

Pisa, ottobre 2025

Dipartimento di Matematica - Università di Pisa



Matematica

IL GIORNALINO DEGLI

open days



UNIVERSITÀ
DI PISA



notizie, giochi
e pillole
di matematica

MATEMATICA

Il Giornalino
degli
Open Days



Realizzato con il contributo del Piano Lauree Scientifiche – Matematica.

Su indicazione della Commissione Terza Missione.

Coordinamento: Luca Bruni

Grafica: Luca Bruni, Eva Silvestri

Realizzato grazie al contributo degli studenti (ed ex studenti) del dipartimento:
Andrea Agazzi, Luca Bruni, Tobia Moriconi, studenti partecipanti alla Settimana
Matematica 2024

Edizioni Il Campano
ISBN 978-8-86528-708-8

Introduzione

Ecco a voi il **numero 20** del **Giornalino degli Open Days**, una pubblicazione curata da professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa e rivolta principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

Se state considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario che abbia a che fare con la matematica, troverete materiale che fa per voi! Anzitutto, potrete leggere una presentazione del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa. Oltre a una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica e sulle varie opportunità di cui godono i nostri studenti, troverete alcuni dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in matematica.

A seguire, vi presentiamo due articoli divulgativi e qualche *pensiero* sulla Settimana Matematica da studenti delle scuole superiori che hanno partecipato. A raccontarci un po' di matematica dietro l'intelligenza artificiale abbiamo **Andrea Agazzi**, ex ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa e adesso Professore a Berna. **Andrea**, cerca di spiegarci in maniera semplice e accessibile come funziona una *rete neurale*, accompagnando la teoria con un esempio pratico: il riconoscimento della scrittura fatto da un'intelligenza artificiale. Nel secondo articolo **Tobia Trinci**, studente triennale, cerca invece di spiegarci se è possibile che due rette parallele, da qualche parte, si incontrano! Partendo dal quinto postulato di Euclide e arrivando al piano proiettivo, **Tobia** ci guida in un viaggio in una geometria un po' diversa da quella usuale, facendoci scoprire che la risposta alla domanda iniziale è solo l'inizio di un'avventura matematica.

Nei *Racconti dalla Settimana Matematica*, abbiamo voluto inserire alcuni commenti e pensieri di studenti delle scuole superiori di secondo grado che ci hanno gentilmente condiviso dopo l'esperienza fatta a Febbraio 2024. Abbiamo pensato che fosse bello riportare le esatte parole delle persone che hanno vissuto questa esperienza, per farvi capire meglio cosa vi aspetta se deciderete di partecipare in futuro.

Torna, come di consueto, una piccola rubrica di problemi matematici. In questa edizione, abbiamo voluto proporre otto problemi di vario livello incorniciati in una piccola storia generata in parte dall'Intelligenza Artificiale. Speriamo che vi divertiate a risolverli!

Infine, abbiamo deciso di inserire una piccola sezione matematico storica. **Luca Bruni**, ex studente del Dipartimento, ci racconta alcuni aneddoti matematici legati alla vita di tre grandi personaggi della storia (non solo della matematica): **Carl Friedrich Gauss**, **Napoleone Bonaparte** e **Sophie Germain**.



SCAN ME

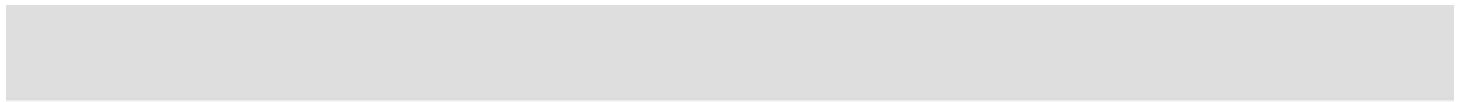
Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo <https://www.dm.unipi.it/terza-missione/home-orientamento/il-giornalino-degli-open-days/>!

Non dimenticate, inoltre, che, se volete affinare le vostre abilità di *problem solving* affrontando altri problemi, ne trovate di ogni genere e livello nella raccolta linkata alla pagina web del giornalino, che potete raggiungere tramite il codice QR qui sopra. Scoprirete i molti esercizi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni.

Infine, un ringraziamento speciale a **Eva Silvestri**, che ha pensato e realizzato la copertina!

Indice

Introduzione	3
Il corso di laurea in Matematica	7
1 Il corso di laurea a Pisa	7
2 Sbocchi occupazionali	9
3 Borse di studio	10
Bibliografia	11
Come funzionano le reti neurali?	13
1 Perché studiare le reti neurali? La motivazione e l'esempio di ChatGPT	13
2 Un caso semplice: riconoscere numeri scritti a mano (il database MNIST)	14
3 Dall'immagine alla rete neurale	15
4 Come imparano le reti neurali	18
Perché due rette parallele si incontrano all'infinito?	21
1 Il problema del parallelismo	21
2 Lo spazio proiettivo	22
3 Le carte affini	26
4 Parte affine e chiusura proiettiva	28
5 Dove si incontrano due rette parallele?	30
Racconti dalla Settimana Matematica	33
Sfide matematiche: tre compagni attraverso il portale del calcolo	39
Aneddoti Storico Matematici	45
1 Gauss, il "Principe dei matematici"	45
2 Il Teorema di Napoleone	48
3 I numeri primi di Sophie Germain	50



Il corso di laurea in Matematica

Sei indeciso su cosa studiare all'università e sei incuriosito da matematica, ma non sai bene in che cosa ti potresti imbattere? Proveremo ad aiutarti a chiarire le idee, mostrandoti le principali caratteristiche del corso di Laurea in Matematica a Pisa e le numerose opportunità che offre sia per quanto riguarda il percorso universitario che per le prospettive future.

1 Il corso di laurea a Pisa

Il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, riconosciuto come Dipartimento di Eccellenza 2023–2027, offre i Corsi di Laurea Triennale e Magistrale in Matematica. Il primo ha una durata di tre anni accademici e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU); il secondo dura due anni e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

Il corso di laurea triennale a Pisa fornisce una solida preparazione di base nei vari settori della matematica, grazie ad una serie di esami obbligatori. Già al secondo, ma in particolar modo durante il terzo anno sono previsti esami a scelta: in questo modo, grazie alla gran quantità di corsi a scelta attivati, ognuno può approfondire gli argomenti che ha trovato di maggior interesse. Il corso di laurea triennale è diviso in due curricula (è richiesto di scegliere subito, ma c'è la possibilità di cambiare in seguito):

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

Il primo, più teorico, prevede anche una più approfondita preparazione in Fisica, mentre il secondo è più applicativo ed integra lo studio della Matematica con quello dell'Informatica. Nella Tabella 1 sono riportati i due piani di



Fondamentale	Computazionale
I anno	
Aritmetica (9 CFU)	
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)	
Laboratorio di introduzione alla matematica computazionale (6 CFU)	
Analisi matematica 1 (15 CFU)	
Geometria 1 (15 CFU)	
Fisica I con laboratorio (9 CFU)	
II anno	
Algebra 1 (6 CFU)	
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)	
Inglese scientifico (6 CFU)	
Analisi matematica 2 (12 CFU)	
Geometria 2 (12 CFU)	
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)	
Esame a scelta (6 CFU)	Algoritmi e strutture dati (6 CFU)
III anno	
Meccanica razionale (6 CFU)	
Fisica II (9 CFU)	Calcolo scientifico (6 CFU)
Fisica III (6 CFU)	Laboratorio computazionale (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)	Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
	Ricerca operativa (6 CFU)
4 Esami a scelta (24 CFU)	3 Esami a scelta (18 CFU)
	Prova finale (9 CFU)

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2024/2025 (vedi [3]).

studi.

La maggior parte dei laureati triennali sceglie di proseguire gli studi con la magistrale restando a Pisa. I curricula in cui è diviso il corso di laurea magistrale sono cinque: *applicativo*, *didattico*, *generale*, *modellistico* e *teorico*. In questo modo, ad ogni studente viene offerta la possibilità di specializzare il proprio piano di studi nel ramo che più lo ha interessato e appassionato durante i precedenti anni.

Gli studenti iscritti a matematica possono inoltre usufruire degli ambienti a loro dedicati all'interno del Dipartimento di Matematica, tra cui varie aule studio e due aule computer. Qui gli studenti hanno la possibilità di conoscersi e studiare al di fuori dell'orario di lezione, così da poter collaborare e confrontarsi durante lo studio. Con lo stesso spirito agli studenti del primo anno sono affiancati dei tutor, studenti più avanti nel percorso che li aiutano



ad affrontare i primi esami universitari.

Il nostro dipartimento collabora inoltre con alcune università estere grazie ad accordi internazionali. Ci sono gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio oppure lavorare alla tesi presso un'altra università europea. Attualmente sono attivi accordi di questo tipo con 40 corsi di studio in matematica europei. Simili agli accordi Erasmus sono gli accordi SEMP (Swiss European Mobility Program); abbiamo accordi attivi con le Università di Basilea, Friburgo, Ginevra, Neuchatel, con l'EPFL di Losanna e con l'ETH di Zurigo. C'è poi la possibilità di ottenere un titolo congiunto (*double degree*) grazie all'accordo con la Hokkaido University. L'Università di Pisa fa parte di *Circle U.*, un'Alleanza Universitaria Europea che comprende altri 8 prestigiosi atenei europei. Dal suo lancio nel Novembre 2020, i partner dell'alleanza cooperano con l'obiettivo di creare un'università europea inclusiva, interdisciplinare e fortemente orientata alla ricerca.

Puoi trovare altre informazioni e rimanere aggiornato sui nuovi accordi sulla pagina dell'Internazionalizzazione

<https://www.dm.unipi.it/international/>

Per ogni altra curiosità, visita la pagina del Corso di Studi seguendo il link <http://www.dm.unipi.it/webnew/it/cds/home-cds> oppure inquadrando il QR qui sopra!

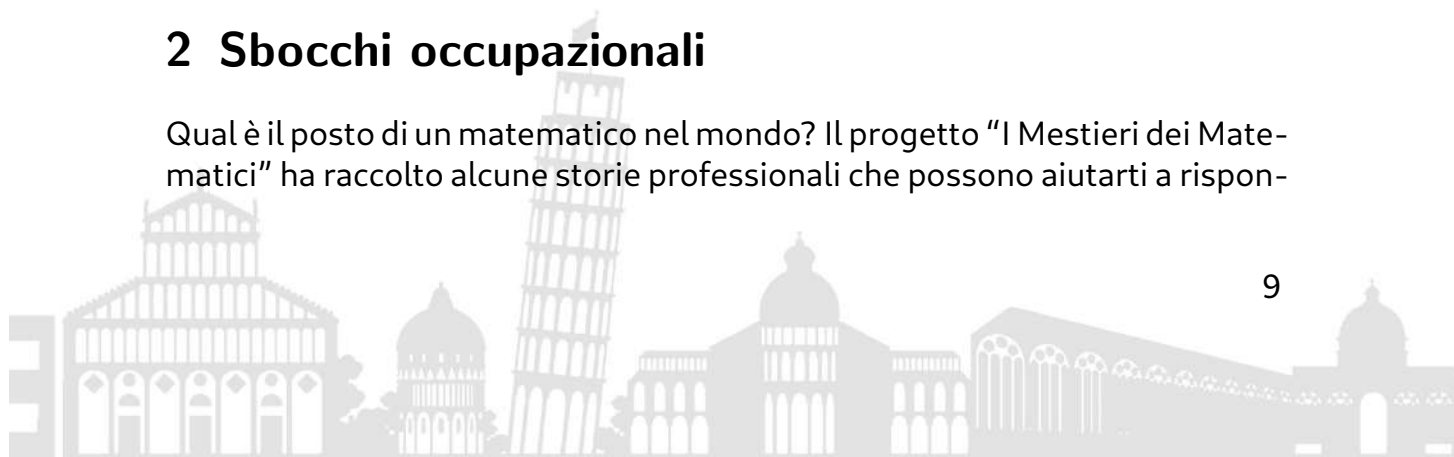


SCAN ME

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? Il progetto "I Mestieri dei Matematici" ha raccolto alcune storie professionali che possono aiutarti a rispon-



dere a domande di questo tipo e che forse ti stupiranno. Le trovi sul canale Youtube del progetto:

<https://www.youtube.com/@mestierideimatematici3873>

In generale risulta che i laureati in matematica sono soddisfatti della scelta fatta e godono di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare sul sito di AlmaLaurea si possono trarre i seguenti dati che riguardano i nostri laureati magistrali, vedi [2]:

- L'86% dei laureati magistrali del 2024 si dichiara soddisfatto del corso di studi.
- Il tasso di occupazione dei nostri laureati magistrali del 2020 a tre anni dalla laurea è il 100% (questo include coloro che proseguono con un dottorato).

Da alcuni anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro Dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi. Con questo duplice scopo è nato il progetto "Matematici al Lavoro".

3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge di solito all'inizio di settembre in diverse sedi in Italia tra cui una è proprio Pisa.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (sono 15 per l'anno accademico 2025/2026), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i due anni successivi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

Anche per il corso di laurea magistrale sono bandite delle borse INdAM: per esempio per l'anno 2025/2026 sono 12, più 6 dedicate in particolare a



chi si iscrive a Pisa, di cui almeno 3 per studentesse, come segno concreto della nostra attenzione alla parità di genere.

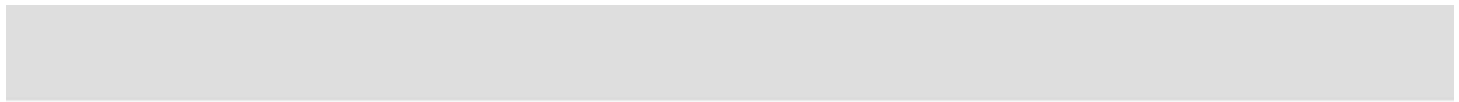
È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Puoi trovare tutte le informazioni sul sito <https://www.altamatematica.it>.

Gli studenti che si iscrivono qui a Pisa possono richiedere anche una borsa di studio del DSU (Azienda della Regione Toscana per il Diritto allo Studio Universitario) sulla base del reddito familiare. I vincitori di questa borsa ottengono l'esonero dalle tasse universitarie, un contributo per le spese e in alcuni casi anche vitto e alloggio gratuiti. Per avere maggiori informazioni, puoi visitare il sito <https://www.dsu.toscana.it/>.

Bibliografia

- [1] <https://www2.almalaurea.it>
- [2] <https://www.dm.unipi.it/assicurazione-della-qualita/assicurazione-della-qualita-didattica/situazione-occupazionale-dei-laureati/>
- [3] <https://www.dm.unipi.it/didattica/laurea-triennale/regolamenti-corso-di-laurea-triennale/>





Come funzionano le reti neurali?

di **Andrea Agazzi**, Professore presso Institute for Mathematical Statistics and Actuarial Sciences University of Bern.

1 Perché studiare le reti neurali? La motivazione e l'esempio di ChatGPT

Negli ultimi anni si sente parlare ovunque di Intelligenza Artificiale (IA): auto che si guidano da sole, applicazioni che riconoscono i volti, chatbot capaci di conversare come un essere umano o generatori di video *brainrot*. Ma come funzionano davvero queste macchine?

Alla base di gran parte di questi progressi c'è una tecnologia specifica: le *reti neurali artificiali*. Queste reti prendono ispirazione, almeno nel nome, dal cervello umano: sono costituite da unità elementari (i “neuroni artificiali”) che elaborano e trasformano informazioni, collegandosi tra loro in modo da costruire strutture complesse.

Un esempio concreto che molti di voi conoscono è ChatGPT. Si tratta di un sistema che, partendo da miliardi di testi raccolti in rete, ha imparato a riconoscere schemi linguistici e a generare risposte coerenti alle domande che gli vengono poste. Ma questa tecnologia non si limita al linguaggio: le stesse idee possono essere applicate al riconoscimento di immagini, alla musica, alla diagnosi medica e persino alla ricerca scientifica. Per capire come tutto ciò sia possibile, conviene partire da un esempio semplice, molto usato dai ricercatori per sperimentare: il riconoscimento di numeri scritti a mano.





Figura 1: Un'immagine prodotta dall'intelligenza artificiale.

2 Un caso semplice: riconoscere numeri scritti a mano (il database MNIST)

Per rendere l'idea di cosa significhi "allenare" una rete neurale, i ricercatori spesso partono da un compito che per noi esseri umani è facilissimo: riconoscere un numero scritto a mano. Immaginate una cifra scritta con il gesso su una lavagna: 3, 7, 9... Per una persona è immediato capire di che numero si tratta, anche se la calligrafia è un po' storta. Per un computer, invece, il problema è molto meno banale: non può "vedere" l'immagine come la vediamo noi, ma solo come una tabella di numeri che indicano la luminosità di ciascun pixel.

Per studiare questo problema, negli anni '90 è stato creato il database *MNIST* (Modified National Institute of Standards and Technology). Si tratta di una collezione di 70.000 immagini in bianco e nero di cifre da 0 a 9, ciascuna in un piccolo quadrato di 28×28 pixel. Ogni immagine può quindi essere rappresentata da 784 numeri (uno per ogni pixel), che la rete neurale userà come input. L'obiettivo è semplice da dire ma difficile da realizzare: dato un disegno a mano, la rete deve rispondere con il numero giusto. In pratica, si vuole costruire una "macchina" che prenda in input un'immagine e dia in output la cifra corrispondente.

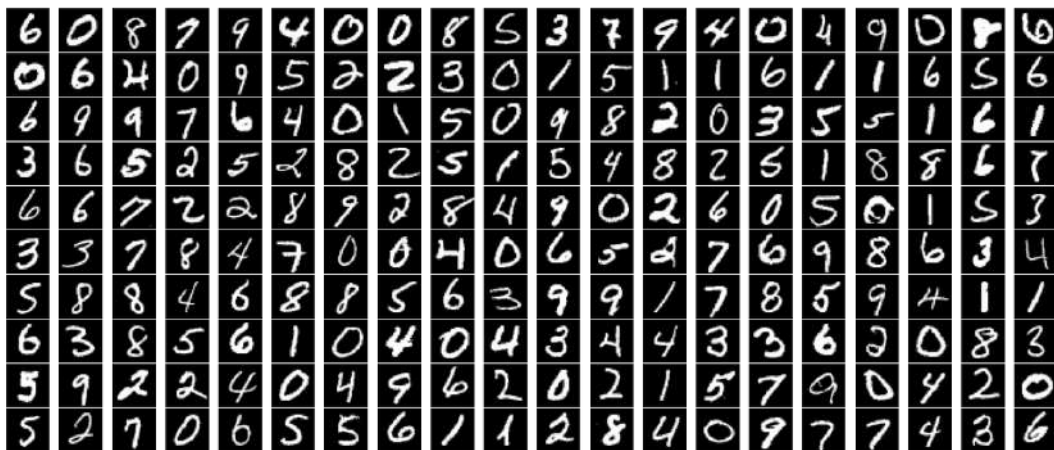


Figura 2: Alcuni esempi di numeri scritti a mano nel database MNIST. Pixel neri assumono il valore 0 e pixel bianchi il valore 1.

3 Dall'immagine alla rete neurale

Dal pixel al primo strato

Immaginiamo di voler dare a una rete neurale un numero scritto a mano, ad esempio un 3 del database MNIST. La rete non “vede” il disegno come noi, ma come una griglia di 28×28 pixel, cioè 784 piccoli quadratini, ciascuno con un valore che indica quanto è chiaro o scuro quel punto. Possiamo pensare a questa immagine come a un vettore

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{784}),$$

dove ogni componente x_i rappresenta l'intensità (da 0 a 1) del pixel i -esimo.

Questa informazione viene ora propagata attraverso la rete neurale, che è composta da diversi strati di neuroni artificiali. Ammettiamo ora che il primo strato della rete sia composto da $n_1 = 100$ neuroni artificiali. Ognuno di questi neuroni riceve tutti i 784 numeri in ingresso, ma li pesa in modo diverso per decidere se attivarsi o meno. Per ogni neurone, il calcolo della sua attivazione viene fatto in due fasi: prima si calcola una somma pesata

$$z = \sum_{i=1}^{784} w_i x_i,$$

dove $w_i \in \mathbb{R}$ sono i pesi associati a quel neurone, e poi si passa il risultato

attraverso una *funzione di attivazione* σ , per esempio

$$\sigma(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

così da ottenere l'attivazione o l'output del neurone, dato da

$$h = \sigma(z - b),$$

dove b è chiamato bias o livello di attivazione.

Il neurone si comporta quindi come un interruttore: si attiva ($h = 1$) se ha riconosciuto il pattern a cui è sensibile, resta spento ($h = 0$) se non lo ha riconosciuto. Supponiamo, ad esempio, che un neurone abbia pesi alti sui pixel che formano una linea verticale: esso si accenderà quando l'immagine contiene un 1. Un altro neurone potrebbe avere pesi concentrati su una curva in alto: si attiverà se trova una forma curva (utile per riconoscere un 3 o un 8). Queste forme elementari che, combinate, formano i numeri sono chiamate *pattern*.

Dalle linee ai numeri: gli strati successivi

Gli output del primo strato (linee, curve, bordi) diventano a loro volta gli input per lo strato successivo. A quel punto, i neuroni non guardano più i pixel, ma i *pattern* già riconosciuti.

Se nel primo strato c'è un neurone che si accende per una curva in alto e un altro che si accende per una linea verticale in basso, allora un neurone del secondo strato può imparare a combinarli. Se entrambi sono accesi, la combinazione suggerisce un 9. Allo stesso modo, due semicerchi uno sopra l'altro possono far pensare a un 8.

Ogni strato successivo costruisce caratteristiche sempre più astratte: non più solo linee o curve, ma parti intere di cifre. La gerarchia completa è quindi:

- primo strato: linee e curve semplici;
- secondo strato: forme intermedie (angoli, cerchi, anelli);
- ultimo strato: intere cifre (8, 9, 3...).

Matematicamente, questo processo è una *composizione di funzioni*: se f_i rappresenta l'output (le attivazioni) dei neuroni dell' i -esimo strato della rete, l'output della rete è dato da

$$F(x) = f_L(f_{L-1}(\dots f_2(f_1(x)) \dots)).$$



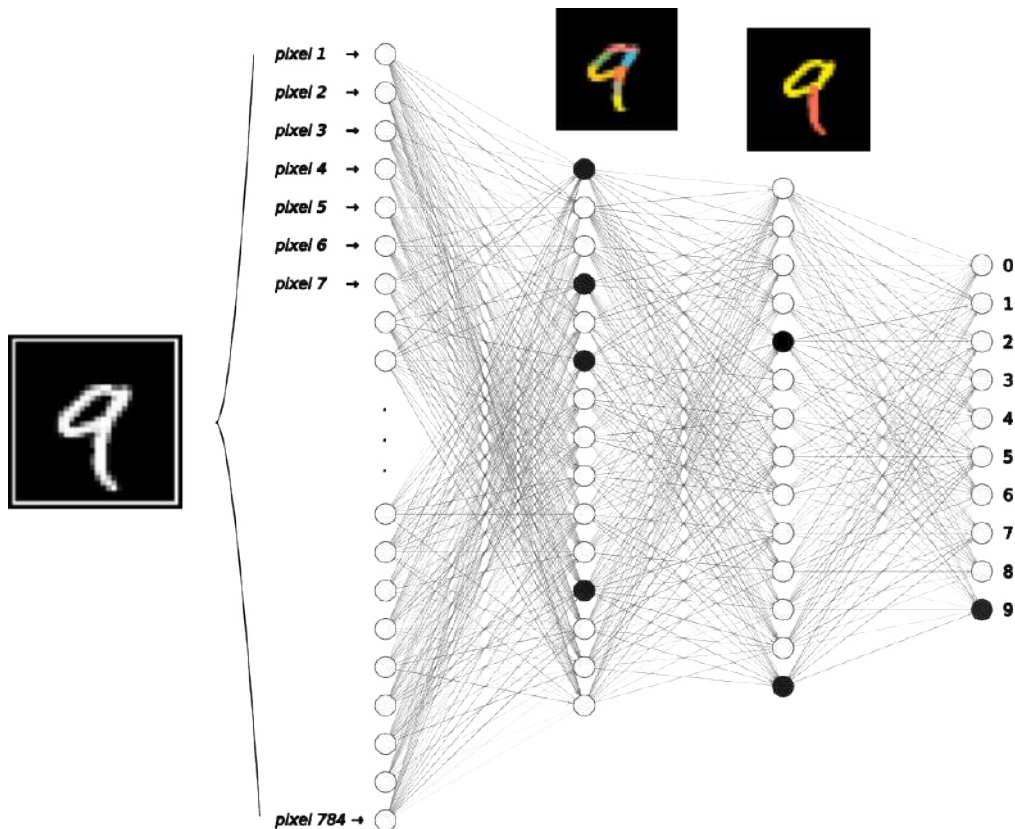


Figura 3: L'immagine in input viene scomposta in 784 pixel (i valori di x_i) e ognuno viene passato al neurone corrispondente del primo strato. Questa informazione viene combinata tramite i pesi della rete (gli archi nel disegno) e passata allo strato seguente, i cui neuroni riconoscono (si attivano) certe features dell'immagine (i neuroni attivi in questo esempio sono rappresentati in nero). Questo processo viene iterato da strato a strato con features più complesse, fino ad arrivare all'ultimo strato, dove la rete restituisce il numero riconosciuto attivando il neurone corrispondente. Nota che le features riportate in questa immagine sono delle semplificazioni di quelle riconosciute in realtà dalle reti.

L'output finale della rete è costituito da **10 neuroni**, uno per ciascuna cifra da 0 a 9. Per ogni immagine in ingresso, uno di questi neuroni riceve un segnale più forte degli altri e si attiva, indicando che la cifra corrispondente è stata riconosciuta.

4 Come imparano le reti neurali

Parte 1: La funzione di costo

Ogni volta che la rete guarda un'immagine, produce dieci numeri, uno per ciascuna cifra da 0 a 9. Se l'immagine è un "3" e il neurone del "3" si accende, la rete ha fatto bene. Se invece si accende quello del "7", la rete ha sbagliato.

Per misurare quanto sbaglia, si confrontano i valori prodotti dalla rete con la risposta corretta. Questo confronto dà un numero che chiamiamo *errore*: piccolo se la rete ha indovinato, grande se ha sbagliato.

Naturalmente, non basta guardare una sola immagine. La rete deve imparare a funzionare bene su migliaia di esempi. Per questo si fa la *somma degli errori* calcolati su tutto il database di allenamento. Se questa somma è alta, significa che la rete sbaglia molto; se è bassa, vuol dire che ha imparato a riconoscere correttamente la maggior parte dei casi.

Parte 2: La scelta dei parametri

L'output della rete, per ogni input, non è altro che una funzione dei parametri interni della rete: i pesi w e i bias b di ciascun neurone. Se questi parametri sono scelti male, la rete produrrà molti errori; se invece sono scelti bene, la rete funzionerà correttamente.

Ma come si fa a scegliere i parametri giusti? Il problema non è banale: aggiustare i pesi per riconoscere meglio un certo numero potrebbe peggiorare il riconoscimento di un altro. Inoltre, nelle reti moderne come ChatGPT, i parametri non sono centinaia ma miliardi: impossibile regolarli a mano. La strategia è quindi automatica: si cercano i parametri che minimizzano la funzione di costo, cioè la somma degli errori su tutto il database di addestramento. In altre parole, si cerca l'insieme di pesi e bias che permette alla rete di sbagliare il meno possibile, in media, su tutti gli esempi dati.

Parte 3: La discesa del gradiente

Per raggiungere questo obiettivo si utilizza un metodo detto *discesa del gradiente*, uno dei principi fondamentali dell'apprendimento automatico. La funzione di costo può essere interpretata come una forma di energia: alta quando la rete commette molti errori e bassa quando sbaglia poco. Allenare la rete significa quindi modificare i parametri in modo analogo a una pallina che tende spontaneamente a muoversi verso stati di energia minima. La discesa del gradiente realizza questo processo: a ogni passo i parametri vengono spostati nella direzione in cui l'errore diminuisce di più (nel linguaggio tecnico il *gradiente*, appunto), portando progressivamente la rete verso configurazioni in cui l'errore totale è molto ridotto.

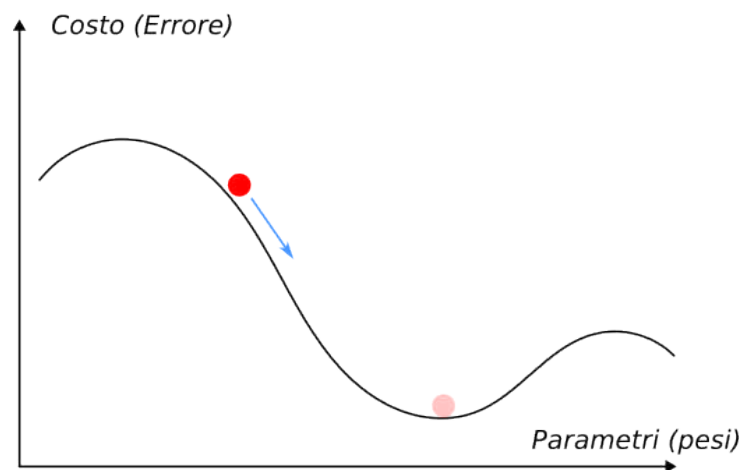


Figura 4: La discesa del gradiente può essere pensata come una pallina (in rosso, la cui posizione rappresenta i parametri/pesi della rete) che cerca di minimizzare la propria energia potenziale (l'errore totale) muovendosi nella direzione in cui quest'ultimo decresce più rapidamente possibile (in blu). Una volta raggiunto un minimo dell'errore la pallina si ferma.

Curiosità: esiste un risultato che afferma che, per reti sufficientemente grandi, la discesa del gradiente porta quasi sempre a soluzioni in cui l'errore totale è arbitrariamente vicino a zero. In altre parole, con molti parametri a disposizione, l'allenamento riesce a trovare configurazioni che funzionano sorprendentemente bene.

Parte 4: Quando l'allenamento funziona

Alla fine, la rete trova una configurazione dei parametri per cui la funzione di costo è vicina a un minimo. Ha imparato a riconoscere bene i numeri che

ha visto durante l'allenamento e, se ha ricevuto abbastanza esempi, riesce anche a riconoscere numeri mai visti prima grazie alle somiglianze con quelli già incontrati.

Come faccia esattamente a generalizzare rimane in gran parte un mistero matematico: la funzione costruita durante l'allenamento è molto complessa, e comprenderne a fondo il comportamento è una delle sfide più affascinanti.

Questi sono i principi fondamentali dell'*apprendimento automatico*: macchine che migliorano le proprie prestazioni imparando dagli esempi. Studiare in dettaglio come funzionano questi sistemi complessi è oggi un campo di ricerca di frontiera nella matematica e nell'informatica teorica.



Perché due rette parallele si incontrano all'infinito?

di **Tobia Moriconi**,

studente triennale del Dipartimento di Matematica di Pisa

1 Il problema del parallelismo

Il concetto di parallelismo fra rette è da sempre visto come molto affascinante ma anche come problematico, fin da quando Euclide si interrogò sul suo celebre quinto postulato:

"se una retta in un piano interseca altre due rette formando con esse dallo stesso lato due angoli acuti, allora queste ultime rette, prolungandole dalla parte degli angoli acuti, **prima o poi** si incontreranno."

Il postulato è stato prima riformulato nel tempo nella più celebre forma,

"data una retta e un punto esterno ad essa, passa una e una sola retta parallela alla retta data passante per il punto",

poi negato, dando vita alle geometrie non euclidee, nelle quali si afferma che per un punto esterno ad una retta possono passare più parallele, o può anche non passarne nessuna. In questo articolo, però, non parleremo della negazione del postulato, ma proveremo (forse) a capirlo un po' meglio, concentrandoci su quel *prima o poi* evidenziato nell'enunciato.

È abbastanza intuitivo capire che se gli angoli formati dalle due rette in questione sono piccoli le due rette si incontreranno abbastanza *presto* (Figura 1, prima immagine), mentre se sono vicini a un angolo retto dovranno fare molta strada prima di toccarsi (Figura 1, seconda immagine).



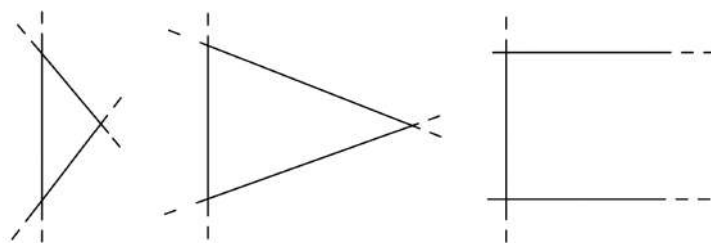


Figura 1: A seconda dell'angolo, le rette si incontrano presto, tardi, o mai (parallele).

E se gli angoli formati fossero esattamente angoli retti (Figura 1, seconda immagine), cercando di esaminare il caso limite del postulato di Euclide nella sua prima formulazione? Equivalentemente, se le due rette incontrate fossero perpendicolari alla prima retta (e dunque parallele fra loro), si incontreranno mai?

Andando a sentimento, se è vero che più gli angoli formati sono ampi (ma comunque compresi tra 0 e $\frac{\pi}{2}$), più le rette si incontreranno in un punto *distante*, verrebbe da dire che due rette parallele si incontreranno in un punto *più distante possibile*, ossia (se il titolo di questo articolo ha un qualche senso) *all'infinito*.

In altre parole, osservando che due rette incidenti si incontrano sempre in un punto che dipende dalla loro inclinazione, vogliamo provare a "portare al limite" la situazione, e capire che cosa succede se l'inclinazione è uguale per le due rette. Per avere una visione più chiara di questo concetto non basta parlare di punti *distanti* o *più distanti possibile*. Quello che faremo, quindi, è "istituire"¹ un nuovo spazio dove lavorare: lo **spazio proiettivo**. Lo caratterizzeremo in maniera rigorosa, studieremo le sue caratteristiche e capiremo che relazioni ha con lo spazio che conosciamo noi: scopriremo che questa bizzarra invenzione, in realtà, può darci alcune risposte alle nostre domande.

2 Lo spazio proiettivo

Per il resto della trattazione, ci muoveremo in spazi *reali*. Gli spazi reali sono la retta reale $\mathbb{R}$, in cui un punto è identificato da un numero, il piano reale $\mathbb{R}^2$,

¹"Istituire" non è proprio una parola corretta matematicamente, però è cruciale sottolineare che non stiamo definendo un concetto che è stato desunto da qualche ragionamento, ma un qualcosa che è stato inventato *ex novo*

in cui un punto è identificato da due coordinate, (x, y) , e in generale lo spazio n -dimensionale $\mathbb{R}^n$, in cui un punto è identificato da n coordinate, $(x_1, \dots, x_n)$. Da ora in avanti, quando parleremo di vettore $(x_1, \dots, x_n)$, intenderemo il vettore che va dal punto $(0, \dots, 0)$, l'origine, al punto $(x_1, \dots, x_n)$.

Per poter definire lo spazio proiettivo, abbiamo bisogno di introdurre il concetto di classe di un vettore.

Definizione 1. La classe di un vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutti i vettori della forma $(rx_1, rx_2, \dots, rx_n)$ al variare di r in $\mathbb{R}$, con $r \neq 0$. Formalmente, una classe è:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = \{(rx_1, rx_2, \dots, rx_n) \mid r \in \mathbb{R}, r \neq 0\}$$

Facciamo qualche esempio in $\mathbb{R}^2$: il vettore $(1, 2)$ starà nella stessa classe di $(2, 4)$, di $(3, 6)$ e di $(-1, -2)$, tale classe la possiamo chiamare indistintamente $[1, 2]$, $[2, 4]$ o $[-1, -2]$; il vettore $(0, 0)$ sta solo nella classe $[0, 0]$ che contiene solamente lui.

Passiamo dunque alla definizione dello spazio proiettivo:

Definizione 2. Lo spazio proiettivo associato allo spazio a $\mathbb{R}^n$ è:

$$\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) = \{[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)\}$$

ovvero l'insieme di tutte le classi di tutti i vettori, eccetto quella del vettore nullo.

In altre parole, in $\mathbb{R}^n$ un punto corrisponde a un vettore, mentre in $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ l'origine non esiste e un punto corrisponde a una classe di vettori. Esploriamo un po' gli spazi proiettivi!

Nella retta reale $\mathbb{R}$, gli elementi sono i "numeri", perché identificati da un'unica coordinata, e ogni numero si ottiene per moltiplicazione di qualsiasi altro per un qualche coefficiente (stiamo parlando di reali). Perciò $[1] = [2] = [-1] = \dots$ e si ha un'unica classe non nulla: $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ è quindi un solo elemento, e geometricamente è quindi un punto!

Nel piano reale $\mathbb{R}^2$ posso considerare le classi di vettori come le "direzioni" delle possibili rette passanti per l'origine: infatti al variare della classe $[a, b]$ (sempre con $(a, b) \neq (0, 0)$) i vettori della forma (ra, rb) identificano una e una sola retta passante per l'origine, ossia la retta di coefficiente angolare $\frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$; La classe $[0, 1]$ identifica invece l'asse y). Le rette passanti per l'origine sono, in gergo, un insieme di rappresentanti per le classi di vettori, cioè ogni classe è rappresentata univocamente da una retta. Immaginando



di fissare per ognuna di queste rette un punto nel semipiano superiore a distanza 1 dall'origine ottengo che l'insieme delle rette (e quindi delle classi) è rappresentato anche da una semicirconferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio 1 (Figura 2, prima immagine), ossia un altro insieme di rappresentanti è dato dai punti di questa semicirconferenza.

Attenzione! Non una circonferenza perché se fisso un vettore (a, b) questo sta sulla stessa retta che passa per $(0, 0)$ e $(-a, -b)$ quindi se prendessi sia (a, b) sia $(-a, -b)$ in realtà starei prendendo due volte la stessa classe (Figura 2, seconda immagine).

Per lo stesso motivo, la semicirconferenza “finisce” da un lato ma non dall'altro: se considerassi sia $(1, 0)$ che $(-1, 0)$ in realtà starei prendendo due volte l'asse x (ovvero la classe $[1, 0]$; Figura 2, terza immagine). Se vogliamo essere fantasiosi (ma è soltanto una rappresentazione grafica) possiamo pensare di “prolungare” la semicirconferenza a una circonferenza “attaccando” l'estremo vuoto all'estremo pieno (Figura 2, quarta e quinta immagine). Come diceva un recente film di fantascienza,

“Non provare a capirlo, sentilo!”

E' soltanto un trucchetto per visualizzare graficamente il fatto che $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ sono in realtà nella stessa classe.

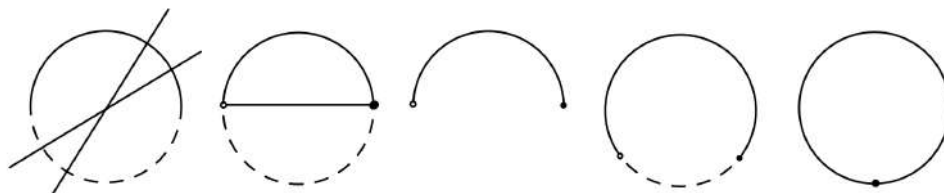


Figura 2: Rappresentazione geometrica della retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Scegliamo una semicirconferenza come insieme di rappresentanti e colleghiamo i due estremi della semicirconferenza perché appartenenti alla stessa classe.

Cerchiamo di visualizzare il proiettivo associato allo spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$: per lo stesso ragionamento di prima, possiamo prendere come insieme di rappresentanti le rette passanti per l'origine, che quindi ci daranno, in tre dimensioni, prendendo per ognuna di esse un punto a distanza 1 dall'origine, un insieme di rappresentanti dato da una semisfera (come prima punti simmetrici rispetto all'origine stanno nella stessa retta e dunque nella stessa

classe, Figura 3, prima immagine). Attenzione anche al bordo della semisfera: non è completo, perché se considerassimo sia un punto del bordo sia il suo opposto rispetto al centro, che stanno sulla stessa retta passante per l'origine, staremmo considerando due volte questa retta, e quindi, nell'insieme di rappresentanti, due volte la stessa classe (è un po' l'equivalente di quello che abbiamo per la retta proiettiva reale considerando un estremo solo della semicirconferenza, Figura 3, seconda immagine). Prima siamo riusciti, con un po' di fantasia, a "chiudere" la semicirconferenza in una circonferenza, ma con una semisfera questa costruzione è impossibile da visualizzare nello spazio tridimensionale. Possiamo però dare una differente rappresentazione del piano proiettivo reale: identifichiamo ogni punto della semisfera (senza bordo) con la proiezione ortogonale sul disco pieno di raggio 1 definito dal bordo della semisfera. Questa associazione fa sì che possiamo identificare i punti della semisfera con i punti di un cerchio (Figura 3, terza immagine)! Infine, per il bordo del cerchio, possiamo pensare che solo la metà appartenga al piano proiettivo, perché il punto diametralmente opposto a ciascun punto sta nella sua stessa classe (Figura 3, quarta immagine), oppure, con un tecnicismo, *identificare* le due metà del bordo del cerchio (perché entrambe rappresentano le stesse classi), ossia letteralmente considerare un punto del bordo e il suo opposto come *lo stesso punto* (Figura 3, quinta immagine).

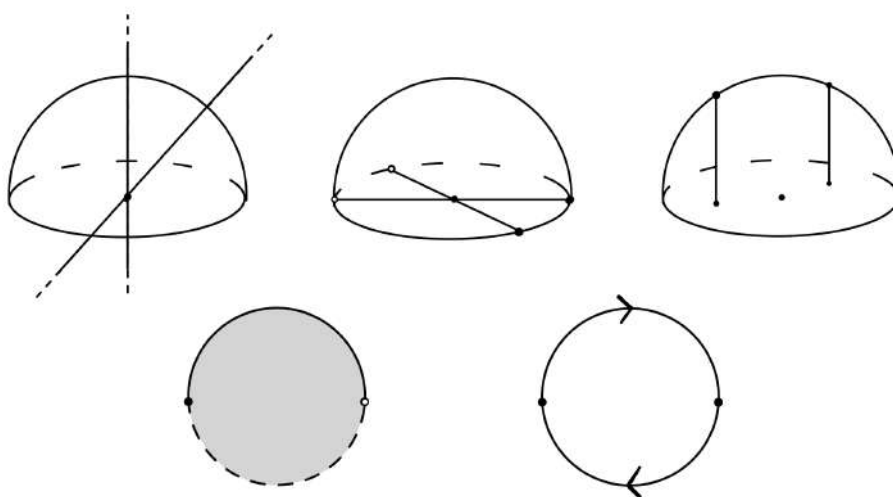


Figura 3: Costruzione di una rappresentazione geometrica del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.



3 Le carte affini

Data $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, la retta proiettiva associata a $\mathbb{R}^2$, e definiamo l'*iperpiano all'infinito*² e il suo complementare in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Definizione 3. L'*iperpiano all'infinito* di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, in simboli $H_0 \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, è l'insieme dei punti con prima coordinata 0. In formule:

$$H_0 = \{[x_0, x_1] \mid x_0 = 0\}.$$

Definizione 4. Il complementare dell'iperpiano all'infinito, in simboli $U_0 \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, è l'insieme delle classi con prima coordinata non nulla. In formule

$$U_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus H_0 = \{[x_0, x_1] \mid x_0 \neq 0\}.$$

Notiamo immediatamente che in H_0 , in realtà, sta una sola classe, ossia $[0, 1]$ (perché ogni punto $(0, x)$ è esprimibile come $x \cdot (0, 1)$, e dunque ogni $(0, x)$ sta nella stessa classe di $(0, 1)$). Dato che si tratta di un solo elemento e che abbiamo visto come $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ sia formato da un solo punto, identifichiamo i due spazi. Notiamo inoltre che U_0 è in bigezione (ogni elemento di un insieme è associato in maniera unica a un elemento di un altro insieme e viceversa) con $\mathbb{R}$, dove la bigezione è data dalla seguente funzione, detta *carta affine*:

$$\begin{aligned} j_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow U_0, \\ x &\longmapsto [1, x] \end{aligned}$$

(si legge " j_0 associa a x , elemento di $\mathbb{R}$, $[1, x]$, elemento di U_0 "). La mappa inversa è data da

$$\begin{aligned} j_0^{-1} : U_0 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ [x_0, x_1] &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0} \right) \end{aligned}$$

Siamo sicuri che la mappa j_0^{-1} è ben definita perché non andremo mai a dividere per 0 (in U_0 la prima componente è non nulla) e due elementi di una

²Per semplicità, in questa trattazione usiamo l'articolo determinativo per indicare l'iperpiano all'infinito. In realtà, qua stiamo compiendo una scelta di sistema di riferimento che torna comoda per una visualizzazione geometrica ma ogni iperpiano potrebbe essere considerato "l'iperpiano all'infinito". Tuttavia, ci sono delle buone ragioni "concettuali" per farlo, legate ai risultati che enunceremo alla fine di questo articolo



stessa classe sono, componente per componente, uno multiplo non nullo dell'altro. Di conseguenza, facendo il rapporto delle coordinate, il risultato rimarrà costante. Convincedevi che le due mappe sono effettivamente l'una l'inversa dell'altra, verificate cioè che partendo da un elemento, applicando prima una e poi l'altra mappa (o viceversa), si ottiene come risultato l'elemento di partenza ("convincetene" è un'ottima strategia per dimostrare qualcosa, gli insegnanti la usano spesso!).

Per come abbiamo definito i due insiemi vale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = H_0 \cup U_0$, e per quello che abbiamo detto in precedenza possiamo vedere H_0 come una copia di $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ e U_0 come una copia di $\mathbb{R}$. Viste le identificazioni fatte, possiamo quindi pensare $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ come

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^0(\mathbb{R}) \cup \mathbb{R}$$

Ma c'è di più: possiamo fare lo stesso con $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, definendo l'iperpiano all'infinito H_0 e il suo complementare U_0 estendendo quanto fatto per $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Più precisamente:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_0 = 0\} \\ U_0 &= \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus H_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_0 \neq 0\} \end{aligned}$$

E' facile adesso mostrare che H_0 è in bigezione con $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: informalmente, basta considerare le ultime due coordinate, formalmente

$$\begin{aligned} f : H_0 &\longleftrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \\ [0, x_1, x_2] &\longleftrightarrow [x_1, x_2] \end{aligned}$$

Si ottiene inoltre una bigezione fra U_0 e $\mathbb{R}^2$ definendo le due mappe:

$$\begin{aligned} j_0 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow U_0, \\ (x_1, x_2) &\longmapsto [1, x_1, x_2] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} j_0^{-1} : U_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ [x_0, x_1, x_2] &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right) \end{aligned}$$

Di nuovo, siamo riusciti a scrivere $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come unione di due spazi che già conosceamo:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = H_0 \cup U_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cup \mathbb{R}^2.$$



E' facile capire come questa costruzione si possa estendere a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ per ogni $n \geq 1$. Lasciando i dettagli al lettore, possiamo in generale scrivere:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \cup \mathbb{R}^n.$$

Facciamo un piccolo esempio per capire plasticamente questo concetto, "costruendo" $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ a partire da $\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$. Visualizziamo i nostri "ingredienti" (Figura 4, prima immagine), immaginandoci il primo come la classica retta infinita e il secondo come un punto (abbiamo già detto che si tratta di un solo elemento). A questo punto possiamo immaginare di "unire" gli estremi della retta reale e "chiuderli" con il punto del proiettivo (Figura 4, seconda immagine), ottenendo così una circonferenza chiusa (Figura 4, terza immagine), che è proprio la raffigurazione che matematicamente abbiamo trovato per $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

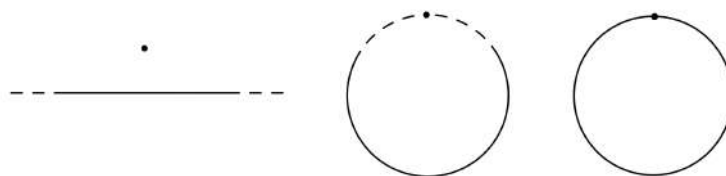


Figura 4: Costruzione di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ a partire da $\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$.

Vorrei porre un piccolo accento su questo risultato, che credo sia già molto affascinante di per sé: definendo lo spazio proiettivo, una struttura che fondamentalmente ci siamo inventati di sana pianta, abbiamo scoperto che in realtà lo possiamo vedere come un'estensione dello spazio di partenza (possiamo infatti dire che per passare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ devo "aggiungere" $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$), che ci consente di "contestualizzarlo" come parte di un qualcosa più grande, e quindi di capirlo meglio. In altre parole, tramite il proiettivo posso vedere gli spazi in modo più completo: strabiliante!

4 Parte affine e chiusura proiettiva

Ma in cosa si manifesta questo aver "compreso" più profondamente $\mathbb{R}^n$? Anzitutto nel fatto che, dato che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = H_0 \cup U_0$ e che, viste le identificazioni



fatte, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, allora ogni sottospazio³ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ avrà una parte in $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ (la sua intersezione con H_0) e una in $\mathbb{R}^n$ (la sua intersezione con U_0): e inoltre è vero anche il contrario, cioè che se prendo un sottospazio nello spazio di partenza $\mathbb{R}^n$ posso considerare l'inclusione di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (con le opportune identificazioni) e "contestualizzare" il sottospazio reale come una parte di un sottospazio proiettivo più grande, di cui sarà l'intersezione con U_0 . Dando dei nomi alle cose:

Definizione 5. Dato V sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, definiamo W parte affine di V se $V \cap U_0 = W$; utilizzando l'identificazione data dalla carta affine j_0 , scriveremo e intenderemo $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione 6. Dato W sottospazio di $\mathbb{R}^n$, considero l'identificazione di esso con U_0 , e quindi considero W sottoinsieme di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: definisco la chiusura proiettiva di W il sottospazio proiettivo V di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che W è la parte affine di V .

Visualizziamo questi concetti a livello di calcoli: dato un sottospazio di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, che sarà descritto tramite $n+1$ coordinate (ricordiamo che i suoi elementi sono classi di vettori di $\mathbb{R}^{n+1}$), per ottenere la sua parte affine basta intersecarlo con U_0 , ossia prendere soltanto i punti di coordinata x_0 non nulla. Per fare questo possiamo "forzare" la componente x_0 a essere 1 e "riscalare" di conseguenza le altre: in altre parole, $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ (a meno che x_0 non sia 0, naturalmente) è la stessa classe di $[1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}]$, quindi fissare la componente x_0 è un modo per porci sicuramente fuori da H_0 e prendere comunque tutte le classi. Quindi, avendo sostituito la prima componente con un numero dato, otteniamo un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ descritto, com'è giusto che sia, tramite n coordinate.

Facciamo un esempio per chiarire: prendiamo una retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, che scriveremo nella sua forma più intuitibile come $bx_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ ⁴. Intersechiamo i punti che appartengono alla retta con U_0 , e otteniamo la sua parte affine. Per far questo, dobbiamo considerare che x_0 sia sempre 1 e otteniamo che i

³Non è possibile qua dare una definizione di sottospazio che vada granché oltre quella intuitiva di "spazio più piccolo contenuto all'interno": possiamo dire che un sottospazio è un sottoinsieme che ha anch'esso caratteristiche di spazio, volgarmente potremmo dire che è un sottoinsieme "sensato". Questo vale sia in $\mathbb{R}^n$ che nei proiettivi: per esempio in $\mathbb{R}^n$ un insieme di punti presi a caso non è un sottospazio ma una retta passante per l'origine sì.

⁴Si tratta effettivamente di una retta come ce la possiamo immaginare, infatti i punti che stiamo trattando sono classi di elementi di $\mathbb{R}^3$. L'equazione è ben definita perché se esprimo la classe con un diverso rappresentante l'appartenenza non varia; infatti è facile accorgersi che la classe $[a, b, c]$ appartiene alla retta se e solo se appartengono tutte le classi della forma $[ra, rb, rc]$ (che poi sono tutti i modi di esprimere la stessa classe).



punti della parte affine dovranno soddisfare l'equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$, che effettivamente è una retta di $\mathbb{R}^2$.

Tornando al caso generale, si ha che in realtà si tratta di una bigezione: a un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ corrisponde uno e un solo sottospazio di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che ne è la chiusura proiettiva. Però questo non si può spiegare in questo articoletto, perché richiede un pochino di dimestichezza con l'algebra lineare. Comunque riassumiamo quanto detto in un teorema, che non dimostreremo:

Teorema 1. Dato $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sottospazio proiettivo esiste un unico $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che V sia la parte affine di W . Viceversa, dato $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio, esiste un unico $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sottospazio proiettivo tale che W sia la chiusura proiettiva di V .

5 Dove si incontrano due rette parallele?

Anche senza esserci inoltrati in dimostrazioni non del tutto elementari, siamo quasi arrivati alla nostra meta: consideriamo due rette parallele in $\mathbb{R}^2$, che chiameremo $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$ e $a_1x_1 + a_2x_2 + c = 0$ (riconosciamo che sono parallele perché hanno stesso coefficiente angolare). Chi sono le loro chiusure proiettive? È facile convincersi che sono $bx_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ e $cx_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ (di nuovo, vi suggerisco di fare la verifica; cosa succede se risostituite 1 a x_0 ?), e allora ecco che queste due rette si intersecano eccome, in $[0, a_2, -a_1]$! Ma non me ne sarei accorto se avessi considerato soltanto $\mathbb{R}^2$, perché il punto di intersezione è nell'insieme che ho "aggiunto" a $\mathbb{R}^2$, che infatti ho chiamato (non a caso...) iperpiano all'infinito.

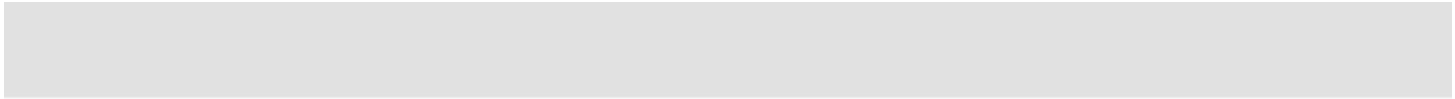
Il cerchio quindi si chiude: avevamo una questione aperta a cui non sapevamo dare risposta in $\mathbb{R}^2$: due rette parallele, si incontrano *prima o poi*?. Abbiamo allora costruito una struttura che abbiamo scoperto estendere $\mathbb{R}^2$. Abbiamo guardato il nostro buon vecchio $\mathbb{R}^2$ da una prospettiva più ampia e abbiamo osservato anche gli oggetti che ci vivono in una prospettiva più ampia. Grazie a questo, abbiamo potuto visualizzare l'"infinito" e arrivare a una comprensione più profonda del problema che ci eravamo posti: le due rette parallele, effettivamente prima o poi (*mooolto poi*) si incontrano!.

E dunque, che cosa abbiamo davvero aggiunto in generale a $\mathbb{R}^n$? In un certo senso, abbiamo aggiunto i "punti proibiti", ossia i punti che non riusciamo a formalizzare in $\mathbb{R}^n$, quelli che coinvolgono il concetto di infinito. Questa è in realtà una delle utilità del proiettivo, che non si riduce solamente a questo, ma ha altre molteplici applicazioni: per esempio nello studio delle coniche.



Grazie a ragionamenti analoghi a quanto visto si può mostrare come una parabola intersechi l'infinito in un punto, un'iperbole in due punti e un'ellisse neanche in uno. Direi che è un bel passo avanti, no?





Racconti dalla Settimana Matematica

Ogni anno il Dipartimento di Matematica di Pisa organizza, nel mese di febbraio, la Settimana Matematica, un evento dedicato agli studenti delle scuole superiori che desiderano approfondire le loro conoscenze matematiche e scoprire le opportunità offerte dal corso di laurea in Matematica di Pisa. Durante questa settimana, gli studenti partecipano a lezioni plenarie e laboratori tenuti da docenti, ricercatori e studenti universitari, affrontando temi affascinanti e stimolanti e avvicinandosi alla vita universitaria. Vengono inoltre predisposti dei momenti di confronto e discussione con gli studenti universitari, che condividono le loro esperienze e rispondono alle domande dei partecipanti.



Al seguente QR code è possibile trovare il programma della Settimana Matematica 2024.

In questa sezione riportiamo le sensazioni e i commenti degli studenti che hanno partecipato alla Settimana Matematica 2025, tenutasi dal 12 febbraio al 14 febbraio 2025.

È stato un grande onore partecipare a questa attività! Nonostante studi italiano da poco più di un anno, le vostre lezioni sono state molto interessanti e mi hanno permesso di apprendere tanti



nuovi concetti. Inoltre, ho avuto l'opportunità di conoscere altri ragazzi appassionati di matematica, il che è stato davvero bello. L'evento è stato un successo, complimenti e grazie ancora per tutto!

Linda, Istituto Calasanzio (Empoli).

Ciao!

Come esperienza è ottima, soprattutto per chi è ancora indeciso su che dipartimento scegliere: da una buona idea del genere di persone che potresti trovarci e, grazie all'organizzazione delle lezioni, ti permette di capire che genere di cose andresti a studiare. L'onestà dei tutor nel rispondere alle varie domande di noi liceali è stato utilissimo, mi ha tolto molti dubbi che mi giravano per la testa a cui le persone che non hanno effettivamente vissuto l'esperienza non possono rispondere.

Il laboratorio è stata un'esperienza molto divertente: la lezione era molto interattiva e non pesante, i tutor sono stati molto bravi a farci sentire in un ambiente dove si possono esprimere anche i dubbi o domande più sceme e comunque ricevere una risposta senza essere giudicati. Forse qualche pausa in più per riposarsi?

Beatrice, Liceo Antonio Vallisneri (Lucca).

Ciao!

Sono arrivato a Pisa con un interesse per la matematica, ma con una sfiducia che questo potesse essere un percorso percorribile all'università. Il docente e i tutor mi hanno mostrato con passione e ilarità che la bellezza della matematica, benché difficile, può essere raggiunta e contemplata se ci si mette dedizione e impegno. Sento che il laboratorio organizzato e il suo approccio amichevole ha risvegliato un legame con la matematica che stava svanendo.

Ancora grazie per tutto!





Figura 1: Un momento della Settimana Matematica 2025 presso il Dipartimento di Matematica di Pisa.



Giulio, Liceo Scientifico.

Il laboratorio sulla teoria dei nodi è stato un'occasione fantastica per entrare in contatto con un aspetto affascinante della matematica. Nonostante fosse un argomento complesso, l'approccio pratico e interattivo mi ha permesso di comprenderlo in modo più profondo e interessante. Inoltre questi tre giorni a Pisa sono stati molto stimolanti, non solo per l'approfondimento della teoria dei nodi, ma anche per la possibilità di confrontarsi con altri studenti appassionati di matematica.

Livia, Liceo Scientifico.

Buongiorno!

La volevo ringraziare per le lezioni che ha tenuto durante la settimana della matematica che sono state (mi scusi il termine) ganzissime.

La settimana della matematica è stata un'esperienza fantastica dove ho capito quello che voglio fare dopo le superiori. Lo staff è stato disponibile, amichevole e ha risposto a tutte le nostre domande.

Rocco, IIS Roncalli (Poggibonsi).

Questa esperienza mi ha aiutato a comprendere un mondo che non mi era per niente noto. Conoscevo la teoria dei nodi solo per nome, ma adesso ho capito che è un argomento che mi affascina. Parlando invece dei tutor, sono stati sempre educati e ben disposti, spiegandoci anche le situazioni attuali in università e durante il corso di laurea. Le lezioni non sono state soltanto spiegazioni, ma anche comprensione del sistema universitario.

Alessandro, Liceo Classico Lorenzo Costa (La Spezia).



Le seguenti due testimonianze sono state inviate direttamente ai docenti e tutor che hanno tenuto il laboratorio, e faceva piacere condividerle. Non sono propriamente commenti, ma esprimono bene lo spirito con cui gli studenti hanno vissuto l'esperienza.

Buongiorno!

Per la fine dell'AS devo scrivere un "capolavoro" PCTO per dimostrare ciò che ho imparato durante le esperienze PCTO.

Ho deciso di parlare della mia esperienza alla Settimana della Matematica nel mio capolavoro, e per ovvie ragioni devo scrivere pure del laboratorio.

La mia domanda è: posso citare il suo nome quando parlo del laboratorio? Sono rimasta soddisfatta dell'esperienza e soprattutto del laboratorio principalmente grazie a lei e mi farebbe molto piacere citarla.

La ringrazio in anticipo per la disponibilità e per la bellissima esperienza.

Giulia, Istituto Calasanzio (Empoli).

Ciao!

Non so se ti ricordi di me... per rinfrescare la memoria: sono quella che ti ha fatta impazzire nelle ultime due edizioni della Settimana della Matematica!

Ti scrivo solo per aggiornarti che, dopo mille dubbi e paranoie, alla fine ho deciso e mi sono iscritta a Pisa. Non so quanto riuscirò a "sopravvivere" (spero ovviamente il più possibile), ma come primo obiettivo mi sono posta almeno fino a febbraio per la Settimana della Matematica.

Spero di non averti disturbato con questa mail... ti auguro una buona serata.

Martina





Sfide matematiche: tre compagni attraverso il portale del calcolo

In questa rubrica, proponiamo una serie di quesiti matematici da risolvere proposti da vari studenti, incorniciati in una mini avventura generata dall'IA (per rimanere in tema di reti neurali!). Invitiamo i lettori a cimentarsi con i problemi, che spaziano dalla teoria dei numeri alla geometria, e a sfidarsi tra di loro per vedere chi riesce a risolverli tutti!

Il viaggio dei tre compagni

Tre studenti — Livia, Amir e Tom — varcano il Portale del Calcolo, alla ricerca del “Sigillo dell’Undici”, l’unico in grado di riaprire il passaggio verso casa. Ogni incontro nel Regno è una prova; ogni prova, un problema. Tutto è collegato.

1. Il Mercante e le Torri

Appena oltre il Portale, un mercante di spezie siede accanto a sacchi colmi. “Il pedaggio si paga in torri perfette” — dice — “Se sapete quante altezze sono possibili, passo la vostra ricevuta ai Guardiani del Circuito.”



Problema 1 — Le torri del mercante

Un mercante ha 2025 sacchetti, ciascuno con 2025 semi. Vuole impilarli in torri tutte della stessa altezza (tutte le torri devono avere uguale numero di sacchetti, e non devono avanzare sacchetti).

Quali altezze sono possibili?

Il mercante, soddisfatto, consegna una ricevuta con tre numeri: 12, 15, 20. "Mostratela ai Guardiani del Circuito: regolano le partenze dei draghi."

2. Il Circuito dei Draghi

I tre giungono a un'arena circolare. Tre draghi decollano seguendo orari impressi nella ricevuta. Il cancello successivo si aprirà solo quando i draghi torneranno insieme.

Problema 2 — La sincronia dei draghi

Tre draghi partono dallo stesso punto su un circuito: il primo compie un giro in 12 minuti, il secondo in 15, il terzo in 20.

Dopo quanto tempo si ritroveranno tutti e tre di nuovo al punto di partenza?

Il cancello scatta. Un vecchio Mago di Corte applaude e lancia sul pavimento un mazzo di carte numerate. "Se capite questo, vi dono la Mappa del Bosco Sospeso."

3. Il Mago e la Somma Fantasma

Il Mago mescola e sorride: "Ciò che togliete influenza ciò che resta... ma a volte resta più di quanto immaginate."

Problema 3 — La somma che si riflette

Un mazzo ha le carte numerate da 1 a 36. Selezionando 9 carte, la somma è un multiplo di 9.

Dimostra che la somma delle restanti 27 carte è anch'essa un multiplo di 9.



“Ben fatto” — dice il Mago — e traccia tre passi lunghi sul terreno: “Uno, tre, uno, tre... Con questa cadenza attraverserete il Bosco Sospeso.” Consegna una mappa che indica un ponte lunghissimo.

4. Il Ponte del Bosco Perduto

Il ponte è fatto di assi numerate. Un tamburo lontano detta due soli passi possibili: $+1$ o $+3$. L’eco del tamburo suggerisce un conteggio ricorsivo.

Problema 4 — Attraversare il ponte

Le assi sono numerate da 1 a 100. Si parte dall’asse 1 e si può avanzare ogni volta di 1 o di 3 assi.

In quanti modi differenti si può raggiungere l’asse 100?

Dall’altra parte li attende un monaco. “Il Sigillo dell’Undici non si ottiene per caso” — sussurra — “ma a colpi di simmetria.” Sul leggio, un quadrifoglio di cifre.

5. Il Monaco e il Sigillo

Il monaco mostra un numero a quattro cifre da ricostruire: “Solo allora vi indicherò la riva del Lago a Corda Bassa”.

Problema 5 — Il numero del Sigillo

Trova il numero di 4 cifre che soddisfa:

- le cifre sono tutte distinte;
- la somma delle prime due cifre è 9;
- la somma delle ultime due cifre è 10;
- il numero è divisibile per 11.

Qual è il numero?

Il monaco annuisce e consegna un gettone inciso con un arco: “Questo vi servirà al Lago: senza l’altezza giusta, la barca non scivola.”

6. Il Lago a Corda Bassa

La riva curva del lago è perfettamente circolare. Una corda tesa tra due pali sostiene la passerella della barca. Livia osserva: "Se conoscessimo la distanza dal centro, sapremmo regolare l'altezza della passerella."

Problema 6 — Corda e distanza dal centro

In un cerchio di raggio 10, una corda sottende un arco di 120° .

Qual è la distanza della corda dal centro del cerchio?

La passerella scende alla quota corretta: la barca li porta sull'Isola dei Medi. Scolpito sulla pietra: "Solo chi riduce senza perdere armonia conoscerà il varco finale". Tom sorride: "È un invito alla similitudine".

7. L'Isola dei Medi

Sull'isola, un mosaico equilatero e, inscritto, un triangolo più piccolo. Amir nota i punti medi segnati d'oro.

Problema 7 — Il triangolo dentro il triangolo

Un triangolo equilatero ha lato 6. Si considerino i punti medi dei tre lati e si uniscano per formare un triangolo centrale.

Calcola l'area del triangolo dei punti medi.

Dalle acque emerge un galeone: i Pirati del Bilancio. "Il Sigillo dell'Undici?" — ringhiano — "Lo custodiamo noi. Ma qui si vota. Conoscete le regole?" Livia stringe il gettone del monaco. "Conosco le regole, ma voglio l'esito."

8. Il Consiglio dei Pirati

I pirati discutono: il più anziano propone, la maggioranza decide, chi fallisce sparisce dalla votazione. Il forziere con 100 monete brilla: solo una divisione razionale lo aprirà.



Problema 8 — La divisione razionale

Cinque pirati (dal più anziano P_1 al più giovane P_5) devono dividersi 100 monete. Procedura:

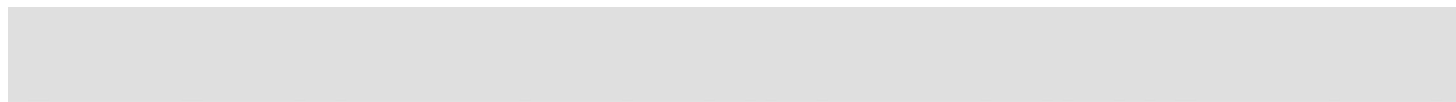
- il pirata di turno propone una divisione;
- se almeno metà dei pirati vivi accetta, la proposta passa;
- altrimenti il proponente viene eliminato e si passa al successivo.

Tutti sono perfettamente razionali, amano le monete e, a parità di guadagno, preferiscono eliminare un rivale.

Quale divisione si realizzerà?

Quando la proposta corretta viene accettata, il forziere si apre rivelando il “Sigillo dell’Undici”. Il Portale del Calcolo si riaccende. Livia, Amir e Tom tornano a casa con la consapevolezza che, in quel Regno, ogni scelta era legata alla precedente: torri, orari, somme, passi, simmetrie, corde, medi... e persino voti. Un unico filo logico, dall’inizio alla fine.





Aneddoti Storico Matematici

di **Luca Bruni**,

professore di Matematica e Fisica presso Liceo Marconi, San Miniato

In questa sezione, riportiamo alcuni aneddoti storico-matematici legati a grandi personalità del passato (non necessariamente matematici). Sarà una occasione di scoprire curiosità e fatti più o meno noti, su personaggi che hanno fatto la storia della matematica e non solo!

1 Gauss, il "Principe dei matematici"

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) è considerato uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, spesso soprannominato il "principe dei matematici". Gauss nasce a Braunschweig, in Germania, e mostra fin da giovane un talento straordinario per la matematica (si narra che all'età di tre anni abbia corretto il padre durante il calcolo delle sue finanze, ma questa pare solamente una leggenda). La sua mente brillante ha contribuito in modo significativo a numerosi campi della matematica e della scienza, tra cui l'algebra, la teoria dei numeri, la statistica, la geometria e la fisica.

Uno degli aneddoti più famosi su Gauss riguarda appiunto la sua infanzia: la storia che stiamo per raccontare è dibattuta; ne riportiamo una tra le versioni più comuni. Si racconta che quando Gauss aveva 9 anni (ma in alcune versioni si parla di 7 anni) il suo insegnante, J.G. Büttner, ordinò ai suoi studenti di fare la somma dei numeri da 1 a 100, un compito "impossibile" che li avrebbe tenuti occupati per molto tempo. Mentre tutti i compagni cominciarono faticosamente a fare i conti, il piccolo Gauss diede la risposta esatta, sorprendendo l'insegnante ed il suo assistente. Di seguito il famoso problema che Gauss risolse in pochi secondi:



Figura 1: Carl Friedrich Gauss (1777–1855), il "Principe dei matematici".

Il problema

Calcolare la somma dei numeri interi da 1 a 100, ovvero trovare il valore di:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

Non si è certi di quale metodo abbia adottato il matematico: l'idea più comune è che dispose in una riga i numeri da 1 a 100 e in una riga sotto i numeri da 100 a 1, scoprendo che ogni colonna dava come risultato 101: Carl moltiplicò $100 \cdot 101$ e divise per due, ottenendo il risultato. Un'altra ipotesi, è che scrisse in fila i numeri da 1 a 50 e in una fila sotto in senso inverso i rimanenti da 51 a 100, ottenendo così per ogni coppia la somma costante di 101: il risultato era quindi $101 \cdot 50$.¹

Non è difficile generalizzare il metodo di Gauss per calcolare la somma dei primi n numeri interi e lasciamo al lettore il compito di trovare la famosa formula generale. Per chi volesse esplorare spingersi ulteriormente, può anche provare a vedere se riesce a risolvere il problema della somma dei primi 100 numeri al quadrato, ovvero:

¹La stessa storia, come dicevamo, rimane incerta. Alcune versioni dicono che il problema originale era calcolare la somma dei primi 100 numeri della serie $81297 + 81495 + 81693 + \dots$ nella quale ogni termine differisce dal precedente per il valore di 198 e che Gauss lo risolse in pochi minuti in maniera simile a quanto detto prima.

Un problema più difficile

Calcolare la somma dei quadrati dei numeri interi da 1 a 100, ovvero trovare il valore di:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$$

Chissà a che età Gauss riuscì a risolvere questo problema!

Qualche curiosità su Gauss

L'opera di Gauss è vastissima e molto profonda. Ci limitiamo ad enunciare alcune curiosità su Gauss e i suoi contributi alla matematica invitando il lettore a scoprire di più su questo straordinario matematico.

- **Diciassettagono regolare:** nel 1796, a 19 anni, dimostrò la costruibilità con riga e compasso del 17-agono regolare; chiese che fosse inciso sulla sua lapide.
- **Teorema Fondamentale dell'Algebra:** nel 1799 fornì la prima dimostrazione completa del Teorema e ne pubblicò versioni raffinate negli anni successivi.
- **Disquisitiones Arithmeticae:** nel 1801 pubblicò l'opera che contiene alcuni concetti fondativi della teoria dei numeri moderna; introdusse la notazione per le congruenze e sviluppò in modo sistematico l'aritmetica modulare.
- **Orbitale di Cerere:** nel 1801 calcolò l'orbita dell'asteroide "scomparso", permettendone il ritrovamento; applicò metodi che oggi riconduciamo ai *minimi quadrati*.
- **Gauss e la statistica:** la "campana di Gauss" (distribuzione normale) e il metodo dei minimi quadrati sono legati al suo nome (sviluppati in parallelo a Legendre).
- **Geometria differenziale:** con il *Theorema Egregium* mostrò che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie.
- **Numeri gaussiani:** studiò $\mathbb{Z}[i]$ (interi gaussiani), fondamentali in teoria algebrica dei numeri e nelle somme quadratiche.

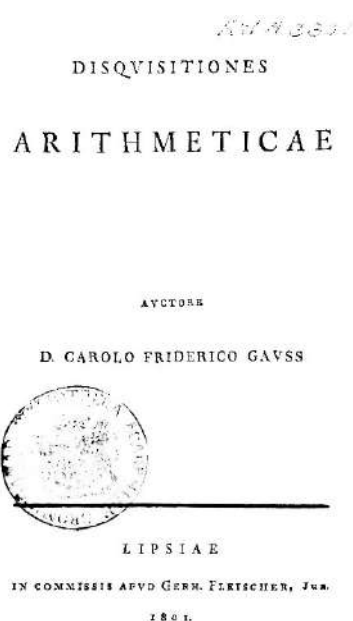


Figura 2: Frontespizio delle *Disquisitiones Arithmeticae* di Gauss (1801).

2 Il Teorema di Napoleone

Napoleone Bonaparte (1769–1821) è ricordato per il suo genio strategico e le sue conquiste militari. Non tutti sanno però che non fu soltanto un generale e imperatore, ma anche un appassionato di matematica, in particolare di *geometria*. Si narra che nelle accademie militari pretendeva che gli ufficiali avessero una formazione scientifica solida, convinto che la strategia militare si fondasse anche su logica e calcolo. Non a caso, durante le sue campagne, favorì la nascita e il rafforzamento di istituzioni scientifiche come l'École Polytechnique.

Si racconta che Napoleone stesso si diletta in dimostrazioni e nella ricerca di nuovi teoremi di geometria. Un elegante risultato di geometria piana, passa alla storia come il *Teorema di Napoleone*. Più che una vera scoperta, fu forse un segno della sua passione per la materia, ma il nome è rimasto fino ad oggi.



Figura 3: Napoleone Bonaparte (1769–1821), appassionato di matematica e geometria.

Il Teorema di Napoleone

Dato un triangolo qualunque, se si costruiscono esternamente su ciascun lato tre triangoli equilateri, allora i centri di questi triangoli equilateri formano a loro volta un triangolo equilatero.

Un risultato semplice da enunciare, ma di grande eleganza: un piccolo gioiello di simmetria che ancora oggi viene raccontato nelle scuole come curiosità geometrica. La leggenda narra che l'enunciato del Teorema e la sua intuizione siano attribuibili al generale, ma che poi la sua dimostrazione sia stata affidata e fornita da Joseph-Louis Lagrange (non proprio un matematico qualsiasi, ma uno dei più grandi del XVIII secolo). La prima pubblicazione che menziona questa proprietà è del 1825. Il lettore curioso può provare a cimentarsi con questa sfida della storia!

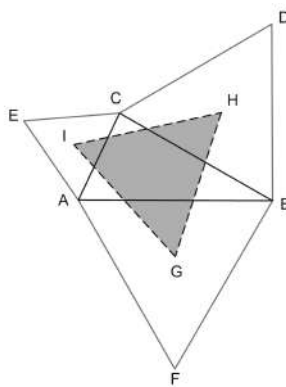


Figura 4: Rappresentazione del Teorema di Napoleone.

Qualche curiosità su Napoleone e la matematica

Ecco alcune curiosità su Napoleone e il suo rapporto con la matematica (e più in generale con la scienza):

- Napoleone aveva una sincera passione per la geometria e amava sorprendere i suoi generali con problemi matematici a bruciapelo.
- Durante la campagna d'Egitto portò con sé studiosi e scienziati, fondando l'Institut d'Égypte e incoraggiando ricerche scientifiche.
- Il suo interesse per la matematica contribuì alla diffusione della scienza nell'istruzione militare e civile in Francia.
- In molte scuole francesi dell'Ottocento la geometria divenne materia centrale proprio per l'impronta culturale lasciata da Napoleone.

3 I numeri primi di Sophie Germain

Marie-Sophie Germain (1776–1831) nacque a Parigi in una famiglia borghese. Fin da giovane mostrò una passione irresistibile per la matematica, coltivata, però, di nascosto: i genitori, temendo che fosse una “mania impropria” per una ragazza, la scoraggiavano. Si racconta che Sophie studiasse di notte, alla luce di una candela, avvolta in coperte per non farsi scoprire.

Poiché le donne non erano ammesse all'École Polytechnique, si iscrisse con lo pseudonimo *M. LeBlanc*, nome di un ex studente maschio. In questo modo poté ottenere appunti e partecipare, almeno per corrispondenza, alla vita accademica. Con quello pseudonimo scrisse al grande matematico Lagrange, che inizialmente non sospettò nulla e poté interfacciarsi con lui. Quando scoprì la verità, ne riconobbe il talento e ne divenne sostenitore.

Sophie Germain è ricordata soprattutto per i suoi lavori in teoria dei numeri e sull'elasticità delle superfici. In particolare, introdusse una nuova categoria di numeri primi: i *numeri primi di Sophie Germain*.

Numeri primi di Sophie Germain

Un numero primo di Sophie Germain è un numero primo p tale che anche $2p + 1$ sia primo, ovvero:

$$p \text{ primo} \quad \text{e} \quad 2p + 1 \text{ primo.}$$



Figura 5: Sophie Germain (1776-1831), pioniera della matematica e della scienza.

Ad esempio, 3 è un numero primo di Sophie Germain perché $2 \cdot 3 + 1 = 7$ è anch'esso primo. Altri esempi sono 5 (perché $2 \cdot 5 + 1 = 11$) e 11 (perché $2 \cdot 11 + 1 = 23$).

Questi numeri furono fondamentali nei tentativi (allora incompiuti) di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat. Rimane però ancora un mistero riguardo a questi numeri, mistero che forse il lettore riuscirà a svelare:

Una domanda aperta

Esistono infiniti numeri primi di Sophie Germain?

Qualche curiosità su Sophie Germain

Ecco alcune curiosità su Sophie Germain e i suoi contributi alla matematica:

- Sophie corrispose con Carl Friedrich Gauss (ritorna il Principe della matematica), che la definì "straordinaria" per la sua determinazione in un'epoca che ostacolava le donne nello studio.
- Durante l'assedio di Parigi del 1814, mentre la città tremava sotto le cannonate, continuava imperterrita i suoi studi di matematica.
- Nel 1816 vinse il premio dell'Accademia delle Scienze per un lavoro sull'elasticità delle superfici, diventando la prima donna a riceverlo.

- In vita fu poco riconosciuta, ma oggi molte scuole e università in tutto il mondo portano il suo nome.





Finito di stampare
dalle Edizioni Il Campano
nel mese di Ottobre 2025

