Dipartimento di Matematica

UNIVERSITÀ DI PISA

Matematica
Il giornalino degli open days

notizie, giochi e pillole di matematica

Pisa, gennaio 2026

Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

MATEMATICA

Il Giornalino
degli
Open Days

CAMPANO
EDIZIONI

Piano Nazionale
Lauree Scientifiche

Realizzato con il contributo del Piano Lauree Scientifiche – Matematica.

Su indicazione della Commissione Terza Missione.

Coordinamento: Luca Bruni

Grafica: Luca Bruni, Eva Silvestri

Realizzato grazie al contributo degli studenti (ed ex studenti) del dipartimento:
Luca Bruni, Jacopo Burelli, ex studenti del corso di laurea in Matematica.

Edizioni Il Campano
ISBN 978-8-86528-712-5

Introduzione

Ecco a voi il **numero 21** del **Giornalino degli Open Days**, una pubblicazione curata da professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa e rivolta principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

Se state considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario che abbia a che fare con la matematica, troverete materiale che fa per voi! Anzitutto, potrete leggere una presentazione del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa. Oltre a una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica e sulle varie opportunità di cui godono i nostri studenti, troverete alcuni dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in matematica.

A seguire, vi presentiamo tre articoli divulgativi che mostrano come la matematica entri in gioco in contesti diversi. **Jacopo Burelli**, professore presso il Liceo Scientifico Pesenti di Cascina, racconta la nascita di un esercizio e come il contesto dia senso a un problema. **Luca Bruni** ci accompagna poi in un viaggio tra teoria dei grafi e algoritmi ispirati al modo in cui le formiche cercano il cibo, partendo da giochi e curiosità per arrivare a modelli più complessi. Nelle pagine successive, ancora **Luca** ci invita a riflettere, grazie al confronto con i suoi ex compagni di corso, su alcuni *errori legittimi* che commettiamo nelle nostre inferenze quotidiane, mostrando come un approccio matematico possa aiutarci a smontare luoghi comuni e abitudini di ragionamento. Chiudiamo con una rubrica di *Sfide matematiche da libri notevoli*: otto problemi selezionati da testi classici di problem solving, con livelli diversi di difficoltà per mettere alla prova intuizione e tecniche. Speriamo che vi divertiate a risolverli!

Non dimenticate, inoltre, che, se volete affinare le vostre abilità di *problem solving* affrontando altri problemi, ne trovate di ogni genere e livello nella raccolta linkata alla pagina web del giornalino, che potete raggiungere tramite il codice QR qui sopra. Scoprirete i molti esercizi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni, utili per proseguire l'allenamento dopo le

SCAN ME

Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo `https://www.dm.unipi.it/terza-missione/home-orientamento/il-giornalino-degli-open-days/`!

sfide di questo numero.

Infine, un ringraziamento speciale a **Eva Silvestri**, nostra laurenda magistrale, che ha pensato e realizzato la copertina!

Indice

Introduzione **3**

Il corso di laurea in Matematica **7**
1 Il corso di laurea a Pisa 7
2 Sbocchi occupazionali 9
3 Borse di studio 10
Bibliografia 11

Storia di un esercizio **13**
1 L'importanza del contesto 13
2 La nascita 16
3 Approfondire un problema 18
4 Commento finale 22
Bibliografia 23

Teoria dei grafi e la ricerca del cibo delle formiche **25**
1 Giochi e grafi 25
1.1 Il gioco dei 4 cavalli 25
1.2 Il gioco degli smartphone 27
1.3 Non solo giochi 28
2 Elementi di teoria dei grafi 29
3 Dalle formiche ai grafi: ottimizzazione tramite intelligenza collettiva 31
3.1 Il problema della ricerca del cibo 31
3.2 Algoritmo delle colonie di formiche - *Ant Colony Optimization* o ACO 32
3.3 Implementazione e sperimentazione 34
3.4 Applicazioni dell'algoritmo ACO 37
4 ACO vs algoritmi deterministici: Obiettivi e Differenze 38
4.1 L'obiettivo dell'ACO non è la convergenza rigida . . . 38

4.2 Quando scegliere ACO rispetto a un algoritmo che trova il cammino in modo deterministico? 38

Errori Legittimi **39**
1 Il tacchino induttivista di Russell 39
2 Falsi miti su probabilità e statistica 41
2.1 Prima o poi uscirà croce, no? 41
2.2 La legge dei grandi numeri 42
2.3 Statistica emotiva 43
3 È ovvio 44
4 Commenti finali 45

Sfide matematiche da libri notevoli **47**

Il corso di laurea in Matematica

Sei indeciso su cosa studiare all'università e sei incuriosito da matematica, ma non sai bene in che cosa ti potresti imbattere? Proveremo ad aiutarti a chiarire le idee, mostrandoti le principali caratteristiche del corso di Laurea in Matematica a Pisa e le numerose opportunità che offre sia per quanto riguarda il percorso universitario che per le prospettive future.

1 Il corso di laurea a Pisa

Il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, riconosciuto come Dipartimento di Eccellenza 2023–2027, offre i Corsi di Laurea Triennale e Magistrale in Matematica. Il primo ha una durata di tre anni accademici e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU); il secondo dura due anni e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

Il corso di laurea triennale a Pisa fornisce una solida preparazione di base nei vari settori della matematica, grazie ad una serie di esami obbligatori. Già al secondo, ma in particolar modo durante il terzo anno sono previsti esami a scelta: in questo modo, grazie alla gran quantità di corsi a scelta attivati, ognuno può approfondire gli argomenti che ha trovato di maggior interesse. Il corso di laurea triennale è diviso in due curricula (è richiesto di scegliere subito, ma c'è la possibilità di cambiare in seguito):

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

Il primo, più teorico, prevede anche una più approfondita preparazione in Fisica, mentre il secondo è più applicativo ed integra lo studio della Matematica con quello dell'Informatica. Nella Tabella 1 sono riportati i due piani di

<table>
<tr><th>Fondamentale</th><th>Computazionale</th></tr>
<tr><td colspan="2">I anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aritmetica (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Laboratorio di introduzione alla matematica computazionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi matematica 1 (15 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria 1 (15 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fisica I con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">II anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algebra 1 (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inglese scientifico (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analisi matematica 2 (12 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometria 2 (12 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Esame a scelta (6 CFU)</td><td>Algoritmi e strutture dati (6 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">III anno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meccanica razionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Fisica II (9 CFU)</td><td>Calcolo scientifico (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Fisica III (6 CFU)</td><td>Laboratorio computazionale (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)</td><td>Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)</td></tr>
<tr><td></td><td>Ricerca operativa (6 CFU)</td></tr>
<tr><td>4 Esami a scelta (24 CFU)</td><td>3 Esami a scelta (18 CFU)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prova finale (9 CFU)</td></tr>
</table>

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2025/2026 (vedi [3]).

studi.

La maggior parte dei laureati triennali sceglie di proseguire gli studi con la magistrale restando a Pisa. I curricula in cui è diviso il corso di laurea magistrale sono cinque: *applicativo*, *didattico*, *generale*, *modellistico* e *teorico*. In questo modo, ad ogni studente viene offerta la possibiltà di specializzare il proprio piano di studi nel ramo che più lo ha interessato e appassionato durante i precedenti anni.

Gli studenti iscritti a matematica possono inoltre usufruire degli ambienti a loro dedicati all'interno del Dipartimento di Matematica, tra cui varie aule studio e due aule computer. Qui gli studenti hanno la possibilità di conoscersi e studiare al di fuori dell'orario di lezione, così da poter collaborare e confrontarsi durante lo studio. Con lo stesso spirito agli studenti del primo anno sono affiancati dei tutor, studenti più avanti nel percorso che li aiutano ad affrontare i primi esami universitari.

Il nostro dipartimento collabora inoltre con alcune università estere grazie ad accordi internazionali. Ci sono gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio oppure lavorare alla tesi presso un'altra università europea. Attualmente sono attivi accordi di questo tipo con 40 corsi di studio in matematica europei. Simili agli accordi Erasmus sono gli accordi SEMP (Swiss European Mobility Program); abbiamo accordi attivi con le Università di Basilea, Friburgo, Ginevra, Neuchatel, con l'EPFL di Losanna e con l'ETH di Zurigo. C'è poi la possibilità di ottenere un titolo congiunto (*double degree*) grazie all'accordo con la Hokkaido University. L'Università di Pisa fa parte di *Circle U.*, un'Alleanza Universitaria Europea che comprende altri 8 prestigiosi atenei europei. Dal suo lancio nel Novembre 2020, i partner dell'alleanza cooperano con l'obiettivo di creare un'università europea inclusiva, interdisciplinare e fortemente orientata alla ricerca.

Puoi trovare altre informazioni e rimanere aggiornato sui nuovi accordi sulla pagina dell'Internazionalizzazione

`https://www.dm.unipi.it/international/`

Per ogni altra curiosità, visita la pagina del Corso di Studi seguendo il link `http://www.dm.unipi.it/webnew/it/cds/home-cds` oppure inquadrando il QR qui sopra!

SCAN ME

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? Il progetto "I Mestieri dei Matematici" ha raccolto alcune storie professionali che possono aiutarti a rispondere a domande di questo tipo e che forse ti stupiranno. Le trovi sul canale Youtube del progetto:

`https://www.youtube.com/@mestierideimatematici3873`

In generale risulta che i laureati in matematica sono soddisfatti della scelta fatta e godono di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare sul sito di Almalaurea si possono trarre i seguenti dati che riguardano i nostri laureati magistrali, vedi [2]:

- L'86% dei laureati magistrali del 2024 si dichiara soddisfatto del corso di studi.

- Il tasso di occupazione dei nostri laureati magistrali del 2020 a tre anni dalla laurea è il 100% (questo include coloro che proseguono con un dottorato).

Da alcuni anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro Dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo è nato il progetto "Matematici al Lavoro".

3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge di solito all'inizio di settembre in diverse sedi in Italia tra cui una è proprio Pisa.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (sono 15 per l'anno accademico 2025/2026), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i due anni successivi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

Anche per il corso di laurea magistrale sono bandite delle borse INdAM: per esempio per l'anno 2025/2026 sono 12, più 6 dedicate in particolare a chi si iscrive a Pisa, di cui almeno 3 per studentesse, come segno concreto della nostra attenzione alla parità di genere.

È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Puoi trovare tutte le informazioni sul sito `https://www.altamatematica.it`.

Gli studenti che si iscrivono qui a Pisa possono richiedere anche una borsa di studio del DSU (Azienda della Regione Toscana per il Diritto allo Studio Universitario) sulla base del reddito familiare. I vincitori di questa borsa ottengono l'esonero dalle tasse universitarie, un contributo per le spese e in alcuni casi anche vitto e alloggio gratuiti. Per avere maggiori informazioni, puoi visitare il sito `https://www.dsu.toscana.it/`.

Bibliografia

[1] `https://www2.almalaurea.it`

[2] `https://www.dm.unipi.it/assicurazione-della-qualita/assicurazione-della-qualita-didattica/situazione-occupazionale-dei-laureati/`

[3] `https://www.dm.unipi.it/didattica/laurea-triennale/regolamento/`

Storia di un esercizio

*di **Jacopo Burelli**, Laureato magistrale a Pisa, adesso professore di Matematica e Fisica presso Liceo Scientifico Pesenti, Cascina*

1 L'importanza del contesto

Problema

Trovare x tale che
$$(x-6)^3 = \sqrt[3]{x} + 6.$$

Probabilmente state già pensando a diversi modi per risolvere il problema e, con buona probabilità, almeno una delle soluzioni che troverete sarà corretta. Ma che cosa ci dice davvero questo sul problema? In realtà, molto poco. Da dove proviene questo esercizio? È tratto da un compito o da un'esercitazione? Aritmetica, Analisi, Analisi Numerica, o qualche altro ambito? Come dovrei affrontarlo? Quali strumenti posso utilizzare? E, inoltre, a quale insieme appartiene x?

Per dare una panoramica di come sono arrivato a formulare il problema, faccio un passo indietro e provo a motivare il processo creativo che sta dietro alla costruzione di questo esercizio. È proprio questo processo che mi ha interessato a tal punto da spingermi a scrivere questo articolo, il cui obiettivo vorrebbe essere, più che la soluzione in sé, **l'importanza del contesto**.

Ho pensato a questo problema mentre preparavo un compito per una terza di liceo scientifico e questo mi ha portato a riflettere su quanto sia importante il contesto in cui un problema viene proposto. Il modulo didattico legato alla sua risoluzione riguardava le funzioni, quindi vi suggerisco di provare a ragionare in questi termini, così da assecondare il mio processo creativo.

Se mi fossi trovato questo esercizio in un compito delle scuole superiori, sarei stato in grado di individuare una possibile soluzione? No, perché, nonostante il problema nasca dalla seguente osservazione, non lo avrei inquadrato nello stesso contesto di chi lo ha scritto.

Possiamo notare infatti che, se proviamo a invertire l'equazione

$$(x-6)^3 = y,$$

si ottiene

$$x = \sqrt[3]{y} + 6,$$

cioè le due funzioni sono una l'inversa dell'altra. In altre parole, sto cercando un valore di x che soddisfi

$$f(x) = f^{-1}(x).$$

Poiché avevamo visto il teorema della simmetria tra il grafico di una funzione f e quello della sua inversa rispetto alla bisettrice, potevo allora cercare le soluzioni proprio su $y = x$, andando a risolvere il problema semplificato

$$(x-6)^3 = x.$$

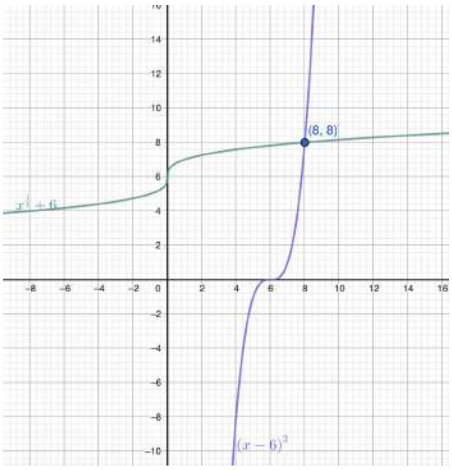

Figura 1: Intersezione tra i grafici di $\sqrt[3]{x} + 6$ e $(x-6)^3$.

Tuttavia, anche in questo passaggio, ho dato per scontate alcune cose: per esempio il motivo per cui la funzione $(x-6)^3$ è invertibile, quale sia il dominio di f, e così via.

L'invertibilità di f è facilmente giustificabile. A meno di una traslazione (sulla quale, a sua volta, viene scaricata ulteriore conoscenza matematica) la funzione "è" x^3. In alternativa, si possono utilizzare le derivate: insomma, dopo un corso di Analisi universitario questo non dovrebbe rappresentare un problema.

A scopi didattici, ne diamo comunque una dimostrazione a partire dalle definizioni, ricorrendo a strumenti efficaci e disponibili già dalle scuole superiori: le definizioni.

Presa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x-6)^3$, per $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ si ha

- Iniettività:

$$(x_1 - 6)^3 = (x_2 - 6)^3 \iff x_1 - 6 = x_2 - 6 \iff x_1 = x_2.$$

- Surgettività:

$$y = (x-6)^3 \iff \sqrt[3]{y} = x - 6 \iff x = \sqrt[3]{y} + 6.$$

Dopo aver inoltre preso coscienza del fatto che stavo cercando, quasi automaticamente, una soluzione reale, e degli impliciti che stavo assumendo lungo il percorso (si noti, ad esempio, la tranquillità che il *Teorema fondamentale dell'algebra* garantisce al solutore circa l'esistenza di tale x, interpretando $f(x) - x$ come un polinomio) ho scelto quella che mi è sembrata la soluzione migliore: non assegnare il problema in un compito scritto di terza scientifico, e mettere a dura prova l'ego di un caro amico, noto volto del dipartimento: Luca Bruni. A lui ho fornito il problema esattamente nella forma presentata all'inizio del paragrafo, in quanto particolarmente interessato a osservare il suo processo risolutivo.

> *"Sembra orribile elevando, però mentre ero in macchina e pensavo ai grafici, e ora forse ho fatto il conto male ma mi sembra che siano una la funzione inversa dell'altro, quindi stai cercando di risolvere $f(x) = f^{-1}(x)$, quindi stai cercando le intersezioni tra $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ e i due grafici si intersecano nella retta $x = y$, quindi è sufficiente che risolvi un membro uguale a x. Bellissimo questo problema, bellissimo ti giuro sono troppo felice di averlo risolto così, fantastico, basta mettere la parte di sinistra uguale a x o la parte di destra uguale a x, e funziona.*
>
> *Comunque posso dire un esercizio bellissimo? Cioè ci ho dovuto pensare un pochino, ha una soluzione molto elegante, però non so il target, se è un esercizio sulle funzioni inverse è top, spettacolare però è molto difficile a meno che non l'abbiano visto, ho usato troppe competenze che loro non hanno, ho pensato al grafico ho ripensato al teorema.. però bellissimo problema."*

Questa soluzione, porta a trovare $x = 8$. Come?

2 La nascita

Possiamo usare il criterio delle radici razionali, già presente sui testi dalle scuole superiori (se siamo abbastanza fortunati da averlo nel programmazione didattica e ricordarcelo)

Criterio delle radici razionali [2]

Sia
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
un polinomio a coefficienti interi, con $a_n \neq 0$. Se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $\gcd(p, q) = 1$, è una radice razionale di $p(x)$, allora
$$p \mid a_0 \quad \text{e} \quad q \mid a_n.$$
In altre parole, le possibili radici razionali di $p(x)$ sono della forma
$$\pm\frac{\text{divisore di } a_0}{\text{divisore di } a_n}.$$

Portando tutto a sinistra, l'equazione
$$(x-6)^3 = x$$
diventa
$$(x-6)^3 - x = 0.$$
Sviluppando il cubo:
$$(x-6)^3 = x^3 - 18x^2 + 108x - 216,$$
quindi
$$(x-6)^3 - x = x^3 - 18x^2 + 107x - 216.$$

A questo punto posso applicare il *Criterio delle radici razionali*: dato che il polinomio
$$p(x) = x^3 - 18x^2 + 107x - 216$$

è a coefficienti interi e ha coefficiente direttivo $a_n = 1$, ogni eventuale radice razionale deve essere un divisore del termine noto $a_0 = -216$, cioè un numero del tipo

$$\pm d \qquad \text{con } d \mid 216.$$

In particolare, l'elenco dei divisori positivi di 216 è

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216,$$

e quindi i candidati sono

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 27, \pm 36, \pm 54, \pm 72, \pm 108, \pm 216.$$

Partendo dal più piccolo, con un po' di pazienza troviamo $x = 8$.

$$p(8) = 8^3 - 18 \cdot 8^2 + 107 \cdot 8 - 216 = 512 - 18 \cdot 64 + 856 - 216 = 0.$$

A questo punto ci siamo chiesti se potevamo dimostrare che $x = 8$ era l'unica soluzione reale. Applicando ad esempio la *Regola di Ruffini*[1] al polinomio

$$p(x) = x^3 - 18x^2 + 107x - 216$$

con radice $x = 8$, si ottiene la seguente scomposizione:

$$x^3 - 18x^2 + 107x - 216 = (x - 8)(x^2 - 10x + 27).$$

Effettivamente il polinomio quoziente di secondo grado non ha radici reali, in quanto una sua riscrittura è

$$x^2 - 10x + 27 = (x - 5)^2 + 2.$$

e finalmente concludiamo l'esercizio.

Questo potrebbe essere riformulato ed enunciato nel seguente modo:

Problema

Dimostrare che $x = 8$ è l'unica soluzione reale di

$$(x - 6)^3 = \sqrt[3]{x} + 6.$$

[1] Ricordiamo che la regola di Ruffini è un metodo alternativo di effettuare la divisione tra polinomi nel caso in cui il polinomio divisore sia di primo grado.

Tuttavia, la gioia di Luca e il mio interesse per la didattica mi hanno portato a chiedermi quali potessero essere altri modi di risolvere un problema enunciato in questo modo, possibilmente coinvolgendo aree diverse della Matematica. Un obiettivo era quello di ampliare le conoscenze generali e trasversali nate attorno a questo esercizio e, allo stesso tempo, di riportare ai ragazzi una riflessione sui possibili diversi metodi di risoluzione di un problema, tema spesso trascurato.

Una delle frasi che più mi è rimasta impressa del mio professore di Analisi 1 e 2 è infatti:

> *"anche una patologia può diventare uno strumento."*

3 Approfondire un problema

Per perseguire questo interesse, ho deciso di chiedere aiuto su Math Stack Exchange (MSE), un noto sito di domande e risposte frequentato da studenti e professori di matematica a ogni livello. Per completezza, rimando alla domanda originale tramite il qrcode a fianco.

Nel seguito dell'articolo, mi impegnerò a passare in rassegna e ad analizzare alcuni degli approcci segnalati.

John Bentin – Math Stack Exchange

It is easy to spot the solution $x = 8$ and verify it by substitution. The less trivial part is showing this solution to be unique. A sketch of the graphs of $y = (x-6)^3$ and $y = x^{1/3} + 6$ shows clearly that they cross only once, at $y = x = 8$, while the line $y = x$ elsewhere lies between the two graphs (because they are inverse).
However, this is not a mathematically rigorous method. We can prove that our solution is unique if we can show that $(x-6)^3 < x < x^{1/3}+6$ when $x < 8$, and $x^{1/3} + 6 < x < (x-6)^3$ when $x > 8$. Thus there are four inequalities to verify.
The first inequality may be expressed as $(x-6)^3 - x < 0$ for $x < 8$. By expansion,

$$(x-6)^3 - x = x^3 - 18x^2 + 107x - 216 = (x-8)(x^2 - 10x + 27),$$

where the factor $x - 8$ is to be expected from our original spotted solution. The quadratic factor can be written as $(x-5)^2 + 2$, which is always positive, and the sign of the other factor $x - 8$ therefore establishes the inequality. The second inequality can be put in the form $x - 6 < x^{1/3}$. Since cubing preserves order, we can write this as $(x-6)^3 < x$, and the proof proceeds similarly as before. The proofs of the remaining two inequalities are also similar.

John mette bene in luce il fatto che la semplificazione che riconduce alla ricerca delle soluzioni su $y = x$ non è affatto automatica, ma richiede un'argomentazione adeguata. Tale argomentazione risulta però particolarmente comprensibile nell'approccio proposto da Bentin (nonostante altri contributi, anche temporalmente precedenti come quello di *heropup* sempre sul forum).

Mari Strup - Math Stack Exchange

Here is what I feel is a relatively fun method. Begin by substituting $y^3 := x$ to obtain the equation

$$(y^3 - 6)^3 = y + 6$$

and notice that if $y^3 - 6 = y$ then

$$(y^3 - 6)^3 = y^3 = y + 6$$

so we need only solve the equation $y^3 - 6 = y$. Rearrange to obtain

$$y(y^2 - 1) = 6$$

then factor using difference of two squares to find

$$y(y-1)(y+1) = 6.$$

In other words, we just need to find three consecutive numbers which have product 6. Famously $1 \times 2 \times 3 = 6$, so if $y = 2$ then

$$y(y-1)(y+1) = 2 \times 1 \times 3 = 6,$$

thus $y = 2$ is a valid solution. Since $y^3 = x$ it follows that $x = 8$.

Mari, per quanto fornisca a mio avviso una soluzione a posteriori, fa emergere una bellissima idea di sostituzione, che conduce a $y(y-1)(y+1)$, trasportando la ricerca delle soluzioni a un'osservazione aritmetica non avanzata e estremamente efficace. Certamente, la soluzione di Mari è influenzata dalla conoscenza dell'esistenza di soluzioni intere (nella domanda, infatti, è presente un commento su $x = 8$), che ha guidato la sua ricerca in una fattorizzazione del tipo proposto.

Dan - Math Stack Exchange

Converting to polynomial equation

Expand the cube to get:

$$x^9 - 54x^8 + 1296x^7 - 18162x^6 + 163944x^5 - 989496x^4$$
$$+3996972x^3 - 10429560x^2 + 15968015x - 10941048 = 0$$

Newton's Method

Let

$$f(x) = (x-6)^3 - (x^{\frac{1}{3}} + 6), \qquad f'(x) = 3(x-6)^2 - \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x-6)^3 - (x^{\frac{1}{3}} + 6)}{3(x-6)^2 - \frac{1}{3}x^{-2/3}}.$$

n	0	1	2	3	4	5
$x_n \approx$	1	2.77	4.09	5.44	14.78	11.89

n	6	7	8	9	10
$x_n \approx$	10.00	8.84	8.22	8.02	8.00

The sequence converges to the root $x = 8$.

Fixed-point iteration

Solving for the cube root gives

$$x = (x^{\frac{1}{3}} + 6)^{\frac{1}{3}} + 6.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_n \approx$	0	7.82	8.00	8.00	8.00	8.00	8.00	8.00	8.00

The iteration converges rapidly to $x = 8$.

Bisection Method

A simple general-purpose algorithm for finding real roots.

Pseudocode

```
def bisect_solve(f, lo, hi):
    left_neg = f(lo) < 0
    right_neg = f(hi) < 0
    if left_neg == right_neg:
        raise ValueError('No sign change')
    for _ in range(100):
        x = (lo + hi) / 2
        y = f(x)
        if y == 0:
            return x
        elif (y < 0) == left_neg:
            lo = x
        else:
            hi = x
    return x
```

Applying the method on $[0, 10]$ yields $x = 8$.

Il contributo di Dan si distingue dagli altri per la sua natura computazionale. Dan esplora infatti tre approcci algoritmici: dal metodo di Newton, alla bisezione, fino all'iterazione di punto fisso [3], mostrando come tutti conducano coerentemente alla stessa soluzione reale. La capacità di mettere in evidenza i limiti pratici di alcuni approcci teorici è il motivo per il quale ho inserito tra le soluzioni riportate questa: l'espansione conduce a un polinomio di grado 9 con coefficienti che spesso non siamo abituati a maneggiare. Per quanto ami allo stesso tempo un'altra frase di un altro mio professore di Algebra 1 sulla Matematica:

> *"In Matematica vogliamo risolvere i problemi utilizzando meno conti possibile."*

non posso fare a meno di essere soddisfatto dal gambetto dei metodi iterativi apprezzabili dalla risposta di Dan.

4 Commento finale

Sono presenti molte altre soluzioni che gli utenti stanno continuando a fornire: si va da metodi computazionali che non conoscevo, a diversi approcci algebrici basati su osservazioni e trucchi particolarmente interessanti. Per queste ulteriori soluzioni rimando quindi al collegamento riportato in bibliografia/sitografia [1].

Oltre agli approcci presentati in questo articolo, invito i lettori più navigati a cercare e a proporre metodi di risoluzione dell'esercizio che facciano uso della teoria dei corsi di Algebra 1 o 2 dell'Università di Pisa. La mancanza di un contributo di questo tipo in queste pagine lascia infatti, almeno a me, un leggero amaro in bocca.

Tra l'assegnazione dell'incarico, la fase di ideazione e la stesura finale di questo lavoro sono trascorsi all'incirca due mesi, durante i quali ho dedicato qualche ora, in modo sporadico e nei momenti liberi, alla ricerca di nuove soluzioni. Questo mi ha portato a riflettere su quanto sia importante non sottovalutare il tempo investito nel risolvere o nel creare un problema.

Nonostante conoscessi già un possibile metodo di risoluzione dell'esercizio (circostanza che probabilmente ne giustifica la nascita) è stato proprio il semplice atto di pormi una domanda a permettermi di entrare in contatto con idee e strumenti per me nuovi, sconosciuti: uno su tutti il metodo di Laguerre [1]. Strumenti che, se coltivati nel tempo, possono arricchire e diversificare il "terreno" concettuale su cui ciascuno di noi cammina durante un processo creativo o risolutivo in matematica.

Per concludere, desidero ringraziare tutte le persone che hanno contribuito a questo articolo: a partire da Luca, fino ai contributi forniti dagli utenti di MSE.

Bibliografia

[1] Community di Math Stack Exchange, *Seeking different ways you can find* $x = 8$ *in* $(x-6)^3 = x^{1/3} + 6$, Math Stack Exchange, https://math.stackexchange.com/questions/5112197.

[2] P. Di Martino, *Algebra*, Pisa University Press, pisauniversitypress.it.

[3] D. A. Bini, *Appunti di Analisi Numerica*, Università di Pisa, poisson.phc.dm.unipi.it/~lbruni/Appunti/AnalisiNumerica.pdf.

Teoria dei grafi e la ricerca del cibo delle formiche

*di **Luca Bruni**,Laureato magistrale a Pisa, adesso professore di Matematica e Fisica presso Liceo Marconi, San Miniato*

Viviamo in un mondo di connessioni. Ogni giorno, senza rendercene conto, interagiamo con strutture che possono essere modellate come **grafi**. Intuitivamente, un grafo è una rappresentazione di oggetti e delle loro relazioni: è una struttura matematica formata da **nodi** (o *vertici*) e **collegamenti** (o *archi*) tra di essi. È uno strumento semplice ma potentissimo, che permette di modellare reti, connessioni, movimenti, interazioni. Obiettivo di queste pagine, è quello di introdurre alla teoria dei grafi e ai suoi algoritmi, mostrando come questa disciplina permetta la modellizzazione e la "spiegazione" del comportamento di sistemi complessi. In particolar modo ci occuperemo del problema della ricerca di cibo delle formiche.

1 Giochi e grafi

In questa prima sezione riproponiamo alcuni giochi che erano stati proposti in una vecchia rubrica del giornalino degli Open Days. Questi giochi, apparentemente semplici, nascondono in realtà una struttura di grafo che permette di risolverli in modo elegante e semplice.

1.1 Il gioco dei 4 cavalli

Immaginate di avere quattro cavalli e la seguente, insolita, scacchiera.

Il problema che vogliamo porre è il seguente:

Data la scacchiera in Figura 1, è possibile scambiare di posizione i cavalli bianchi e quelli neri?

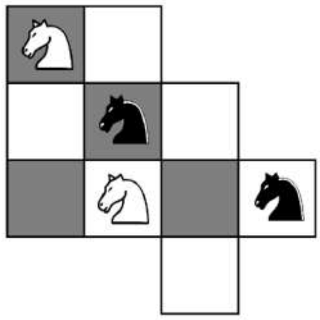

Figura 1: La scacchiera del gioco dei 4 cavalli.

Le regole sono semplici: il cavallo si muove come nel gioco degli scacchi e può muoversi solo su una casella vuota.

Prima di andare avanti con la soluzione, è istruttivo provare a pensare da soli a una strategia. Ricordatevi che fare dei tentativi è a tutti gli effetti una strategia valida: spesso provando si scoprono regolarità inaspettate.

E se per caso riuscite nell'impresa, sapreste dire qual è il numero minimo di mosse necessarie a risolvere il rompicapo?

Spesso è utile capire per quale motivo il problema risulta difficile: in primis, il movimento degli scacchi a L può confonderci, inoltre, la ristrettezza della scacchiera non ci permette di muoverci liberamente. Cerchiamo in un colpo solo di risolvere entrambi i problemi. Eticchiamo le caselle come in Figura 2 e proviamo a pensare a una strategia.

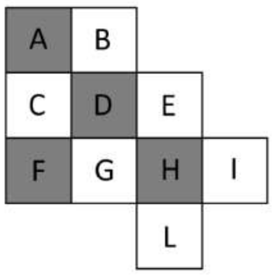

Figura 2: La scacchiera del gioco dei 4 cavalli con le caselle etichettate.

Costruiamo un grafo che catturi il movimento dei cavalli. I nodi del grafo sono le caselle della scacchiera e gli archi sono i movimenti possibili dei cavalli.

La soluzione di questo problema è adesso immediata. I cavalli bianchi, ad esempio, si sposteranno nelle caselle B e H, permetteranno il passaggio dei cavalli neri e li sostituiranno nella loro posizioni. Anche la domanda per il nu-

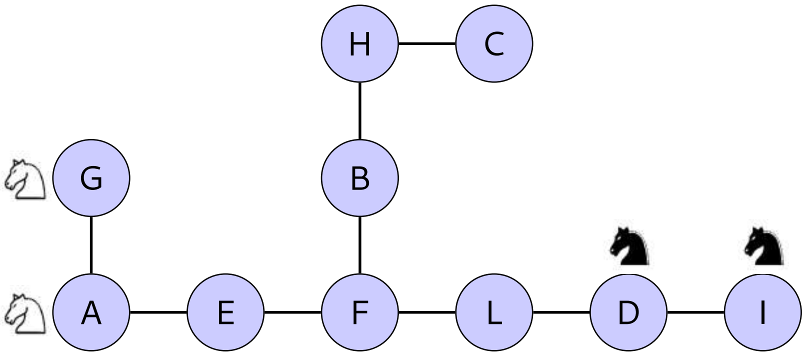

Figura 3: Il grafo che rappresenta i movimenti possibili dei cavalli sulla scacchiera.

mero minimo di mosse, che sembrava particolarmente complessa, è adesso facilmente approcciabile!

1.2 Il gioco degli smartphone

Il *gioco degli smartphone* è un interessante problema di disposizione in cui salta agli occhi la teoria dei grafi e la sua utilità.

Dati 4 smartphone, è possibile disporli in modo che ogni smartphone li tocca tutti tranne un altro?

Una possibile soluzione è quella di disporre i 4 smartphone in modo che formino i lati di un "quadrilatero" più grande.

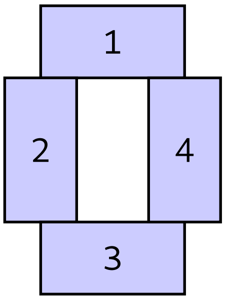

Figura 4: Una possibile soluzione del gioco dei 4 smartphone.

La difficoltà aumenta notevolmente se si aumenta il numero di smartphone. Ad esempio provate a risolvere lo stesso quesito con 5 smartphone:

Dati 5 smartphone, è possibile disporli in modo che ogni smartphone li tocca tutti tranne un altro?

Dopo un po' di tentativi, ci rendiamo conto che qualcosa non va e che sembra che non sia possibile. Dobbiamo però trovare un modo per formalizzare questa impossibilità. La prima semplificazione che possiamo fare è quella di immaginare gli smartphone come nodi e i contatti tra di loro come dei collegamenti tra nodi. Ecco che, astraendo il problema dalla realtà fisica, abbiamo una visualizzazione molto più chiara di quello che sta accadendo.

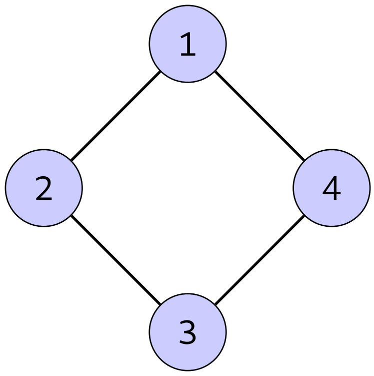

Figura 5: Il grafo associato alla soluzione del problema con 4 smartphone proposto sopra.

In questo modo, il problema si riduce a quello di trovare un grafo con 5 nodi in cui ogni nodo è collegato a esattamente 3 nodi.

Proviamo a rispondere alla seguente domanda: quanti collegamenti devono essere presenti nel grafo per soddisfare la condizione del problema?

Da ogni nodo partono 3 collegamenti, ma ogni collegamento collega due nodi. Questo vuol dire che il numero totale di collegamenti è uguale a 3 volte il numero di nodi diviso 2. In altre parole, il numero totale di collegamenti è uguale a $\frac{3\cdot5}{2} = \frac{15}{2}$ che non è un numero intero! Dunque questo grafo non può esistere e il problema dei 5 smartphone è impossibile da realizzare!

Un semplice ragionamento di teoria dei grafi ci ha permesso di risolvere elegantemente il problema che adesso, grazie all'idea introdotta, si presta alla seguente generalizzaione:

Dati n smartphone con $n \geq 3$, è possibile disporli in modo che ogni smartphone li tocca tutti tranne un altro?

Lasciamo al lettore la soluzione del problema generale.

1.3 Non solo giochi

Nei due giochi precedenti abbiamo visto come l'utilizzo dei grafi permette di modellizzare due giochi apparentemente complicati che si rivelano essere molto più comprensibili con il giusto formalismo.

Al di là dei giochi, i grafi sono uno strumento potentissimo per la modellizzazione di problemi complessi; nel seguito di queste note ci occuperemo di alcuni esempi di applicazione della teoria dei grafi a problemi reali. In particolare, dopo aver formalizzato il concetto di grafo, ci soffermeremo su due applicazioni e sulle implicazioni pratiche che ne derivano:

- La ricerca del cammino minimo in un grafo pesato;
- La ricerca di cibo delle formiche.

2 Elementi di teoria dei grafi

In questa sezione, ci occupiamo di dare le definizioni fondamentali per la teoria dei grafi.

Definizione 1. *Un* grafo *è una coppia* $G = (V, E)$, *dove:*

- V *è un insieme finito di elementi chiamati* vertici *o* nodi*;*
- $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$ *è un insieme di* archi, *ciascuno dei quali è una coppia non ordinata di vertici.*

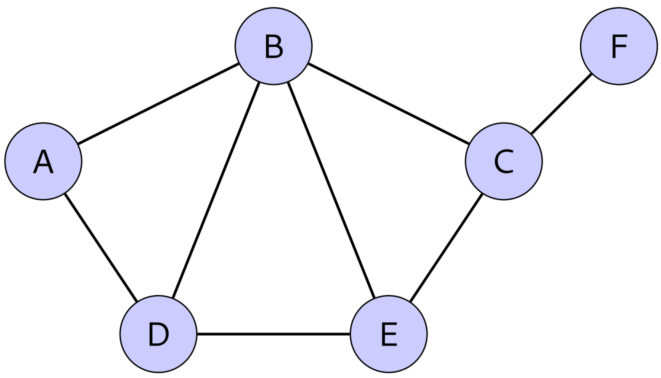

Figura 6: Esempio di grafo.

Osservazione 1. *Nella definizione di grafo che abbiamo dato non ammettiamo l'esistenza di loop, ovvero di nodi che hanno un arco che parte e arriva allo stesso nodo. Inoltre, non ammettiamo archi multipli, ovvero più archi che collegano la stessa coppia di nodi. In altre parole, ogni coppia di nodi può essere connessa da al massimo un arco.*

Definizione 2. *Un* grafo pesato *è un grafo in cui a ciascun arco è associato un valore numerico, detto* peso *o* costo. *Formalmente, un grafo ponderato è una terna $G = (V, E, w)$, dove:*

- (V, E) *è un grafo;*
- $w : E \to \mathbb{R}$ *è una funzione che assegna un peso reale a ciascun arco.*

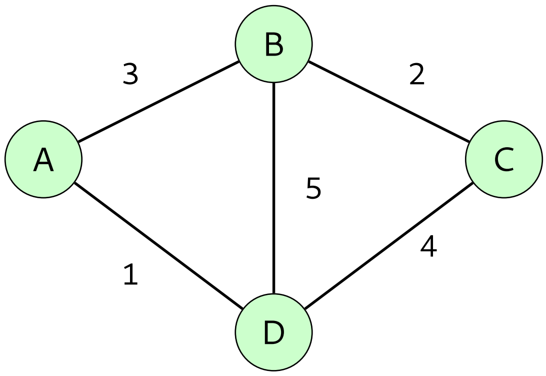

Figura 7: Esempio di grafo pesato con pesi sugli archi.

Definizione 3. *Un* cammino *in un grafo $G = (V, E)$ è una sequenza di vertici $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tale che per ogni $i = 0, \ldots, k-1$, l'arco $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.*

In altre parole, un cammino non è altro che una sequenza di vertici in cui ogni coppia consecutiva di vertici è connessa da un arco.

Definizione 4. *Un* cammino semplice *o* cammino senza cicli *è un cammino in cui tutti i vertici sono distinti, cioè $v_i \neq v_j$ per ogni $i \neq j$.*

Definizione 5. *Un grafo non orientato è detto* connesso *se esiste un cammino tra ogni coppia di vertici.*

Definizione 6. *Un* albero *è un grafo connesso e aciclico, cioè che non contiene cicli.*

Nella prossima sezione, cominceremo a parlare di algoritmi sui grafi per l'esplorazione e per la ricerca di cammini. Siamo in particolare interessati ai cammini minimi.

Definizione 7. *Dato un grafo pesato $G = (V, E, w)$, un* cammino minimo *tra due vertici è un cammino tale che la somma dei pesi degli archi attraversati è minima.*

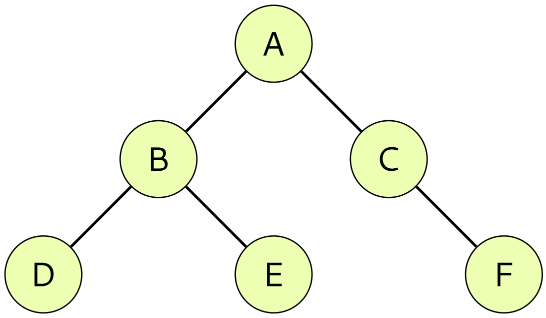

Figura 8: Un albero: grafo connesso senza cicli.

3 Dalle formiche ai grafi: ottimizzazione tramite intelligenza collettiva

3.1 Il problema della ricerca del cibo

Nel mondo naturale, uno dei comportamenti più affascinanti è quello delle formiche alla ricerca del cibo. Nonostante siano organismi molto semplici, prive di una vera intelligenza individuale, sono in grado di risolvere problemi complessi grazie alla cooperazione e alla comunicazione indiretta.

In particolare, le formiche riescono a trovare percorsi ottimali tra il nido e una fonte di cibo. Non possiedono mappe né un senso diretto delle distanze, ma riescono a scoprire e sfruttare cammini efficienti attraverso un meccanismo di **comunicazione chimica**, basato sui feromoni.

Questo comportamento ha ispirato un intero filone dell'intelligenza artificiale chiamato *Ant Colony Optimization* (ACO), in cui si cerca di riprodurre artificialmente il comportamento delle colonie di formiche per risolvere problemi di ottimizzazione su grafi.

Formalizzazione del problema

Il comportamento delle formiche può essere modellato attraverso un grafo, in cui:

- I **nodi** rappresentano posizioni fisiche (come il nido, i punti di passaggio e le fonti di cibo).
- Gli **archi** rappresentano i percorsi possibili tra le posizioni.
- Ogni arco ha un **peso**, che può rappresentare una distanza, un costo, o una difficoltà nel percorrerlo.

Il problema che ci poniamo è trovare **cammini convenienti** tra due nodi del grafo: il nodo sorgente (il nido) e il nodo obiettivo (una tra le fonti di cibo).

3.2 Algoritmo delle colonie di formiche - *Ant Colony Optimization* o ACO

Principi generali

Il modello ACO si basa su alcuni principi fondamentali, ispirati al comportamento reale:

1. **Deposizione di feromoni:** ogni formica, mentre percorre un cammino, deposita una quantità di feromone sugli archi attraversati.
2. **Evaporazione:** i feromoni evaporano col tempo, riducendo la loro intensità.
3. **Scelta probabilistica:** una formica decide quale nodo visitare in base a una probabilità che dipende:
   - dalla quantità di feromone presente sugli archi;
   - da un'informazione euristica (ad esempio, l'inverso della distanza). Prenderemo proprio questo esempio nel prosieguo[1].
4. **Rinforzo positivo:** i cammini migliori, ricevono più feromoni in tempi brevi, e diventano quindi più attraenti per altre formiche.

L'idea è quindi di simulare una colonia di formiche che esplora il grafo, depositando feromoni e aggiornando le probabilità di scelta dei cammini in modo iterativo, fino a convergere verso soluzioni ottimali o **quasi ottimali**.

Formalizzazione matematica

Sia $\tau_{ij}(t)$ la quantità di feromone sull'arco (i, j) al tempo t (più precisamente all'iterazione t dell'algoritmo), e η_{ij} l'informazione euristica associata (ad esempio $\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$, dove d_{ij} è la lunghezza dell'arco).

La probabilità che una formica attualmente in i scelga di muoversi verso il nodo j è data da:

[1] Si possono aggiungere parametri di pericolosità o affidabilità del cammino. L'implementazione è analoga a quanto viene fatto con la distanza

$$P_{ij}(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{k \in N_i} [\tau_{ik}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ik}]^\beta}$$

dove:

- N_i è l'insieme dei nodi vicini a i ancora visitabili;
- α regola l'influenza del feromone;
- β regola l'influenza dell'euristica.

Osservazione 2. *La probabilità è una media pesata tra il feromone e l'euristica. Il parametro α controlla quanto le formiche si affidano al feromone, mentre β regola l'importanza dell'euristica. Questo bilanciamento permette di esplorare nuovi cammini senza trascurare quelli già promettenti.*

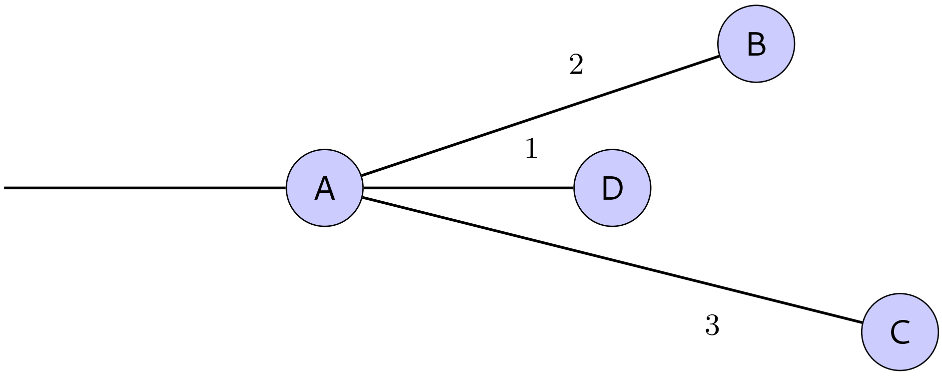

Figura 9: Un grafo con nodo A e tre archi in uscita. Supponendo feromoni $\tau_{AB} = 3$, $\tau_{AC} = 2$, $\tau_{AD} = 4$ e usando l'inverso della distanza come euristica ($\eta_{ij} = 1/w$), calcoliamo le probabilità. I parametri utilizzati sono $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Il denominatore è dato da $\sum_{k \in N_A} [\tau_{Ak}]^\alpha \cdot [\eta_{Ak}]^\beta = (3 \cdot 1/2) + (2 \cdot 1/3) + (4 \cdot 1/1) = 1.5 + 0.6667 + 4 = 6.1667$. Le probabilità risultano: $P_{AB} \approx 0.24$, $P_{AC} \approx 0.11$, $P_{AD} \approx 0.65$.

Aggiornamento dei feromoni:

Dopo che tutte le formiche hanno completato il loro cammino, la quantità di feromone su ogni arco viene aggiornata secondo:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho) \cdot \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij}^{(k)}$$

dove:

- ρ è il tasso di evaporazione ($0 < \rho < 1$),

- $\Delta\tau_{ij}^{(k)}$ è la quantità di feromone depositata dalla k-esima formica.

La quantità depositata dalla k-esima formica è proporzionale alla qualità del percorso:

$$\Delta\tau_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \frac{Q}{L_k} & \text{se l'arco } (i,j) \text{ è stato percorso dalla formica } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove L_k è la lunghezza totale del percorso della formica k, e Q è una costante positiva.

3.3 Implementazione e sperimentazione

Abbiamo sperimentato il funzionamento dell'algoritmo ACO su vari grafi pesati, utilizzando Python e librerie come NetworkX per la gestione dei grafi e Matplotlib per la visualizzazione. L'implementazione è stata testata su grafi di piccole e medie dimensioni.

Di seguito facciamo una panoramica dei dati che vengono raccolti ad ogni esecuzione dell'algoritmo. Le immagini riportate mostrano il grafo iniziale, il grafo con evidenziata la distribuzione del feromone sugli archi a una iterazione generica, la distribuzione percentuale dei feromoni nei vari archi a una iterazione generica e l'andamento del cammino di una formica. Le formiche partono dal nodo sorgente (evidenziato in rosso) e si muovono verso le fonti di cibo (evidenziate in verde), depositando feromone lungo il percorso. Durante le iterazioni, alcuni nodi vengono eliminati ed altri si riaggiungono: l'algoritmo si adatta di conseguenza restituendo sempre ottimi risultati anche in situazioni di grafo dinamico.

Più nel dettaglio, l'algoritmo ACO è stato implementato con vari parametri per poter testare la sua efficacia in diverse situazioni. Di seguito, riportiamo una breve descrizione dei parametri più importanti. A questi, vanno aggiunti creazioni di grafi casuali e configurazioni che regolano la dinamicità del grafico.

- `NUM-FORMICHE`: Numero di formiche utilizzate nell'algoritmo. A ogni iterazione, partono dal nido un numero di formiche pari al valore indicato. Valori alti aumentano l'esplorazione in quanto la scelta dei percorsi, anche se vincolata alla probabilità, risulta più ampia. Questo va a scapito dell'esecuzione; valori bassi, invece, riducono la diversità delle soluzioni.

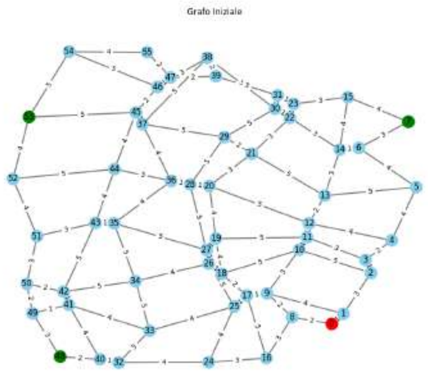

Figura 10: Grafo iniziale con pesi sugli archi. Il nodo rosso rappresenta il nido, i nodi verdi le fonti di cibo

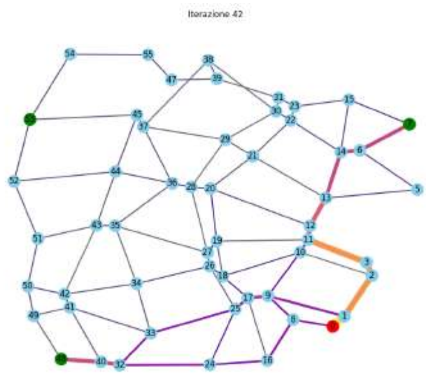

Figura 11: Distribuzione del feromone sugli archi all'iterazione 42. I colori più spessi e accesi indicano la presenza di feromone negli archi.

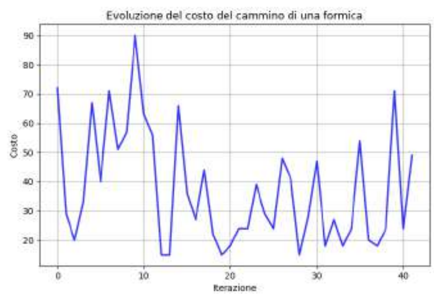

Figura 12: Andamento del percorso di una formica nel corso delle iterazioni del ciclo.

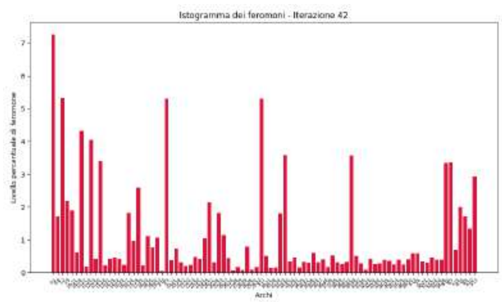

Figura 13: Distribuzione (percentuale) dei feromoni nei vari archi.

- `NUM-ITERAZIONI`: Numero totale di iterazioni dell'algoritmo. Valori alti migliorano la qualità della soluzione ma aumentano il tempo di calcolo; valori bassi possono portare a soluzioni subottimali. Nelle applicazioni reali, le iterazioni vengono lanciate senza un valore massimo fissato, In questo modo, se il grafo cambia dinamicamente, i cammini migliori vengono ricalcolati in tempo reale.

- `ALFA` α: Peso attribuito al feromone nella scelta del cammino. Valori alti favoriscono lo sfruttamento dei cammini già esplorati, rendendo il comportamento delle formiche più conservativo e focalizzato sui percorsi che hanno già dimostrato di essere buoni. Questo può accelerare la convergenza verso una soluzione, ma rischia di bloccare il sistema in minimi locali. Valori bassi, invece, aumentano l'esplorazione di nuovi cammini, favorendo una maggiore diversità nelle soluzioni, ma rallentando la convergenza.

- `BETA` β: Peso attribuito all'euristica (es. distanza) nella scelta del cammino. Valori alti danno maggiore importanza all'euristica, spingendo le formiche a scegliere cammini che sembrano promettenti in base a informazioni statiche come la distanza o il costo. Questo può essere utile in grafi con pesi ben definiti e affidabili. Valori bassi bilanciano l'influenza tra feromone ed euristica, permettendo alle formiche di considerare sia l'esperienza accumulata (feromone) sia le caratteristiche intrinseche del grafo (euristica).

- `EVAPORAZIONE` ρ: Tasso di evaporazione del feromone (valore tra 0 e 1). Questo parametro controlla la velocità con cui il feromone depositato sugli archi diminuisce nel tempo. Valori alti (vicini a 1) fanno sì che le tracce di feromone scompaiano rapidamente, favorendo l'esplorazione di nuovi cammini e riducendo l'influenza delle soluzioni precedenti. Valori bassi (vicini a 0) mantengono più a lungo le tracce di feromone, rafforzando i cammini già esplorati e favorendo lo sfruttamento delle soluzioni esistenti. La scelta del valore dipende dal bilanciamento desiderato tra esplorazione e sfruttamento.

- `FEROMONE-INIZIALE`: Quantità iniziale di feromone su ogni arco. Valori alti favoriscono una scelta più uniforme inizialmente; valori bassi aumentano la casualità.

- `FEROMONE-DEPOSITO` Q: Quantità di feromone depositata dalle formiche. Valori alti rafforzano rapidamente i cammini migliori; valori bassi favoriscono una convergenza più lenta.

- NODO-PARTENZA, NODI-DESTINAZIONE: Nodi che identificano il nido e le fonti di cibo

3.4 Applicazioni dell'algoritmo ACO

L'algoritmo ACO è stato applicato con successo a numerosi problemi di ottimizzazione combinatoria, tra cui:

- il **problema del commesso viaggiatore** (TSP): trovare il percorso più breve che permette a un venditore di visitare un insieme di città una sola volta e tornare al punto di partenza. Questo problema è fondamentale in logistica e trasporti, dove l'ottimizzazione dei percorsi può ridurre significativamente i costi operativi e i tempi di consegna;

- il **routing in reti** di telecomunicazione: ottimizzare il flusso di dati attraverso una rete per minimizzare ritardi e congestioni. Questo è cruciale per garantire la qualità del servizio in applicazioni come streaming video, chiamate VoIP e trasferimenti di file su larga scala;

- la **pianificazione** di operazioni industriali: organizzare sequenze di operazioni per migliorare l'efficienza produttiva e ridurre i tempi morti. Ad esempio, nelle catene di montaggio, una pianificazione ottimale può aumentare la produttività e ridurre i costi di manutenzione;

- il **pathfinding** in robotica e videogiochi: determinare il percorso ottimale per un robot o un personaggio virtuale per raggiungere un obiettivo evitando ostacoli. Questo è essenziale per applicazioni come la navigazione autonoma di robot in ambienti complessi o l'intelligenza artificiale nei giochi per offrire esperienze realistiche e coinvolgenti.

Il grande pregio dell'ACO è la sua capacità di trovare buone soluzioni anche in contesti in cui non esistono strategie deterministiche efficienti, sfruttando la ridondanza, la parallelizzazione e la selezione delle soluzioni migliori.

4 ACO vs algoritmi deterministici: Obiettivi e Differenze

4.1 L'obiettivo dell'ACO non è la convergenza rigida

A differenza di molti algoritmi classici, il comportamento delle formiche non punta a convergere rapidamente a una soluzione unica e definitiva. L'obiettivo dell'ACO è piuttosto mantenere un bilanciamento tra:

- **Esplorazione** di nuovi cammini potenzialmente migliori;
- **Sfruttamento** dei percorsi che si sono rivelati buoni.

Questa tensione tra curiosità e fiducia è controllata dai parametri α, β, e ρ (rispettivamente peso del feromone, dell'euristica e della velocità di evaporazione).

In questo senso, una convergenza rapida e rigida su un cammino specifico può essere controproducente. Infatti, se le formiche si concentrano troppo presto su un solo percorso, il sistema rischia di bloccarsi in un minimo locale, perdendo la possibilità di esplorare soluzioni migliori.

4.2 Quando scegliere ACO rispetto a un algoritmo che trova il cammino in modo deterministico?

In generale, l'algoritmo delle formiche è preferibile quando:

- il grafo cambia nel tempo o contiene incertezze (es. traffico, costi variabili);
- si cercano molte buone soluzioni, non una sola perfetta;
- si vuole una soluzione distribuita e scalabile;
- si affrontano problemi combinatori complessi (es. TSP, vehicle routing, scheduling).

In ambienti controllati e statici, un algoritmo deterministico rimane insuperabile in termini di efficienza e precisione. Ma in molti contesti reali, la natura dinamica e flessibile dell'ACO lo rende una scelta più realistica e potente.

Errori Legittimi

*di **Luca Bruni**, Laureato magistrale a Pisa, adesso professore di Matematica e Fisica presso Liceo Marconi, San Miniato*

In questa sezione voglio analizzare insieme alcuni "errori" che ho notato che tendiamo a fare nel quotidiano e che cozzano enormemente con la matematica. Questi errori mi stanno particolarmente a cuore perché sono ciò che distinguono un ragionamento matematico da un ragionamento *reale* (e quasi mi verrebbe da dire *sociale* o *umano*). Per la realizzazione di questa sezione vorrei ringraziare tutti gli amici matematici con cui mi sono potuto confrontare sul sociale e come i matematici "leggono" questo sociale. Quello che vorrei far trasparire da queste pagine è che la matematica non è solo un insieme di tecniche e formule, ma un modo di pensare che ci aiuta a riconoscere (e a volte anche a correggere) questi errori; la matematica in un certo senso ci aiuta a smascherare ragionamenti illogici quotidiani e a capirne la fallacia, permettondoci (a volte) di non cadere in errori legittimi che possono però condizionare in maniera fuorviante alcune nostre scelte.

1 Il tacchino induttivista di Russell

Tutto comincia con una filastrocca raccontata dal mio Prof. di matematica durante superiori:

Un elefante si dondolava
Sopra un filo di una ragnatela
Trovando la cosa molto interessante
Andò a chiamare un altro elefante!

Due elefanti si dondolavano
Sopra un filo di una ragnatela
Trovando la cosa molto interessante

Andarono a chiamare un altro elefante

Tre elefanti si dondolavano
Sopra un filo di una ragnatela
Trovando la cosa molto interessante
Andarono a chiamare un altro elefante

Quattro elefanti si dondolavano
Sopra un filo di una ragnatela...

L'argomento della lezione era l'induzione matematica e la filastrocca serviva a mostrarne la filosofia:

- Base: c'è un elefante che si dondola
- Passo induttivo: se ci sono n elefanti che si dondolano, e l'$n+1-$esimo viene chiamato, allora ce ne sono $n+1$ che si dondolano.

E il Prof. concludeva la filastrocca con una frase tipo "*ma allora a un certo punto anche* 1000000 *elefanti si dondoleranno, ma non ho dovuto contarli tutti!*".

La filastrocca mi è sempre rimasta impressa e l'ho spessa utilizzata per introdurre il concetto di induzione. Tuttavia, c'è un altro racconto, che il mio Prof. allegava in combo a quanto già presentato.

> *Fin dal primo giorno questo tacchino osservò che, nell'allevamento in cui era stato portato, gli veniva dato il cibo alle 9 del mattino. E da buon induttivista non fu precipitoso nel trarre conclusioni dalle sue osservazioni e ne eseguì altre in una vasta gamma di circostanze: di mercoledì e di giovedì, nei giorni caldi e nei giorni freddi, sia che piovesse sia che splendesse il sole. Così arricchiva ogni giorno il suo elenco di una proposizione osservativa in condizioni più disparate. Finché la sua coscienza induttivista non fu soddisfatta ed elaborò un'inferenza induttiva come questa: "Mi danno sempre il cibo alle 9 del mattino". Questa concezione si rivelò incontestabilmente falsa alla vigilia di Natale, quando, invece di venir nutrito, fu sgozzato.*
>
> *Bertrand Russell, 1912*

Ho sempre trovato questa storia estramamente calzante e reale: l'idea, ovviamente, è che ci potesse spiegare come l'osservazione di un fenomeno che si ripete nel tempo non assicura niente rispetto all'accadere dello stesso nel futuro e che per poter usare un ragionamento di tipo induttivo serva che il passaggio $n-$esimo implichi in modo certo il passaggio $n+1-$esimo.

Leggendo del tacchino di Russell, ci viene da ridere e da sorridere, ma questo tipo di errori sono comunissimi e li facciamo tutti i giorni, spesso senza accorgercene. Vediamone alcuni (caloroso contributo di ChatGPT per le idee).

Ecco alcuni esempi quotidiani di questo tipo di ragionamento fallace:

- *Ogni anno mi arrivano gli auguri di compleanno*, anche quest'anno arriveranno sicuramente (e puntualmente non accade).
- *Il mio telefono ha sempre retto tutta la giornata*, batteria scarica alle 15 del pomeriggio.
- *Studiando all'ultimo momento sono sempre passato*, questa volta basterà ancora (tipica frase per affrontare il primo esame all'università).
- *Ho incontrato tre persone scortesi in quel negozio*, tutti i commessi sono scortesi.
- *Il backup del computer ha sempre funzionato*, non si corromperà mai.
- *Non ho mai bocciato un esame con questo metodo di studio*, non boccerò mai.

2 Falsi miti su probabilità e statistica

Quando si entra nel ramo della probabilità, si fanno *errori legittimi* che possono derivare da due tipi di situazioni:

- la fiducia in ciò che facciamo è tale che a un certo punto smettiamo di pensare matematicamente
- Poca comprensione dell'idea matematica che sottende il gioco

2.1 Prima o poi uscirà croce, no?

Proviamo a porci la seguente domanda

> *Una moneta viene lanciata per 10 volte e per le prime 9 volte è uscita testa. Cosa pensi uscirà all'ultimo lancio?*

Il pensiero guida che siamo tentati di seguire è qualcosa tipo "*è successo tante volte la stessa cosa, ora deve accadere il contrario*". La nostra idea è inoltre rafforzata dal fatto che abbiamo ben chiaro che la probabilità che esca testa o che esca croce è la stessa! Quello che (purtroppo) non notiamo è che nel momento in cui lancio la moneta per la decima volta, non conta nulla tutto ciò che è accaduto prima e la probabilità che esca testa o croce è la stessa. Si dice che gli eventi sono *indipendenti* e che la probabilità *non ha memoria*!

Una domanda (molto) diversa sarebbe stata la seguente:

> *Una moneta viene lanciata* 10 *volte, qual è la probabilità che esca* 10 *volte testa?*

In questo caso contano tutti i risultati usciti e non solamente l'ultimo e ci rendiamo conto che la probabilità è effettivamente bassa. Spesso tendiamo a rispondere pensando alla seconda domanda quando però siamo di frotne alla prima!

A conclusione di questa breve sottosezione, il lettore può cimentarsi in qualche piccolo quesito:

- Qual è la probabilità che lanciando 10 volte una moneta esca sempre Testa? Qual è la probabilità che lanciando 10 volte una moneta, esca la sequenza TCCTTCTCTT?
- Ha più senso puntare al Lotto nei numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ o su una sequenza diversa da essa?

2.2 La legge dei grandi numeri

Un altro aspetto divertente è l'interpretazione della Legge dei Grandi Numeri[1] che spesso viene citata e chiamaa in causa in una versione simile a questa

> *Se una cosa ha la stessa probabilità, alla lunga le cose si sistemano e sono tutte equiprobabili*

Ecco, la formulazione può anche essere intuitivamente corretta ma il concetto di "alla lunga" è piuttosto lontano dalla nostra vita quotidiana.

Ad esempio, tornando al nostro gioco testa o croce, "alla lunga" dovranno essere uscite un numero *circa uguale* di pari e di croci, ma nulla vieta, ad

[1] qua aggiungi la reference alla vera òegge dei grandi numeri

esempio che il primo miliardo di uscite siano testa. Inoltre con *circa uguale*, stiamo sottintendo una vicinanza di due quantità (il numero di Teste e il numero di Croci), quando abbiamo fatto un numero molto alto di lancia, ma non stiamo richiedendo che siano uscite lo stesso numero di teste e lo stesso numero di croci.

2.3 Statistica emotiva

Entriamo adesso in un altro ramo forse troppo abusato: i dati e la statistica. Mi voglio concentrare su uno degli errori che più viene fatto a livello sociale, bypassando quasi completamente il valore dei dati in questione. Partiamo con degli esempi di situazioni e di implicazioni:

- Conosco una persona che ha vinto alla lotteria, dunque la probabilità di vincere è alta
- Ho sentito di qualcuno che ha avuto un incidente in quella strada, dunque quella strada è pericolosa
- Mio nonno ha fumato tutta la vita ed è vissuto fino a 90 anni, pertanto fumare non fa male (anzi forse permette di arrivare a 90 anni di vita)

L'idea è che attribuiamo maggiore rilevanza a singoli casi specifici piuttosto che a dati più ampi. Spesso, il valore attribuito ha una connotazione affettiva o personale che ci porta a sovrastimare l'importanza di un singolo evento rispetto a una tendenza generale. I campioni statistici troppo piccoli non sono davvero rilevanti, ma li carichiamo in maniera esagerata. Negli esempi sopra citati nessuno si preoccupa dei dati reali, conta solamente ciò che è accaduto ai propri amici/familiari.

In maniera molto simile si può insinuare in noi anche il concetto di "*non ho mai visto il contrario*". Finché non si hanno prove contrarie, diamo per certo l'accadersi di un evento. Anche in questo caso, il nostro campione di osservazioni è troppo piccolo per poter trarre conclusioni affidabili, ma nonostante ciò ci fidiamo ciecamente! Buffo perché quando penso a una moneta che è uscita per 10 volte Testa non penso che dovrebbe uscire di nuovo Testa! Strano come il nostro cervello udi meccanismi e regole diverse in contesti diversi.

3 È ovvio

Questa ultima sezione potrebbe risultare un po' polemica per il lettore: l'intento non è assolutamente quello di esserlo. L'obiettivo è invece di cercare di spiegare come in matematica la frase "**è ovvio**" ha un significato completamente diverso dall'uso che ne facciamo nel quotidiano. Nel corso di studi in Matematica, la frase si sente spesso, pronunciata da docenti prima e da studenti poi e viene usata quasi per "convincere" l'interlocutore che una certa affermazione sia vera senza doverla dimostrare; il docente (e in seguito lo studnete), sa però bene che dietro questa affermazione c'è una serie di ragionamenti e ipotesi che non sono state esplicitate, ma che fanno risultare effettivamente "ovvia" quella affermazione.

Nella vita quotidiana il "*è ovvio*" o il "*è chiaro*" spesso viene utilizzata per evitare di entrare nei dettagli di un argomento o per semplificare una spiegazione, ma è vero che tutto ciò che è ovvio, lo è per tutti? E soprattutto, è davvero ovvio? Per essere più chiaro in ciò che vogloo dire, ho chiesto aiuto a ChatGPT (*è ovvio* di questi tempi, no?) che mi ha fornito, dopo qualche tentativo, un piccolo testo che riporta in parte l'idea che volevo esprimere. Eccolo qua:

> A un certo punto qualcuno prova a usare il telecomando della televisione. Lo prende, preme un tasto. Niente. Lo gira leggermente, ripreme. Funziona. ≪Eh, è ovvio che va puntato così≫, dice, senza pensarci troppo. Non lo dice per spiegare, lo dice come si dicono le cose che non hanno bisogno di spiegazioni. ≪In che senso così?≫ chiede qualcuno.
> ≪Verso la TV.≫
> ≪Sì, ma prima era verso la TV anche prima.≫
> ≪Sì, ma non era dritto.≫
> ≪Cosa vuol dire dritto?≫
> ≪Che deve essere allineato.≫
> ≪Allineato a cosa?≫
> A questo punto l'ovvio comincia a rallentare. Si prova a dire che c'è un sensore, che il segnale deve arrivare, che se lo inclini troppo non funziona. Tutto vero. Ma allora viene fuori un'altra domanda: perché a volte funziona anche se non lo punti perfettamente? Perché a volte rimbalza sul muro? Perché certi telecomandi funzionano quasi sempre e altri no? Perché le pile scariche peggiorano la cosa? Perché basta spostarsi di mezzo metro e improvvisamente non va più?

> L'"è ovvio" iniziale non era falso, ma era incompleto. Funzionava finché nessuno chiedeva altro. Bastava la risposta grossolana: "va puntato". Appena si prova a essere un po' più precisi, ci si accorge che dietro quel gesto semplice c'è un insieme di ipotesi, condizioni, approssimazioni che nessuno ha mai davvero messo in ordine. Il telecomando ora funziona, la TV è accesa, quindi non c'è nessun problema pratico da risolvere. E proprio per questo l'ovvietà resta intatta, come se avesse risposto davvero.

Questo è solo un esempio banale, ma molto comune, di come il "*è ovvio*" nasconda spesso una serie di ipotesi e condizioni che non sono state esplicitate. Avete mai pensato come sia "ovvio" accendere una lampadina? Mandare un messaggio? Fare zoom su una immagine?

In matematica, una spiegazione così non regge. Dire "è ovvio che funziona" equivale a fermarsi alla prima risposta, quella che basta finché nessuno fa altre domande. Ma la matematica comincia esattamente quando le domande continuano. Quando si chiede non solo che cosa succede, ma perché, in quali casi, con quali ipotesi, e cosa smette di essere vero se una di quelle ipotesi viene meno. Non perché sia un esercizio di precisione fine a se stessa, ma perché lì l'ovvio non è una risposta: è solo il punto da cui si scopre quante cose stavamo dando per scontate.

4 Commenti finali

La matematica in generale non ti vuol dire che ti stai sbagliando. Ti invita a riflettere. Ti chiede perché hai ragione. E se non sai rispondere, non importa, non ti punisce: ti mostra invece che c'è ancora qualcosa da chiarire.

Questo atteggiamento, più che i contenuti, è ciò che rimane. Studiare matematica all'università non significa diventare più bravi a fare esercizi. Significa accettare che capire richiede tempo, che gli errori sono legittimi e che sono parte del processo. Che non è tutto ovvio o immediato, ma che con pazienza si può imparare a pensare in maniera diversa.

Sfide matematiche da libri notevoli

In questa rubrica, proponiamo una selezione di quesiti matematici tratti da due libri ”classici” per gli appassionati di Problem Solving: *Problem-Solving Through Problems* di Loren C. Larson e *Problem-Solving Strategies* di Arthur Engel. I problemi selezionati spaziano tra vari argomenti matematici, offrendo una sfida stimolante per gli studenti interessati a migliorare le loro capacità di ragionamento e risoluzione dei problemi.

1. Scritture diverse dello stesso numero

Il numero 3 può essere scritto come somma di uno o più interi interi positivi, contando l'ordine, nei seguenti modi: 3, $2+1$, $1+2$, $1+1+1$. Quindi ci sono $4 = 2^2$ scritture diverse di 3 come somma di interi positivi.

- Calcolare in quanti modi si può scrivere il numero 6 come somma di 3 numeri
- Calcolare in quanti modi si può scrivere il numero 6 come somma di m numeri
- Calcolare in quanti modi si può scrivere il numero n come somma di m numeri
- Calcolare in quanti modi si può scrivere il numero n come somma di 1 o più numeri

2. Somme sul Triangolo di Tartaglia - Pascal

Sia dato il Triangolo di Tartaglia - Pascal come in Figura 1. Si consideri, per una riga n, la somma $S_{n,0}$ degli elementi in posizione $0 \bmod 3$, la somma $S_{n,1}$

degli elementi in posizione $1 \bmod 3$ e la somma $S_{n,2}$ degli elementi in posizione $2 \bmod 3$ (in parole più semplici, presa un riga, si faccia la somma dello 0-esimo, terzo, sesto oppure del primo, quarto, settimo etc.). Calcolare il valore di $S_{2026,1}$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad \underline{1} \\
1 \quad \underline{2} \quad \mathbf{1} \\
1 \quad \underline{3} \quad \mathbf{3} \quad 1 \\
1 \quad \underline{4} \quad \mathbf{6} \quad 4 \quad \underline{1} \\
1 \quad \underline{5} \quad \mathbf{10} \quad 10 \quad \underline{5} \quad \mathbf{1} \\
1 \quad \underline{6} \quad \mathbf{15} \quad 20 \quad \underline{15} \quad \mathbf{6} \quad 1
\end{array}
$$

Figura 1: Triangolo di Tartaglia - Pascal. Elementi in posizione $0 \bmod 3$ indicati in maniera normale, in posizione $1 \bmod 3$ indicati con il <u>sottolineato</u>, in posizione $2 \bmod 3$ indicati con il **grassetto**.

3. Poligoni convessi e punti di intersezione

Sia dato un poligono convesso con 11 lati. Si supponga che le tre diagonali non si intersechino mai in uno stesso punto. Si calcolino le seguenti quantità (le formule sono generalizzabili per un qualsiasi $n \geq 4$):

1. Il numero di diagonali del poligono.
2. Il numero di punti di intersezione interni al poligono formati dalle diagonali.
3. Il numero di regioni in cui le diagonali dividono il poligono.

4. Sequenze fantastiche e dove trovarle

- Considerare i numeri della forma: 10001, 100010001, 1000100010001. Quanti zeri ha il più piccolo numero primo di questa forma, se esiste?

- Sia data la sequenza definita da $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ con ricorrenza $a_{n+1} = \frac{1+a_{n-1}a_n}{a_{n-2}}$ per ogni $n \geq 3$. Mostrare che tutti i termini della sequenza sono interi positivi.
- Trovare la somma di $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{98\cdot99\cdot100}$. (Suggerimento: pensare alle serie telescopiche, qualsiasi cosa siano).

Finito di stampare
dalle Edizioni Il Campano
nel mese di Gennaio 2026

IN SUPREMÆ DIGNITATIS

1343