa sulla trasformata di Fourier
>
> `https://www.youtube.com/watch?v=851U557j6HE&t=810s`

2.2 Numberphile

Il giornalista e produttore video Brady Haran ha una passione per la matematica. Negli ultimi 14 anni ha intervistato matematici provenienti da ogni parte del mondo (sul suo sito trovate una lunga lista). In ciascun colloquio il

matematico di turno, munito dell'iconico foglio gigantesco di carta marrone, spiega il suo problema, enigma, indovinello oppure una fettina di teoria accattivante. Il tutto sempre con grandissima attenzione alla chiarezza ed alla semplicità espositiva, senza mai risultare banali.

> Una successione per domarli tutti! Numeri di Catalan e problemi mutaforma.
>
> `https://www.youtube.com/watch?v=fczN0BCx0xs`

> Una storia di spionaggio matematico nella Seconda guerra mondiale e, no, non è su Alan Turing!
>
> `https://www.youtube.com/watch?v=WLCwMRJBhuI`

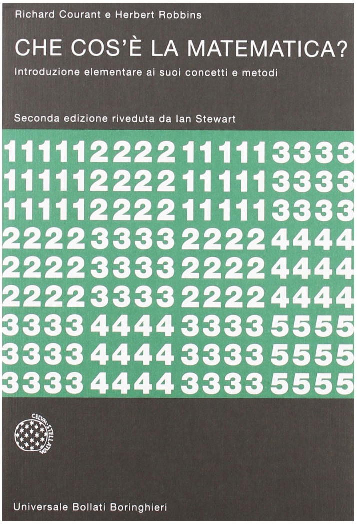
2.3 Mathologer

Burkard Polser è professore di geometria e matematica ricreativa presso l'università di Monash a Melbourne. Dal 2015 è su youtube con l'alis di Mathologer e confeziona video che sono veri e propri gioielli divulgativi. Tra i tre proposti, si tratta sicuramente del canale che meno si fa remore ad andare a fondo della questione. Per evitare di spaventare i non addetti ai lavori, spesso le spiegazioni sono lasciate alle immagini. Mai in vita mia avrei immaginato di apprezzare così tanto dimostrazioni di questo genere!

> Da Archimede ai nastri trasportatori negli aeroporti: volume e superficie di una sfera.
>
> `https://www.youtube.com/watch?v=5q_sfXY-va8`

> Come è bella l'analisi quando la fai per immagini: quando una rappresentazione non trae in inganno ma anzi!
>
> `https://www.youtube.com/watch?v=G0Fa5Zl-Z3c`

3 Che cos'è la Matematica - R. Courant, H. Robbins



Concepito per principianti e scienziati, per studenti e insegnanti, per filosofi e ingegneri, il libro offre una illustrazione accessibile del mondo matematico. Scritto in ordine sistematico, il libro può essere letto anche per gruppi di capitoli a seconda delle esigenze conoscitive e didattiche, e in ogni caso l'esposizione gradua sempre opportunamente le difficoltà.

Un aiuto per la verifica
di Luca Bruni

Ricordo ancora quando il 21/02/2013 mi venne regalato questo libro in seguito alla partecipazione alla fase provinciale delle Olimpiadi della Matematica. Con piacere sfogliai subito le sue pagine, apprezzando per lo più i disegni topologici, le formule e le costruzioni geometriche. La scrittura e la forma mi apparivano (e appaiono tutt'ora) antiche e mi suggerivano un atteggiamento reverenziale nei suoi confronti.

A casa mi buttai sulla lettura, ma presto mi resi conto che non era affatto come un romanzo. Intuivo idee, suggestioni, ma la formalità e la quantità e profondità dei contenuti mi metteva molto in difficoltà. Volevo approfondire qualcosa di algebra? Geometria Euclidea? O magari soltanto cimentarmi in qualche esercizio impegnativo e vedere come approcciarlo? Era possibile tutto quanto, ma mi scontravo spesso con il non riuscire a comprendere a fondo ciò che il libro mi volesse comunicare e spesso finivo per chiudere il libro e pensare «Troppo difficile, non è davvero per gli studenti delle superiori».

Il libro rimase però sul comodino, ed era bello sfogliarlo e perdersi: letteralmente a volte non capivo assolutamente nulla di quello che stavo leggendo, ma ero come imbambolato e affascinato. Non nascondo il mio piacere nel leggere così tanta rigorosità e la mia voglia nel riprodurla: il formalismo aveva un che di accattivante, una lingua nuova e non compresa da molti che racchiudeva verità intrinseche.

Alla verifica di matematica, il nostro professore era solito mettere il cosiddetto *mostro*: un esercizio che valeva ben 2 voti per poter raggiungere il fantomatico 10. Uscì il *Frattale di Von Koch*, una figura geometrica costruita ricorsivamente (appunto come un frattale) che somiglia a un fiocco di neve sempre più frastagliato. Nel *mostro* veniva chiesto di dimostrare che tale figura geometrica aveva perimetro infinito, ma area finita e in particolare di calcolare il valore dell'area. Mi buttai sul problema, feci alcune osservazioni e mi resi conto che avrei dovuto calcolare una serie geometrica (anche se al tempo non credo ricordassi il nome di quello che stavo facendo). In quel momento le pagine di *Che cos'è la matematica* mi tornarono in mente e la sezione sulle progressioni geometriche sfogliata qualche giorno prima apparì tutto a un tratto chiara: era proprio quello che mi serviva! Non sarò mai grato abbastanza per quel momento!

All'università ho poi scoperto che il Courant, Robbins aveva anche per altre persone lo stesso valore affettivo che ricopriva per me. E non solo per gli studenti! Alla domanda se ci fosse un problema o un argomento a cui fosse particolarmente affezionato, il Direttore del Dipartimento, *Giovanni Gaiffi*, risponde così:

Ciao! Sono Luca e sono un insegnante di matematica al Liceo Marconi di San Miniato. Il mio percorso di formazione è stato totalmente pisano e sono molto affezionato alla realtà del Dipartimento.

La matematica per me è sempre stata arte. Un mondo che vive al di fuori di tutto, che puoi creare con la fantasia e in cui ogni cosa segue la giusta direzione. Ho scelto di insegnare per trasmettere questa passione e l'idea che *porsi domande* sia fondamentale, sempre.

Sono il vincitore del primo (e unico) torneo di Xonotic del Dipartimento!

> *"...a me è piaciuta moltissimo la questione della caratteristica di Eulero dei poliedri fatta con i grafi. La ho vista alle superiori, a dire il vero sul Courant, Robbins!*

IN SUPREMÆ DIGNITATIS

1343