Algebra II
P.Gianni
Programma Preliminare AA 2014-2015

Anelli e ideali. Anelli e ideali. Anelli a ideali principali e a fattorizzazione unica. Operazioni su ideali di un anello commutativo unitario: somma, prodotto, intersezione, radicale. Ideali coprimi, ideale quoziente, annullatore. Ideali primi, massimali, irriducibili. Nilradicale e radicale di Jacobson. Estensioni e contrazioni di ideali. Prodotto e somma diretta di anelli. Teorema cinese del resto. Interpolazione di Lagrange. L'anello dei polinomi A[x] e i suoi ideali. Spec $\mathbb{Z}[x]$.

Polinomi in piu' variabili. Ordinamenti monomiali. Algoritmo di divisione per polinomi in $K[x_1, .., x_n]$. Monoideali. Frontiera di un monoideale. Lemma di Dickson. Ideali monomiali : caratterizzazione degli ideali monomiali irriducibili, radicali, primi e primari.

Basi di Gröbner. Algoritmo di Buchberger. Proprieta' di eliminazione dell'ordinamento lessicografico. Il risultante. Teoremi di estensione. Teorema degli zeri di Hilbert. Corrispondenza ideali varieta' affini. Ideali zero dimensionali e basi di Gröbner.

Moduli. Moduli su un anello commutativo unitario. Sottomoduli e quozienti. Omomorfismi di moduli. Somma diretta e prodotto diretto di moduli. Moduli liberi, rango. Moduli finitamente generati. Teorema di Hamilton-Cayley. Lemma di Nakayama . Moduli su PID e loro struttura: forma normale di Smith e di Hermite.

Successioni esatte. Successioni di A-moduli e di omomorfismi di A-moduli. I funtori Hom(-,N) e Hom(M,-). Successioni che spezzano. Moduli proiettivi. Prodotto tensoriale. Proprieta' del funtore T_N, moduli piatti. Estensione e restrizione di scalari.

Anelli locali e semilocali. Anello delle frazioni e localizzazione di anelli e moduli, ideali degli anelli localizzati, contrazione ed estensione, localizzazioni successive, commutativita' della localizzazione rispetto al passaggio al quoziente. Esattezza del funtore S^{-1}. $S^{-1}A$ e' un A-modulo piatto. Proprieta' locali.

Anelli e moduli noetheriani. Teorema della base di Hilbert. Ideali irriducibili e primari, decomposizione di un ideale come intersezione di ideali primari. Anelli e moduil artiniani. Dimensione di un anello.

Testi consigliati

- M. F. Atiyah, I.G. Macdonald, "Introduzione all'Algebra Commutativa", trad. di P. Maroscia, Feltrinelli, Milano, 1981.
- H. Matsumura, "Commutative Ring Theory", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- D.Eisenbud, "Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry", Graduate Texts in Math., Vol.150, Springer-Verlag, 1994
- M.Reid, "Undergraduate Commutative Algebra", LMS student series,-CUP1995
- D.Cox, J.Little, D.O'Shea, "Ideals, Varieties and Algorithms". Springer-Verlag, 1992.

Modalita' d'esame: L'esame consiste in una prova scritta e una prova orale.

0.1. **Programma del corso di "Algebre e gruppi di Lie", anno accademico 2014-2015.** L'obiettivo del corso è quello di introdurre e studiare alcune proprietà dei gruppi di lacci e dei gruppi di Kac-Moody affini. A seconda delle conoscenze degli studenti il gruppo trattera' il caso generale o quello di $GL(n)$. Nella prima parte del corso verranno richiamati alcuni risultati sul caso finito dimensionale: varietà delle bandiere, costruzione delle rappresentazioni irriducibili, teoria dei monomi standard per la varieta' delle bandiere, fibre di Springer. Verranno quindi introdotti e studiati gli analoghi oggetti per i gruppi di Lacci.

PROGRAMMA DI "ALGORITMI E STRUTTURE DEI DATI" AA039

A.A. 2014/2015

Prof. Roberto Grossi

http://tinyurl.com/asdmatpi

Problemi computazionali. Indecibilità di problemi computazionali - Trattabilità di problemi computazionali (rappresentazione e dimensione dei dati, algoritmi polinomiali ed esponenziali) - Problemi NP-completi - Modello RAM e complessità computazionale.

Sequenze: array. Sequenze lineari: modalità di accesso e allocazione della memoria, array di dimensione variabile - Opus: scheduling della CPU (ordinamento per selezione e per inserimento) - Complessità di problemi computazionali (limiti superiori e inferiori) - Ricerca di una chiave (ricerca binaria) - Ricorsione e paradigma del divide et impera (moltiplicazione veloce di numeri, ordinamento per fusione, ordinamento e selezione per distribuzione) - Alternativa al teorema fondamentale delle ricorrenze - Opus: array a più dimensioni e matrici nella grafica (moltiplicazione veloce, sequenza ottima di moltiplicazioni) - Paradigma della programmazione dinamica (sottosequenza comune più lunga, partizione di un insieme di interi, problema della bisaccia, pseudo-polinomialità).

Sequenze: liste. Liste (ricerca, inserimento e cancellazione, liste doppie e liste circolari) - Opus: problema dei matrimoni stabili - Liste randomizzate. - Liste ad auto-organizzazione -

Tecniche di analisi ammortizzata.

Alberi. Alberi binari (algoritmi ricorsivi, inserimento e cancellazione) - Opus: minimo antenato comune - Visita per ampiezza: rappresentazione implicita e succinta (rank, select, limite inferiore sullo spazio) - Alberi cardinali, alberi ordinali e parentesi bilanciate.

Dizionari. Liste doppie - Tabelle hash - Alberi binari di ricerca (AVL) - Opus: trie, ricerca testuale e ordinamento di suffissi.

Grafi. Grafi (alcuni problemi, rappresentazione, cammini minimi e chiusura transitiva mediante moltiplicazione di matrici) - Opus: colorazione di grafi (assegnazione delle lunghezze d'onda e grafi a intervalli).

Pile e code. Pile (implementazione mediante array e mediante riferimenti) - Code (implementazione mediante array e mediante riferimenti) - Opus: visite di grafi (ampiezza, profondità) - Grafi diretti aciclici e ordinamento topologico.

Code con priorità. Code con priorità (heap e ordinamento heapsort).

NP-completezza. Definizione delle classi P, NP, NPC - Riduzioni polinomiali. Algoritmi di approssimazione.

PROGRAMMA DI __Analisi Armonica___
Docente __Vladimir Georgiev_Nicola Visciglia
Anno Accademico __2014/15____
Laurea _Matematica__ Anno di Corso __III-V____ Semestre __II___
Numero crediti ____6______
Sito del corso:

http://www.dm.unipi.it/~georgiev/didattica/annoattuale/14_15_AnalisiArmonica.htm

Piataforma moogle E-learning: https://www.dm.unipi.it/elearning/

CONTENUTI INSEGNAMENTO

1. Richiami sulla trasformata di Fourier e le sue proprietà.
2. Teoria di interpolazione. Teorema di Riesz-Torin e applicazioni. Moltiplicatori. Operatori di tipo debole. Teorema di Marcinkiewicz. Disugualianze di Young e di Hardy-Littlewood-Sobolev.
3. Decomposizione di Littlewood-Paley, disequazione di Bernstein.
4. Operatori integrali. Nuclei singolari. Teoria di Calderon-Zygmund. Il caso di codominio spazio di Banach. Spazi di Sobolev come caso particolare di spazi di Lizorkin o di Besov.
5. Trasformata di Hilbert. La stima L^p.
6. Molteplicatori in L^p. Teorema di Michlin – Hörmander.
7. Il teorema di Coifman – Meyer e operatori bilineari.
8. La stima di Kato – Ponce.
9. Funzione massimale di Hardy-Littlewood. Applicazione: Teorema di derivazione di Lebesgues.
10. Applicazioni alle EDP: esistenza locale per le equazioni di KdV e Benjamin – Ono.

TESTI DI RIFERIMENTO

1. E. Lieb, M. Loss. Analysis. 2nd edition. American Math. Soc., 2001.
2. L. Grafakos L. Modern Fourier Analysis, Second edition, Springer. 2009.
3. L. Grafakos , S. Oh (2014). The Kato - Ponce inequality, Comm. PDE.,Volume 39, Issue 6, p. 1128-1157
4. E. Stein, Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. With the assistance of Timothy S. Murphy. Princeton Mathematical Series, 43. Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

PREREQUISITI

Analisi Matematica 1, Analisi in piu' variabili 1 e Analisi in piu' variabili 2 .

Corso: Analisi in pi\`u Variabili 2
Docente: Luigi Carlo Berselli

Programma del corso:

Spazi L^p: Disuguaglianze di Jensen, H\"older e di Minkowski. Completezza. Prodotto di convoluzione. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in L^p.

Spazi di Hilbert: basi, sistemi ortonormali completi Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini di una base. Esistenza della proiezione su un sottospazio chiuso e Teorema di Riesz. Cenni agli spazi di Hilbert sul campo complesso.

Serie di Fourier ed applicazioni: Le funzioni esponenziali formano una base di Hilbert di $L^2(-\pi,\pi)$. Convergenza della serie di Fourier in L^2. Serie in seni e coseni (serie di Fourier reale). Convergenza uniforme per le funzioni regolari. Regolarit\`a della funzione e comportamento asintotico dei coefficienti. Derivazione dell'equazione del calore e delle onde. Soluzione dell'equazione del calore e delle onde tramite serie di Fourier. Basi ortonormali e autovettori di operatori autoaggiunti.

Trasformata di Fourier e applicazioni. Trasformata di Fourier per funzioni in L^1. Propriet\`a elementari della trasformata di Fourier. Formula di inversione e teorema di Plancherel. Trasformata di Fourier per funzioni in L^2. Applicazioni della Trasformata di Fourier.

Funzioni armoniche: Soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di propriet\`a della media. Principio del massimo e unicit\`a della soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo assegnato. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite serie di Fourier.

Cenni all'integrazione su superfici. Superfici senza bordo di dimensione d e classe $C^ k$ in R^n. Teorema di Stokes. Forme chiuse e forme esatte. Casi particolari del teorema di Stokes: il teorema di Gauss-Green e il teorema della divergenza.

Testi di riferimento. Il corso non segue alcun testo preciso, ma i contenuti (nonostante la presentazione proposta a lezione potr\`a differire) si trovano per esempio in

[1] W. Rudin: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill 1974 (traduzione italiana: Analisi reale e complessa, Boringhieri, 1974).

[2] W.H. Fleming: Functions of several variables. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1977.

[3] R. Courant e F. John: Introduction to Calculus and Analysis. Volume 2. Interscience Publishers, John Wiley Sons, 1974.

Corsi A.A. 2014-2015
PROGRAMMA del CORSO
di ANALISI Matematica 2 , Laurea in Matematica
12 cfu, 120 ore
Vladimir Georgiev (90 ore) e Nicola Visciglia (30 ore)
Sito del corso:
http://www.dm.unipi.it/~georgiev/didattica/annoattuale/14_15_AnalisiMat2.htm

Piataforma moogle E-learning: https://www.dm.unipi.it/elearning/

Programma di base:

1) Richiami sulla topologia sulla retta reale e in R^n. Norma (euclidea) in R^n. Richiami su spazi di Banach. Definizione di spazi metrici (completi). Esempi: $\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, $\mathrm{C}(\mathrm{R})$, $C^k(R)$, $C^\infty(R)$. Insiemi aperti ed insiemi chiusi . Insiemi limitati. Punti di accumulazione. Punti interni, esterni e della chiusura. Insiemi compatti. Teorema di Bolzano – Weierstrass in R^n. Teorema di Heine – Borel in R^n. Insiemi connessi. Riferimento: [Cecconi, Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986]
2) Limiti e continuità' delle funzioni di più variabili. Controimagini degli insiemi aperti e chiusi con funzioni continue. Immagine di un connesso, di un compatto, teorema di Weierstrass (la funzione continua in un compatto ammette massimo e minimo). Equivalenza delle norme in R^n.
3) Continuitá e differenziabilitá di una funzione di piu variabili, derivate parziali, gradiente, rotore e derivata direzionale. Simboli di Landau o ed O in R^n. Funzioni omogenei e teorema di Eulero.
4) Derivate delle funzioni di piu variabili. Formula di Taylor. Massimi e minimi locali. Massimi e minimi vincolati.
5) Contrazioni. Teorema di Cauchy di esistenza e unicitá per sistemi di equazioni ordinari. Prolungamento delle soluzioni. Primi integrali. Sistemi lineari omogenei.(matrice Wronskiana). Sistemi lineari nonomogenei. Punti stazionari per un sistema autonoma. Classificazione di punti stazionari per sistemi (2 x 2). Idea della stabilitá delle soluzioni. Riferimento: [Cecconi, Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986] e [P.Acquistapace, Lezioni di Analisi Matematica 2, http://www.dm.unipi.it/~acquistp/]
6) Somme di Riemann e integrale doppio di Riemann su domini normali, formula di riduzione. Integrali tripli, formula di riduzione. Cambiamento di variabili in integrali doppi e tripli. Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]
7) Integrali curvilinei (del I e del II tipo). Forme differenziali lineari. Superfici e integrali di superfici (del I e del II tipo). Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]
8) Teoremi di Gauss – Green e di Stokes. Forme differenziali. Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]
9) Integrale di Lebesgue (in R^n). Misura degli aperti e dei compatti. Subaditivitá finita sugli aperti. Superaditività sui compatti. Misura esterna e misura interna. Insiemi misurabili limitati. Aditivitá numerabile sugli insiemi misurabili. Funzioni misurabili. L'integrale di Lebesgue. I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Confronto con l'integrale di Riemann. Teorema di Fubini. Riferimenti: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.], [E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis]

10) Spazi $l^2, l^p, L^p(R)$. Riferimenti: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996], [E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis]

Punti aggiuntivi:

11) Teoremi di Ascoli – Arzelá in $C[a,b]$. Teorema di Stone-Weierstrass (approssimazione con polinomi). Idea della convoluzione. Riferimento: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]

12) Serie di Fourier. Identitá di Parseval e teoremi di convergenza.

13) Teorema di Peano.

14) Il teorema della funzione inversa, il teorema della funzione implicita, il teorema del rango.

15) Funzione analitiche e formula di Cauchy. Calcolo di integrali impropri usando la formula di Cauchy.

Testi consigliati:

Per lezioni:

- **J.P.Cecconi, G.Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986**
- **E.Guisti, Analisi Matematica 2, Bollati Boringhieri, 1989.**
- **N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996**
- **P.Acquistapace, Lezioni di Analisi Matematica 2, http://www.dm.unipi.it/~acquistp/]**

Per approfondire alcuni temi si possono usare anche:

- **W.Rudin, Principi di Analisi Matematica, McGraw Hill Libri Italia SRL, 1991.**
- **M. Giaquinta, G. Modica, Mathematical Analysis *An Introduction to Functions of Several Variables* Birkhäuser, 2009.**
- **A. W. Knapp, Basic Real Analysis, Along with a companion volume Advanced Real Analysis, Birkhäuser,2005**
- **E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis:, Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, Princeton Univ. Press, 2005**

Libri per esercitazioni:

- **E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume secondo, Bollati Boringhieri, 1994.**
- **J.P.Cecconi, L.C.Piccinini, G.Stampacchia, Esercizi e problemi di Analisi Matematica, 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986**

Per problemi con difficolta' piu'elevata:

- **E. Acerbi; L. Modica; S. Spagnolo, Problemi scelti di analisi matematica II, Liguori Editore 1986.**
- **G.Polya, G. Szegö, Problems and Theorems in Analysis II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry (Classics in Mathematics), Springer, 2004.**
- **Paulo Ney de Souza, Jorge-Nuno Silva, Berkeley Problems in Mathematics, Third Edition, Springer, 2004**

Corsi A.A. 2014-2015
PROGRAMMA del CORSO
di ANALISI Matematica 2 , Laurea in Matematica
12 cfu, 120 ore
Vladimir Georgiev (90 ore) e Nicola Visciglia (30 ore)
Sito del corso:
http://www.dm.unipi.it/~georgiev/didattica/annoattuale/14_15_AnalisiMat2.htm

Piataforma moogle E-learning: https://www.dm.unipi.it/elearning/

Programma di base:

1) Richiami sulla topologia sulla retta reale e in R^n. Norma (euclidea) in R^n. Richiami su spazi di Banach. Definizione di spazi metrici (completi). Esempi: $\mathrm{C}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $\mathrm{C}(\mathrm{R})$, $C^k(R)$, $C^\infty(R)$. Insiemi aperti ed insiemi chiusi . Insiemi limitati. Punti di accumulazione. Punti interni, esterni e della chiusura. Insiemi compatti. Teorema di Bolzano – Weierstrass in R^n. Teorema di Heine – Borel in R^n. Insiemi connessi. Riferimento: [Cecconi, Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986]
2) Limiti e continuità' delle funzioni di più variabili. Controimagini degli insiemi aperti e chiusi con funzioni continue. Immagine di un connesso, di un compatto, teorema di Weierstrass (la funzione continua in un compatto ammette massimo e minimo). Equivalenza delle norme in R^n.
3) Continuitá e differenziabilitá di una funzione di piu variabili, derivate parziali, gradiente, rotore e derivata direzionale. Simboli di Landau o ed O in R^n. Funzioni omogenei e teorema di Eulero.
4) Derivate delle funzioni di piu variabili. Formula di Taylor. Massimi e minimi locali. Massimi e minimi vincolati.
5) Contrazioni. Teorema di Cauchy di esistenza e unicitá per sistemi di equazioni ordinari. Prolungamento delle soluzioni. Primi integrali. Sistemi lineari omogenei.(matrice Wronskiana). Sistemi lineari nonomogenei. Punti stazionari per un sistema autonoma. Classificazione di punti stazionari per sistemi (2 x 2). Idea della stabilitá delle soluzioni. Riferimento: [Cecconi, Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986] e [P.Acquistapace, Lezioni di Analisi Matematica 2, http://www.dm.unipi.it/~acquistp/]
6) Somme di Riemann e integrale doppio di Riemann su domini normali, formula di riduzione. Integrali tripli, formula di riduzione. Cambiamento di variabili in integrali doppi e tripli. Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]
7) Integrali curvilinei (del I e del II tipo). Forme differenziali lineari. Superfici e integrali di superfici (del I e del II tipo). Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]
8) Teoremi di Gauss – Green e di Stokes. Forme differenziali. Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]
9) Integrale di Lebesgue (in R^n). Misura degli aperti e dei compatti. Subaditivitá finita sugli aperti. Superaditivitá sui compatti. Misura esterna e misura interna. Insiemi misurabili limitati. Aditivitá numerabile sugli insiemi misurabili. Funzioni misurabili. L'integrale di Lebesgue. I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Confronto con l'integrale di Riemann. Teorema di Fubini. Riferimenti: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.], [E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis]

10) Spazi $l^2, l^p, L^p(R)$. Riferimenti: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996], [E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis]

Punti aggiuntivi:

11) Teoremi di Ascoli – Arzelá in $C[a,b]$. Teorema di Stone-Weierstrass (approssimazione con polinomi). Idea della convoluzione. Riferimento: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]
12) Serie di Fourier. Identitá di Parseval e teoremi di convergenza.
13) Teorema di Peano.
14) Il teorema della funzione inversa, il teorema della funzione implicita, il teorema del rango.
15) Funzione analitiche e formula di Cauchy. Calcolo di integrali impropri usando la formula di Cauchy.

Testi consigliati:

Per lezioni:

- **J.P.Cecconi, G.Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986**
- **E.Guisti, Analisi Matematica 2, Bollati Boringhieri, 1989.**
- **N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996**
- **P.Acquistapace, Lezioni di Analisi Matematica 2, http://www.dm.unipi.it/~acquistp/]**

Per approfondire alcuni temi si possono usare anche:

- **W.Rudin, Principi di Analisi Matematica, McGraw Hill Libri Italia SRL, 1991.**
- **M. Giaquinta, G. Modica, Mathematical Analysis *An Introduction to Functions of Several Variables* Birkhäuser, 2009.**
- **A. W. Knapp, Basic Real Analysis, Along with a companion volume Advanced Real Analysis, Birkhäuser,2005**
- **E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis:, Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, Princeton Univ. Press, 2005**

Libri per esercitazioni:

- **E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume secondo, Bollati Boringhieri, 1994.**
- **J.P.Cecconi, L.C.Piccinini, G.Stampacchia, Esercizi e problemi di Analisi Matematica, 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986**

Per problemi con difficolta' piu'elevata:

- **E. Acerbi; L. Modica; S. Spagnolo, Problemi scelti di analisi matematica II, Liguori Editore 1986.**
- **G.Polya, G. Szegö, Problems and Theorems in Analysis II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry (Classics in Mathematics), Springer, 2004.**
- **Paulo Ney de Souza, Jorge-Nuno Silva, Berkeley Problems in Mathematics, Third Edition, Springer, 2004**

Programma del corso di Analisi Numerica con Laboratorio.
Docente: Dario A. Bini.
Anno Accademico: 2014-2015.
Laurea: Matematica; Anno di Corso: secondo; Semestre: primo.
Numero crediti: 9.

CONTENUTI INSEGNAMENTO:

1-Analisi dell'errore. Rappresentazione in base di numeri reali, rappresentazione floating point, overflow, underflow. Errore di rappresentazione, precisione di macchina. Aritmetica floating point. Errore inerente, errore algoritmico, errore totale. Coefficienti di amplificazione, errore nelle operazioni aritmetiche, cancellazione. Stabilita' numerica e ondizionamento. Errore analitico. Analisi in avanti e analisi all'indietro dell'errore.

2- Elementi di algebra lineare numerica. Localizzazione degli autovalori: primo e secondo teorema di Gerschgorin. Matrici a blocchi, matrici di permutazione. Irriducibilita' di una matrice e forte connessione del grafo associato. Terzo teorema di Gerschgorin. Forma normale di Schur di una matrice. Caso delle matrici hermitiane, e delle matrici normali. Norme di vettori su C^n: uniforme continuita'. Equivalenza delle norme su C^n. Norma 1,2 e infinito. Norme di matrici, norme di matrici indotte dalle norme vettoriali 1,2 e infinito. Norma di Frobenius. Norme indotte e raggio spettrale.

3- Risoluzione di sistemi lineari. Condizionamento numerico di sistemi di equazioni lineari. Principali fattorizzazioni di matrici, fattorizzazione LU e QR. Condizioni di esistenza e unicita' della fattorizzazione LU. Matrici elementari e loro proprieta'. Matrici elementari di Householder. Matrici elementari di Gauss. Fattorizzazioni mediante matrici elementari: metodo di Gauss e metodo di Householder, complessita' e stabilita' numerica. Strategia del pivot parziale e del pivot totale. Metodi iterativi per sistemi di equazioni lineari: matrice di iterazione, teoremi di convergenza, raggio spettrale e fattore asintotico di riduzione media dell'errore. Metodi iterativi di Jacobi e di Gauss Seidel, condizioni di convergenza, confronto fra i raggi spettrali delle matrici di iterazione nel caso tridiagonale.

4- Risoluzione di equazioni non lineari. Introduzione ai metodi per l'approssimazione di zeri di funzioni: il metodo di bisezione. Metodi di iterazione funzionale: teorema del punto fisso. Analisi della velocita di convergenza: convergenza lineare, sublineare e superlineare, ordine di convergenza. Analisi della convergenza in presenza di errori. Condizioni di arresto. Analisi dell' ordine di convergenza mediante derivate. Metodo di Newton: teorema di convergenza per zeri semplici, convergenza nel caso di zeri multipli. Metodo di Ruffini Horner per polinomi.

5- Interpolazione e integrazione. Il problema dell'interpolazione. Interpolazione polinomiale, matrici di Vandermonde, polinomio di Lagrange. Il resto dell'interpolazione polinomiale. Interpolazione alle radici n-esime dell'unita':

trasformata discreta di Fourier, trasformata discreta inversa. Proprieta di condizionamento. Gli algoritmi FFT in base 2. Applicazioni all'interpolazione trigonometrica. Applicazioni a problemi di algebra computazionale. Integrazione approssimata: formule di Newton-Cotes, formule composte.

Nel corso di esercitazioni vengono svolti esercizi relativi agli argomenti sviluppati a lezione.

Nel corso di laboratorio vengono introdotti elementi del linguaggio Octave e viene svolta l'implementazione degli algoritmi presentati a lezione.

TESTI DI RIFERIMENTO:

D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi, "Metodi numerici per l'algebra lineare",
Zanichelli, 1988.

R. Bevilacqua, D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi, Metodi Numerici, Zanichelli, 1992

Appunti del corso scaricabili dalla pagina web del docente

OBIETTIVI FORMATIVI:

Da una parte formare il pensiero algoritmico e costruttivo nella risoluzione di problemi sviluppando gli strumenti matematici per la realizzazione, analisi e implementazione di metodi di risoluzione; dall'altra approfondire i principali metodi di base dell'analisi numerica fornendo le competenze per l'innesto di strumenti computazionali piu' avanzati e moderni utilizzati nelle applicazioni e nel calcolo scientifico.

METODI DIDATTICI:

Lezioni frontali, esercitazioni, laboratorio computazionale.

ANALISI SUPERIORE (6 CFU)

A.A. 2013/2014

Docente: Luigi De Pascale

Spazi di Misure e spazi di Distribuzioni. Trasformata di Fourier delle distribuzioni.

Soluzioni fondamentali di operatori differenziali lineari a coefficienti costanti.

Funzioni assolutamente continue e BV di 1 variabile reale. Teoremi di Rademacher ed Aleksandrov.

Spazio BV, proprietà funzionali.

Richiami sugli spazi di Hilbert. Teorema Spettrale.

Testi di riferimento:

H.L.Royden, Real Analysis .

E.H.Lieb, **M.Loss**, Analysis.

N. Dunford, **J.T. Schwartz**, Linear Operatos, (Part II, Spectral Theory).

P.R.Halmos, Introduction to Hilbert Space.

V.S.Vladimirov, Le distribuzioni nella fisica matematica.

W.Rudin, Functional Analysis.

K.Yosida, Functional Analysis.

INSEGNAMENTO DI CALCOLO SCIENTIFICO

Docenti LUCA GEMIGNANI/DARIO ANDREA BINI
Anno Accademico 2013/2014
Laurea Matematica Anno di Corso III Semestre II
Numero crediti 6

1) Programma del Corso

a) Generalita` sul problema agli autovalori.
Condizionamento del problema agli autovalori.
Teorema di Bauer-Fike e condizionamento di un autovalore semplice.
Teoremi di localizzazione e stime a
posteriori sull'errore nel calcolo di autovalori.

b) Riduzione in forma tridiagonale (Hessenberg)
di matrici hermitiane (generali) con il metodo di Householder.
Metodo QR per il calcolo degli autovalori:
convergenza. Metodo QR per il calcolo degli autovalori:
complessita` computazionale, tecniche di shift e condizioni di arresto.
Calcolo degli autovettori: metodo delle potenze e delle potenze inverse.

c) Metodi divide et impera per il calcolo
di autovalori di matrici tridiagonali hermitiane.
Metodo di Newton per il calcolo di
autovalori di matrici tridiagonali hermitiane.
Successioni di Sturm. Calcolo del polinomio
caratteristico e della sua derivata per matrici tridiagonali
hermitiane e in forma di Hessenberg.

d) Approssimazione ai minimi quadrati.
Decomposizione ai valori singolari (SVD).
Proprieta` della SVD e
inverse generalizzate.
Calcolo della SVD: riduzione in forma
bidiagonale e calcolo della SVD per matrici bidiagonali.

e) Metodi iterativi per matrici strutturate.
Metodo del gradiente ottimo e del gradiente
coniugato. Analisi della convergenza del metodo
del gradiente coniugato. Introduzione ai metodi di precondizionamento.
Applicazioni alla risoluzione numerica di problemi per equazioni
differenziali.

f) Applicazione dei metodi alla risoluzione di
alcuni problemi del mondo reale tra cui: problemi del Web quali
determinazione del PageRank e information
retrieval, studio delle vibrazioni di sistemi elastici discreti,
studio delle configurazioni di equilibrio di sistemi discreti, discretizzazione
di
alcuni problemi di vibrazione e di equilibrio nel caso continuo,
modelli matematici di sfocatura e di restauro di immagini digitali, metodi di
compressione di immagini.

2) Riferimenti Bibliografici

a) J. W. Demmel, Applied numerical linear algebra, SIAM,
Philadelphia, PA, 1997.

b) Bini, D., Capovani, M., Menchi, O.,
Metodi numerici per l'algebra lineare, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1988.

3) Obiettivi Formativi

Apprendimento delle tecniche e degli strumenti per la risoluzione numerica di problemi discreti tipicamente di algebra lineare che scaturiscono nelle applicazioni della matematica. Nel corso di esercitazioni l'enfasi e` posta sulle problematiche che scaturiscono dall'implementazione degli algoritmi e dalla validazione dei risultati.

4) Modalita` di Esame

Prova scritta da svolgersi con l'ausilio del calcolatore. Colloquio finale con modalita` di seminario o di esame orale.

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

A.A. 2014/2015 SECONDO SEMESTRE

CORSO DI DETERMINAZIONE ORBITALE

Docente: Dott. Giacomo Tommei

Il corso, dopo aver richiamato le basi della determinazione orbitale, si concentrerà sulle popolazioni di oggetti naturali, soprattutto asteroidi, con particolare riferimento al monitoraggio d'impatto di tali corpi con la Terra.

CONTENUTI DEL CORSO

1. POSIZIONE DEL PROBLEMA Il problema della determinazione orbitale, le sue componenti: dinamica, osservazioni, errori. Esempi principali: determinazione orbitale collaborativa e di popolazione.

2. BREVI RICHIAMI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE Flusso integrale, equazione alle variazioni, lemma di Gronwall, esponenti di Lyapounov.

3. MINIMI QUADRATI Minimi quadrati lineari. Caso quasi lineare, correzioni differenziali. Soluzione nominale, matrice di covarianza. Regione di confidenza, incertezze marginali e condizionali. Interpretazione probabilistica. Problema modello. Pesatura dei residui.

4. IL PROBLEMA DELL'IDENTIFICAZIONE Tipi di identificazione. Identificazione di orbite, caso lineare e nonlineare. Predizioni, metodo semilineare. Attribuzione. Linkage.

5. ORBITE PRELIMINARI Attribuili e curvatura. Metodi classici: metodo di Laplace e metodo di Gauss. Metodi di Laplace-Gauss e Gauss topocentrici. Teoria di Charlier.

6. ARCHI TROPPO CORTI Indeterminazione dell'orbita a due parametri. Regione ammissibile, suo campionamento. Metodi per il linkage: asteroidi virtuali. Metodo degli integrali primi.

7. SOLUZIONI DEBOLI Deficienze di rango e simmetrie. Linea delle variazioni (LOV), sua dipendenza dalle coordinate. Varietà delle variazioni (MOV).

8. MONITORAGGIO DEGLI IMPATTI Piano bersaglio. Ritorni risonanti e non risonanti. Metodi Montecarlo e dinamica delle varietà. Traccia della LOV sul piano bersaglio. Probabilità di impatto. Significato del rischio di impatto asteroidale. Utilizzo della MOV per il problema degli impatti imminenti.

TESTI DI RIFERIMENTO

A. Milani e G.F. Gronchi "Theory of Orbit Determination", Cambridge University Press, 2010.

OBIETTIVI FORMATIVI

Conoscenze di base di teoria dell'ottimizzazione (minimi quadrati lineari e nonlineari), di teoria del caos (in sistemi Hamiltoniani).
Presentazione di importanti applicazioni, quali la progettazione di sistemi per la scoperta di asteroidi e metodi per la predizione, in senso probabilistico, degli impatti tra corpi celesti.

PREREQUISITI

Calcolo differenziale e integrale (dai corsi del secondo anno). teoria delle equazioni differenziali ordinarie, come svolta nei corsi di Calcolo Differenziale e/o Sistemi Dinamici.

METODI DIDATTICI

Il corso, tenuto nel secondo semestre, comprende 42 ore di lezione, 4/6 ore per settimana (il ricevimento è su appuntamento).

MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

L'esame prevede una presentazione, preparata in precedenza, di una parte del programma o di una parte affine al programma in forma di seminario.

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

A.A. 2014/2015 SECONDO SEMESTRE

CORSO DI DINAMICA DEL SISTEMA SOLARE

Docente: Prof. Andrea MILANI COMPARETTI

CONTENUTI DEL CORSO

1. IL PROBLEMA DEGLI N CORPI Le equazioni di moto per i corpi del sistema solare, in particolare gli asteroidi. Formulazione Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana. Simmetrie ed integrali del moto. Sistemi di coordinate e adeguatezza del modello. (Circa 6 ore)

2. METODI PERTURBATIVI Variabili azione angolo del problema dei due corpi. Funzione perturbatrice. Soluzione analitica mediante le serie di Lie. Problema dei piccoli divisori. (Circa 8 ore)

3. ELEMENTI PROPRI ANALITICI Nozione di elementi propri. Rimozione dei termini a corto periodo, equazioni implicite e metodi iterativi. Risonanze come ostruzione alla soluzione dell'equazione omologica. Rimozione dei termini a lungo periodo, approssimazione lineare e metodi iterativi. Risonanze secolari. (Circa 8 ore)

4. ELEMENTI PROPRI SINTETICI Trasformate di Fourier discrete. Analisi di serie temporali. Filtraggio digitale. Risonanze come ostruzione al filtraggio digitale. Caso non risonante, determinazione delle frequenze proprie. Caso risonante, asteroidi Troiani, elementi propri sintetici per una librazione. (Circa 10 ore)

5. ELEMENTI PROPRI SEMIANALITICI Teorema della media di Arnold. Eliminazione di una variabile rapida. Metodi di integrazione. Caso non singolare. Caso con singolarità. Invariante adiabatico. Gli asteroidi Toro. (circa 6 ore)

6. FAMIGLIE DI ASTEROIDI Applicazioni degli elementi propri. Famiglie collisionali. Coppie molto vicine. (Circa 4 ore).

TESTI DI RIFERIMENTO

A. Milani e G.F. Gronchi "Theory of Orbit Determination", Cambridge University Press, 2010, Cap. 4.
Z. Knezevic e A. Milani "The Dynamics of an Asteroid", in preparazione (sarà distribuito in forma di dispense).

OBIETTIVI FORMATIVI

Conoscenze di base di Meccanica Analitica (formulazione lagrangiana e hamiltoniana, simmetrie e integrali primi, metodi perturbativi, soluzioni per serie formali, teorema della media), di Analisi delle serie temporali (trasformate di Fourier discrete, filtri digitali)
Conoscenze specifiche sulle soluzioni perturbative, numeriche e seminumeriche delle equazioni del tipo degli N corpi.
Applicazioni astrofisiche alla popolazione dei corpi minori del sistema solare e alla sua evoluzione collisionale.

PREREQUISITI

Calcolo differenziale e Integrale (dai corsi del secondo anno). Teoria delle equazioni differenziali ordinarie, come svolta nei corsi di Analisi in più variabili e Sistemi Dinamici. Formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano (come svolti in Meccanica Razionale o in Istituzioni di Fisca Matematica).

METODI DIDATTICI

Il corso di tipo specialistico comprende 42 ore di lezione.

MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

L'esame prevede una presentazione, preparata in precedenza, di una parte del programma in forma di seminario.

Corso di Laurea/Laurea Magistrale:

Nome del corso: Elementi di Analisi Complessa

Responsabile del Corso	Francesca Acquistapace
Altri docenti	
Numero CFU e tipologia	6 CFU
Obiettivo formativo generale del corso	Funzioni olomorfe di una o piu` variabili complesse. Struttura locale di insiemi analitici complessi.
Elenco degli argomenti trattati	Teorema di Riemann. Gruppo delle omografie, automorfismi del piano e del disco unitario. Prodotti infiniti, fattorizzazione di Weierstrass, teorema di Mittag Leffler. Funzioni analitiche di piu` variabili complesse, prime proprieta`. Applicazioni olomorfe, varieta` complesse. Singolarita` rimovibili. (p-q) forme differenziali, lemma di Dolbeault. Inviluppi di olomorfia. Anelli locali di funzioni olomorfe. Teorema di preparazione di Weierstrass, germi di insiemi analitici. Il Nullstellensatz e la descrizione di un germe di insieme analytico come rivestimento ramificato di un polidisco..
Testi consigliati	H. Cartan : Theorie elementaire d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann Paris Robert C. Gunning, Hugo Rossi: Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall, inc. London

Illustrazione di eventuali attività di laboratorio e/o esercitazioni	
Modalità di svolgimento delle prove d’esame	Prova orale.
Propedeuticità	Geometria 2, Analisi in piu` variabili 1, Algebra 1
Conoscenze richieste	Topologia elementare, gruppo fondamentale, convergenza di serie in piu` variabili, strutture algebriche (gruppi, corpi, anelli, ideali)

Corso di Laurea in MATEMATICA
Elementi di Analisi Complessa
A.A. 2014/15 Primo Semestre

Prof. Francesca Acquistapace

1. La topologia compatto-aperta.

– Topologia dello spazio delle funzioni continue.
– Convergenza di successioni di funzioni olomorfe.
– I compatti dello spazio delle funzioni olomorfe.

2. Trasformazioni conformi

– Lemma di Schwarz.
– Automorfismi del semipiano e del disco.
– Altri esempi.
– Automorfismi del piano complesso.
– Automorfismi della sfera, il gruppo delle omografie.
– Proprietà del gruppo delle omografie
– Il teorema di Riemann.
– Applicazioni.

3. Prodotti infiniti

– Prodotti infiniti.
– Fattorizzazione di Weierstrass.
– Teorema di Mittag Leffler.

3. Funzioni olomorfe di piú variabili complesse

– Definizione ed esempi.
– Condizioni di Cauchy Riemann e conseguenze.
– Prolungamento analitico.
– Integrale di Cauchy.
– Teorema di Hartogs.
– Principio del massimo.
– Teorema di estensione di Riemann. Zero set di una funzione olomorfa.
– Teorema delle funzioni implicite e teorema del rango nel caso olomorfo. Biolomorfismi.
– Sottovarieta‘ complesse di $\mathbf{C}^n$.
– Proprietà locali e proprietà globali.

4. Serie di potenze

– L’algebra delle serie convergenti.

– Il teorema di preparazione di Weierstrass.
– Il teorema di divisione
– Conseguenze: $\mathbf{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ è noeteriano e a fattorizzazione unica.
– Digressione sull'anello delle serie formali: teorema di divisione e di preparazione formale e conseguenze per il caso reale.
– Germi di insiemi analitici e ideali di germi.
– Componenti irriducibili di un germe di insieme analitico.
– Il Nullstellensatz per un ideale principale.
– Il Nullstellensatz per un ideale primo.
– Rivestimenti analitici
– Singolarità di un germe di insieme analitico.
– Dimensione di un germe analitico.

Testi consigliati:

H. Cartan : Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une où plusieurs variables complexes. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris 1961.

J.P. Gilman, I. Kra, R.E. Rodrıguez: Complex Analysis. Graduate Texts in Mathematics 245. Springer.

W. Rudin : Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987

R. Gunning, H. Rossi: Analytic functions of several complex variables. Prentice – Hall 1965.

J.M. Ruiz : The Basic Theory of Power Series. Quaderni del Dottorato.

Prerequisiti

Il Corso si pone come naturale continuazione del Corso di Geometria II. Altri prerequisiti sono nei programmi dei Corsi di Algebra di Analisi del primo biennio.

Esami

La prova d'esame consiste in un colloquio orale sul programma svolto o, in alternativa, di un seminario su un argomento collegato al Corso e concordato con il docente.

Corso: ELEMENTI DI GEOMETRIA ALGEBRICA
Docente: Rita Pardini
Anno Accademico: 2014-2015

Contenuti del corso (programma provvisorio):

-Richiami di algebra lineare e commutativa: Omogeneizzazione e disomogeneizzazione di polinomi. Teorema di Eulero. Estensioni intere e finite di anelli; normalizzazione di Noether.
Algebra multilineare: algebra tensoriale, algebra simmetrica e algebra esterna su uno spazio vettoriale di dimensione finita.
Grado di trascendenza di un'estensione di campi finitamente generata.

-Richiami sulle curve piane e ipersuperfici complesse. Cubiche piane: forma normale di Weierstrass, l'invariante J, configurazione dei flessi, legge di gruppo.

-Varieta' affini:
Topologia di Zariski sullo spazio affine. Spazi topologici noetheriani e decomposizione in irriducibili. Il Nullstellensatz di Hilbert.
Anello delle coordinate e applicazioni affini, morfismi e isomorfismi, varieta' affini. Nulstellensatz relativo. Spettro massimale e spettro primo di un anello.

-Varieta' proiettive:
Topologia di Zariski nello spazio proiettivo, Nullstellensatz omogeneo, chiusura proiettiva di una varieta' affine. Morfismi. Applicazione di Veronese.
Grassmanniane.

-Esempi di gruppi algebrici e azioni di gruppo: G_m, G_a, GL(n), PGL(n), la cubica piana liscia.

-Varieta' quasi-proiettive:
Gli aperti affini zono una base (proprieta' di compattezza).
Funzioni regolari e morfismi. Applicazione di Segre e prodotti.
L'immagine di una varieta' proiettiva tramite un morfismo e' chiusa.
Funzioni razionali e applicazioni razionali. Campo delle funzioni razionali e equivalenza birazionale.
Ogni varieta' irriducibile e' birazionale a un'ipersuperficie.
Dimensione e singolarita': Dimensione come grado di trascendenza del campo delle funzioni razionali.
Spazio tangente e singolarita' di una varieta' algebrica, i punti non singolari sono un aperto denso.
Dimensione di un sottoinsieme chiuso proprio, dimensione del prodotto.
Dimensione dell'intersezione con un'ipersuperficie (senza dimostrazione), definizione topologica di dimensione.
Il teorema sulla dimensione delle fibre di un morfismo (senza dimostrazione).
Applicazione: il numero di rette sulla superficie generale di grado d in P^3.

Riferimenti bibliografici:

1) E. Fortuna, R. Frigerio, R. Pardini, Geometria proiettiva, Problemi risolti e richiami di teoria, UNITEXT Springer (2011).

2) M. Atiyah, I. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley (1969).

3) M. Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, Cambridge University Press (1988).

4) I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 1, (Second edition), Springer (1994).

5) K. Smith, et al., An invitation to algebraic geometry. Universitext. Springer (2000).

6) R. Hartshorne, Algebraic Geometry, G.T.M. 52 Springer (1977).

Argomenti propedeutici: si utilizzeranno nel corso nozioni di base di topologia, di algebra e di geometria proiettiva, tutte comprese nei programmi di Geometria 2 e Algebra 2. E' quindi auspicabile che gli studenti abbiano seguito già' questi due corsi.

Modalita' d'esame: esame orale.

Programma di: **Elementi di Meccanica Celeste**
Docente: **Anna M. Nobili**
Anno Accademico: 2014-2015
Laurea Matematica (Triennale) **Anno di Corso** Terzo **Semestre** Primo
Numero crediti : 6 (48 ore)

Nota: Se ritenuto utile dagli studenti il corso può essere tenuto in tutto o in parte in lingua Inglese

Contenuti dell' Insegnamento

Il Corso si articola nei seguenti 5 argomenti principali tra loro collegati:

1. Problema dei 2-corpi ed Equazione di Keplero. Soluzione del problema dei 2-corpi con l'uso del vettore di Lenz. Orbite ed elementi orbitali. Equazione di Keplero, legge oraria e soluzione numerica..

2. Problema dei 2-corpi in caso di violazione del Principio di Equivalenza. Soluzione, confronto con il caso classico e rilevanza per esperimenti spaziali con corpi celesti e/o artificiali

3. Problema dei 3 corpi ristretto circolare. Equazioni del moto, integrale di Jacobi, criterio di stabilità di Hill. Esempi di moti ordinati e moti caotici (anche in assenza di instabilità macroscopiche). Accenni al problema ristretto ellittico

4. Moti della Terra come corpo esteso. Si scrivono e si risolvono le equazioni che descrivono il moto dei poli della Terra (precessione libera, precessione lunisolare e loro effetti astronomici).

5. Potenziale mareale ed effetti della marea. Si ricava il potenziale che genera le maree. Si discutono gli effetti della marea sul moto della Terra, della Luna e di altri corpi del Sistema Solare

Testi di Riferimento: Gli studenti possono disporre delle note del docente recentemente riscritte in Latex e trasformate in PDF a cura dello studente Daniele Serra (in Italiano). Sono anche invitati a fare riferimento ad alcune parti specifiche e ben segnalate di 3 testi ("Orbital motion", di Archie E. Roy, Ed. Adam Hilger; "Introduction a la mecanique celeste", di Jean Kovalevsky, Ed. (Librairie Armand Colin, Paris; "Non gravitational perturbations and satellite geodesy", di A. Milani, A.M. Nobili e P. Farinella, Ed. Adam Hilger). **Tutto il materiale viene reso disponibile in rete in formato PDF.**

Obiettivi Formativi: Elementi di base della meccanica celeste e loro applicazione quantitativa al moto dei corpi celesti e dei satelliti artificiali, ai moti dell'asse di rotazione della terra, agli effetti delle maree sulla terra e nel sistema solare.

Prerequisiti: Fisica 1 e Analisi 1

Metodi Didattici: Il corso prevede lezioni frontali alla lavagna e col computer e interazione diretta con gli studenti per discussioni specifiche su loro richiesta. Gli studenti sono sollecitati ad affrontare, se vogliono, problemi specifici con l'aiuto del computer e di software di cui viene garantita la disponibilità. In questo caso il lavoro viene valutato come parte dell'esame finale.

Modalità di Verifica dell'Apprendimento: Durante le lezioni gli studenti vengono sollecitati con domande sull'argomento trattato per capire se sono in condizione di seguire. L'esame finale è solo orale ma di lunga durata. Lo studente può scegliere di iniziare l'esame discutendo un argomento a scelta, sul quale, sotto la guida del docente, ha preparato una breve presentazione. Si può trattare dell'approfondimento di un argomento trattato a lezione oppure della presentazione di uno a questi collegato che abbia suscitato il suo interesse. Lo scopo è di mettere lo studente a proprio agio partendo da un argomento che ha ben preparato, e anche di abituarlo ad acquisire una propria autonomia nell'affrontare e presentare un argomento scientifico ben delimitato. La docente si riserva di valutare ogni singola richiesta per evitare che questa attività vada a discapito del programma di base del corso.

Orario delle lezioni (salvo possibili aggiustamenti con gli studenti interessati) e ricevimento studenti

Lunedì ore 16-18 Aula M1
Mercoledì ore 16-18 Aula M1

RICEVIMENTO STUDENTI: Le due ore di lezione iniziano puntuali (senza quarto d'ora accademico). Nell'ultima mezz'ora la docente resta nell'aula assegnata al corso a disposizione degli studenti; nella successiva mezz'ora continua il ricevimento degli studenti nel proprio studio.

Insegnamenti tenuti da PRATELLI Maurizio

052AA-ELEMENTI DI PROBABILITA' E STATISTICA

Programma d'esame:

Definizione di spazio di Probabilità. Variabili aleatorie definite su uno spazio numerabile: valori attesi, momenti, funzioni generatrici.

Inferenza statistica su spazi di Probabilità numerabili.

Spazi di Probabilità più generali, in particolare probabilità definite da una densità rispetto alla misura di Lebesgue.

Inferenza statistica generale, in particolare sui modelli Gaussiani. I principali test statistici, modelli di regressione.

110AA-FINANZA MATEMATICA

Programma d'esame:

Modelli di mercato a tempi discreti: assenza di arbitraggio e I e II teorema fondamentale dell'asset pricing.

Il modello di Samuelson-Black-Scholes e le formule di B.S. Alcune generalizzazioni (modelli a volatilità stocastica).

Il principio del Cambio di numerario e sue applicazioni.

Modelli per la Struttura a Termine dei tassi d'interesse: modelli basati sul tasso a breve e sul tasso forward. Modelli per i tassi LIBOR (la formula “Black-76”).

Programma del corso di **FINANZA MATEMATICA (110AA)**

Docente: **Maurizio Pratelli**

Anno accademico 2014-15 semestre II
Laurea Magistrale
Numero crediti: 6

Introduzione al corso:

Il nome di questo corso dovrebbe in realtà essere “Metodi Stocastici per la Finanza”. Vengono introdotti i primi rudimenti di microeconomia, prodotti derivati e loro valutazione, ma il corso si concentra sui modelli matematici che sono stati elaborati per trattare questi problemi.

Contenuti insegnamento:

Modelli di mercato a tempi discreti: assenza di arbitraggio e I e II teorema fondamentale dell'*asset pricing*.

Il modello di Samuelson-Black-Scholes e le formule di B.S. Alcune generalizzazioni (modelli a volatilità stocastica).

Il principio del Cambio di numerario e sue applicazioni.

Modelli per la Struttura a Termine dei tassi d'interesse: modelli basati sul tasso a breve e sul tasso *forward.* Modelli per i tassi LIBOR (la formula “Black-76”).

Misure di Rischio coerenti e convesse e loro caratterizzazione.

Obiettivi formativi:

Fornire una rapida introduzione alla moderna Finanza Matematica, anche in vista di possibili future applicazioni professionali.

Prerequisiti:

Il biennio di analisi ed il corso “Probabilità”. Aver frequentato il corso di “Istituzioni di Probabilità” è utile ma non indispensabile: durante il corso infatti viene sistematicamente utilizzato l'integrale stocastico secondo Ito, che è presentato rapidamente senza dimostrazioni complete.

Alcune nozioni di Analisi Funzionale, necessarie nell'ultima parte del corso, vengono concisamente richiamate.

Testi di riferimento:

Non viene seguito direttamente alcun libro di testo, tuttavia si può fare riferimento ai due seguenti:

Bjoerk T. “Arbitrage pricing theory”.

Lamberton D. Lapeyre B. “Introduction to Stochastic Calculus applied to Finance”.

Modalità didattiche:

Lezioni frontali (per 4 ore settimanali).

Corso di laurea in Matematica

Anno accademico 2014/2015, primo semestre

Corso di Sistemi Dinamici

Docenti: Prof. Andrea MILANI COMPARETTI, Dr. Giacomo Tommei

CONTENUTI DEL CORSO

[1] **Introduzione:** Sistemi dinamici continui e discreti, lineari e nonlineari, conservativi, integrabili: definizioni ed esempi semplici.

[2] **Sistemi dinamici lineari:** richiami di algebra lineare, esponenziale di matrici, prodotto di serie, autovalori reali e complessi, nilpotenti, risonanza.

[3] **Teoria qualitativa:** Richiami sulle soluzioni dei problemi alle condizioni iniziali. Stabilità, instabilità, sorgenti e pozzi, esponenti e funzioni di Lyapounov, sistemi Newtoniani conservativi e con dissipazione, sistemi gradiente, selle, insiemi limite, orbite periodiche, teorema di Poincaré-Bendixon.

[4] **Sistemi discreti e discretizzazione:** equazioni alle differenze finite lineari, esempi di applicazioni all'economia matematica, metodo di Eulero, errore di troncamento e convergenza, discretizzazione conservativa, mappa standard.

[5] **Sistemi Hamiltoniani a un grado di libertà:** teorema di Liouville, integrabilità e legge oraria, studio qualitativo, trasformata di Legendre, sistemi lagrangiani, moti vincolati, trasformazioni canoniche, variabili azione-angolo.

[6] **Caos:** regioni caotiche per la mappa standard, teorema delle separatrici, punti omoclinici, insiemi iperbolici, ferro di cavallo di Smale, regioni ordinate, esponenti di Lyapounov, definizione di caos.

TESTI DI RIFERIMENTO

A. Milani, *Introduzione ai sistemi dinamici*, Seconda edizione riveduta e corretta, Edizioni Plus, Pisa, 2009; 256 pagine + CD-ROM, prezzo 18 euro. Contiene più di 80 esercizi (lo svolgimento degli esercizi e i programmi per alcuni esperimenti numerici sono disponibili sul CD-ROM venduto con il libro).

OBIETTIVI FORMATIVI

Conoscenze di base sull'algebra delle matrici e sui sistemi dinamici lineari, sui concetti di stabilità, equilibrio, integrale primo, sulle equazioni alle differenze finite.

Conoscenze specifiche sulla teoria qualitativa, sopratutto nel piano, sui sistemi conservativi con i formalismi newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano, sulla discretizzazione di equazioni differenziali ordinarie, sui sistemi dinamici non integrabili e caotici.

Esempi formativi di applicazioni a sistemi meccanici, economici, a problemi modello.

Geometria Algebrica B (14/15)

- Fasci e prefasci su spazi topologici. Coomologia a valori in un fascio o un prefascio. Successioni esatte di fasci e prefasci e successioni esatte in coomologia. Paragoni tra teorie coomologiche.
- Funzioni olomorfe di piu' variabili complesse. Risultati locali: principio di identita', massimo modulo, teoremi di etensione di Hartogs e Riemann. Teoremi di preparazione e divisione di Weierstrass. Proprieta; algebriche della spiga del fascio dei germi di funzioni olomorfe.
- Varieta' complesse. Funzioni olomorfe su varieta' complesse e il fascio dei loro germi. Sottovarieta' analitiche e sottovarieta' complesse.
- Spazi tangenti a varieta' complesse. Orientabilita' e orientazione naturale delle varieta' complesse. Teoremi della funzione implicita e della funzione inversa olomorfi. Sottovarieta' analitiche irriducibili.
- Funzioni meromorfe. Divisori. Fibrati vettoriali complessi, fibrati olomorfi, line bundles e loro relazione con i divisori. Teorema di Bertini. Mapa esponenziale e classe di Chern.
- Forme differenziali e olomorfe su varieta' complesse. Coomologia di Dolbeault. Teorema "de bar"-Poincare' e corollari.
- Metriche Hermitiane su varieta' complesse. Teoria di Hodge. Varieta' di Kahler.
- Teoria di Hodge per fibrati olomorfi. Teoremi di annullamento e di immersione di Kodaira.

Geometria e topologia delle superfici
(Benedetti - LM secondo semestre)

Dopo avere ottenuto una classificazione topologica delle superfici (di tipo finito) considereremo diverse strutture geometriche su una superficie data (metriche riemanniane a curvatura costante, strutture di superficie di Riemann, strutture proiettive complesse, laminazioni o foliazioni misurate ...) e i rispettivi spazi di parametri. Il quadro unificante in cui queste strutture si manifesteranno sara' quello della gravita' in 3 dimensioni, in particolare lo studio degli spazio tempo 2+1 a curvatura costante.

Testi di riferimento per il corso:

Il libro: R. Benedetti - C. Petronio, Lectures on hyperbolic geometry Universitext. Springer-Verlag, Berlin, (1992)

La monografia: R. Benedetti - F. Bonsante) Canonical Wick Rotations in 3-Dimensional Gravity ,
Memoirs of the A.M.S. 198 (2009), 1-165.

integrata dal testo: R. Benedetti - F. Bonsante) (2+1) Einstein spacetimes of finite type ,
Chapter in: A. Papadopoulos Ed. Handbook of Teichmuller Theory, Vol II. vol. 13, European Mathematical Society (2009), 533-609 .

Versioni di questi testi sono reperibili in

http://www.dm.unipi.it/~benedett/research.html

Altre indicazioni bibliografiche saranno fornite durante lo svolgimento del corso.

===========================

Programma Provvisorio
Geometria e Topologia Differenziale

Anno Accademico 2014-2015

Roberto Frigerio e Bruno Martelli

Curve nello spazio

1. Curve nello spazio Euclideo tridimensionale. Curve regolari.
2. Parametrizzazione tramite lunghezza d'arco, curvatura e torsione.
3. Riferimento e formule di Frenet.
4. Teorema Fondamentale della teoria locale delle curve.

Varietà: prime nozioni

1. Varietà differenziabili (immerse nello spazio Euclideo). Funzioni lisce, spazio tangente e differenziale. Punti critici e regolari.
2. Parametrizzazioni locali ed espressione come luogo di zeri. Ogni varietà è localmente un grafico.
3. Orientazione e orientabilità.

Teoria metrica delle superfici

1. Superfici nello spazio Euclideo tridimensionale. La prima forma fondamentale.
2. La mappa di Gauss, l'operatore forma, la seconda forma fondamentale.
3. Curvature principali, curvatura media e curvatura di Gauss.
4. Il Teorema Egregium di Gauss.
5. Geodetiche: definizione e loro proprietà. Curvatura geodetica.
6. Caratteristica di Eulero e Teorema di Gauss-Bonnet.

Elementi di Topologia Differenziale

1. Teoremi di Sard e di Brower.
2. Varietà con bordo.
3. Il bordo di una varietà compatta non ne è un retratto liscio. Teorema del punto fisso di Brower.
4. Omotopia e isotopia.
5. Grado modulo 2 di mappe tra varietà compatte e grado intero di mappe tra varietà compatte orientabili.
6. Campi vettoriali. Indice di uno zero di un campo vettoriale. (Non) pettinabilità delle sfere. Teorema di Poincaré-Hopf.

Modalità d'esame

Vi sarà uno scritto sulle prime tre parti del programma, seguito da un orale sull'ultima parte del programma.

GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE
A.A. 2013-2014
docente: Paolo Lisca

PROGRAMMA SVOLTO

CURVE E SUPERFICI

Curve regolari, parametrizzazione tramite lunghezza d'arco. Riferimento e formule di Frenet. Una curva p.l.a. con curvatura positiva è piana se e solo se ha torsione nulla.

Definizione di superficie. Ogni superficie è localmente un grafico. Definizione del piano tangente ad una superficie in un punto. Funzioni lisce su una superficie e loro differenziali. Mappe normali. Operatore forma. Curvatura Gaussiana e curvatura media. Classificazione dei punti di una superficie. Parametrizzazione locale delle sezioni piane. Prima e seconda forma fondamentale. Curvature normali, curvature principali e formula di Eulero. Una superficie connessa ha operatore forma nullo se e solo se è una porzione di piano. Isometrie locali. Teorema Egregium.

Campi vettoriali su superfici, derivata covariante, campi paralleli. Trasporto parallelo. Geodetiche, curvatura geodetica. Esistenza locale delle geodetiche. Esistenza locale di coordinate ortogonali. Le geodetiche minimizzano localmente la lunghezza.

Curve regolari a tratti. Teorema di Hopf per regioni semplicemente connesse con bordo regolare a tratti (senza dimostrazione). Teorema di Gauss-Bonnet. Il piano iperbolico.

VARIETÀ E TEORIA DEL GRADO

Varietà, spazi tangenti. Mappe lisce tra varietà e loro differenziali. Punti critici e regolari, valori critici e regolari di mappe lisce tra varietà. Se $f:M\to N$ è liscia e M è compatta, ogni valore regolare di f ha un intorno di valori regolari le cui controimmagini sono insiemi finiti con lo stesso numero di elementi. Teorema di Brown (solo enunciato) e sua applicazione alla densità dei valori regolari di una mappa liscia tra varietà. La controimmagine di un valore regolare di un'applicazione f è una sottovarietà i cui spazi tangenti sono i nuclei del differenziale di f. Teorema di Brouwer per funzioni continue dal disco unitario in sé. Il gruppo ortogonale reale è un gruppo di Lie. Omotopie lisce, isotopie. Lemma di omogeneità. Grado modulo 2 e possibili applicazioni. Orientazioni di spazi vettoriali e di varietà. Orientazione indotta sul bordo. Grado deg(f;y) relativo ad un punto regolare y di una mappa liscia $f:M\to N$ da una varietà chiusa e orientata M ad una varietà connessa, orientata e senza bordo N. Il grado deg(f;y) è una funzione localmente costante di y. Se f come sopra si estende ad una mappa liscia da una varietà con bordo in N allora deg(f;y)=0 per ogni valore regolare y. Grado di una mappa liscia da una varietà chiusa e orientata a una varietà connessa, orientata e senza bordo. Una sfera m-dimensionale è pettinabile se e solo se la mappa antipodale è omotopa all'identità e se e solo se m è dispari. Indice di un campo vettoriale in un suo zero isolato e sua invarianza per diffeomorfismi. Un diffeomorfismo $f:R^n\to R^n$ che conserva l'orientazione è isotopo all'identità. Indice in un suo zero isolato di un campo vettoriale su una varietà. Caratteristica di Eulero di una varietà compatta. Enunciato del teorema di Poincaré-Hopf. Lemma di Hopf. Indice di un campo vettoriale in uno zero non degenere: caso di un aperto di R^k e di una varietà generale. Intorno tubolare di una varietà M ъ R^k e sue proprietà. L'indice totale di un campo vettoriale v con zeri non degeneri su una varietà chiusa è uguale al grado della mappa di Gauss del bordo di un suo intorno tubolare. Calcolo dell'indice totale di un campo vettoriale sulla sfera S^m.

TESTI CONSIGLIATI

● Theodore Shifrin "A First Course in Curves and Surfaces", http://www.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf
● John W. Milnor "Topology from the differentiable viewpoint", The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
● Victor Guillemin, Alan Pollack, "Differential Topology", Prentice Hall Inc., Englewood Clifs, New Jersey, 1974

Corso   Geometria Reale
         Laurea Magistrale
Semestre II
Docente Fabrizio Broglia

Geometria Reale

Il corso sara' dedicato allo studio delle proprieta' geometriche degli insiemi definibili tramite funzioni analitiche reali e complesse, cioe' in breve alla Geometria Analitica

In ambito analitico la distinzione tra il caso locale, il caso cioe' dei germi e il caso globale e' molto netta: poiche' il corso di Elementi di Analisi Complessa ha trattato esaurientemente della struttura locale di un insieme analitico complesso, il corso trattera' principalmente dell'aspetto globale e quindi per prima cosa dara' la nozione di spazio analitico, cominciando dal complesso
poiche' anche per poter parlare di spazi analitici reali occorre far riferimento costantemente al campo complesso, soprattutto se si vuole evitare di definire categorie di oggetti che presentano un numero notevole di comportamenti patologici.

Tale nozione e' stata introdotta negli anno 50 in due modo diversi: Grauert e Remmert pensavano uno spazio analitico come uno spazio topologico localmente isomorfo a un rivestimento ramificato di un aperto di C^n mentre Cartan e Serre pensavano uno spazio analitico come uno spazio topologico localmente isomorfo a un luogo di zeri di funzioni analitiche in un aperto di C^n.

Il Teorema di preparazione di Weierstrass e' lo strumento per passare dall'una all'altra nozione e questo e' stato sostanzialmente visto nel corso di Elementi di Analisi Complessa.

Ci sara' quindi una parte iniziale dedicata ad una rapida introduzione del materiale necessario (fasci, coomologia di Chech ...) e ai richiami di analisi complessa e poi la presentazione della struttura di spazio analitico complesso e di spazio di Stein, spazi che svolgono una funzione analoga a quella degli aperti affini nelle varieta' algebriche.

Si vedranno alcuni teoremi fondamentali come i teoremi A e B di Cartan e il Nullstellensatz per algebre di Stein.

Si vedranno le difficolta' che nascono nel tentare di definire gli spazi analitici reali in analogia con quelli complessi e come si arriva ad una definizione di una categoria soddisfacente e si passeranno in rassegna i risultati noti ed i principali problemi aperti:
la Geometria sul corpo dei reali presenta caratteristiche peculiari e fa uso, a seconda dell’argomento, di tecniche attinte da vari settori come ad esempio
la topologia differenziale, l’algebra commutativa, la logica e naturalmente la geometria complessa.

Nell'ambito di un corso semestrale se ne potranno vedere solo alcuni aspetti tra cui sicuramente sottolineeremo la centralita' del 17-esimo problema di Hilbert, cioe' della possibilita' di rappresentare le funzioni non negative come somme di quadrati

Bibliografia e riferimenti

Per la geometria analitica un buon testo di riferimento e' senza dubbio

*Gunning e Rossi Analytic functions of several complex variables. Prentice – Hall
1965.
Per il caso algebrico reale un buon riferimento sono i libri
• Jacek Bochnak, Michel Coste, Marie-Francoise Roy
Real Algebraic Geometry-Springer Verlag
• Michel Coste
An introduction to semialgebraic geometry -Quaderni del dottorato. Pisa (scaricabile in rete anche da
perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/SAG.pdf)
• Jose F, Fernando, J.Manuel Gamboa
Real Algebra From Hilbert 17th Problem -Quaderni del dottorato.Pisa

Programma di Istituzioni di Algebra

Estensioni intere di anelli, completamenti, teoria della dimensione. Introduzione all'algebra omologica: categorie di moduli, funtori, funtori derivati, successioni in (co)omologia, prime informazioni sulla (co)omologia dei gruppi, esempi notevoli.

Testi Consigliati

--Atiyah Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Westview Press (oppure versione italiana edita da Feltrinelli).

--Hilton, Stammbach, A course in homological algebra, Springer.

--Per una parte degli argomenti sono disponibili delle dispense in rete, alla pagina web del corso http://www.dm.unipi.it/~gaiffi/IstAlgebra/.

Istituzioni di Analisi Matematica
anno accademico 2013/14

Docenti: Matteo Novaga e Maria Stella Gelli.

Prerequisiti: si presuppone che lo studente abbia seguito i corsi di Analisi Matematica 1, 2 e 3.

Programma: Spazi di Hilbert e di Banach: teorema di Hahn-Banach, lemma di Baire, teorema di Banach-Steinhaus, teoremi della mappa aperta e del grafico chiuso, topologia debole e debole star, teorema di Banach-Alaoglu, teorema di Lax-Milgram.

Cenni di teoria spettrale: spettro di un operatore compatto in spazi di Banach, teorema di decomposizione spettrale per operatori compatti e autoaggiunti in spazi di Hilbert.

Spazi di Sobolev: definizione degli spazi $W^{1,p}$ e $W_0^{1,p}$, approssimazione con funzioni regolari, teoremi di immersione, teoremi di traccia, esistenza del minimo di funzionali convessi, soluzioni deboli di equazioni ellittiche.

Applicazioni ad alcune equazioni ellittiche e paraboliche.

Testi di riferimento. H. Brezis: *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni.* Liguori, Napoli, 1986.

Programma di Istituzioni di Analisi Numerica.
Docenti: Dario A. Bini e Ornella Menchi
Anno Accademico: 2014-2015.
Laurea: Magistrale in Matematica; Anno di Corso: primo; Semestre: secondo.
Numero crediti: 9.

CONTENUTI INSEGNAMENTO:

1. Polinomi ortogonali. Proprieta' degli zeri, relazione ricorrente a tre termini, Formula di Cristoffel- Darboux, polinomi ortogonali e matrici tridiagonali, teorema di Courant-Fischer (del minimax), proprieta' di separazione degli autovalori di matrici simmetriche. Polinomi ortogonali specifici e loro proprieta', formula di Rodrigues, polinomi ultrasferici, polinomi di Legendre, Chebyshev di prima e seconda specie, Laguerre, Hermite.
Aspetti computazionali nel calcolo degli zeri dei polinomi ortogonali.

2. Approssimazione di funzioni. Teorema di Weierstrass, norme, prodotti scalari. Il problema della approssimazione lineare, proprieta' dell'insieme
di soluzioni, funzione di migliore approssimazione, condizioni di unicita'.
Richiami sugli spazi di Hilbert, sistemi ortonormali completi, coefficienti di
Fourier, esistenza e unicita' della funzione di migliore approssimazione, uguaglianza di Parseval, diseguaglianza di Bessel. Rappresentazione della funzione di miglior approssimazione e aspetti computazionali. Uso dei polinomi
ortogonali per l'approssimazione ai minimi quadrati, aspetti computazionali
nel calcolo dei coefficienti di Fourier, espansione in serie di Chebyshev.
Approssimazione minimax polinomiale, algoritmo di Remez. Approssimazione mediante funzioni spline. Polinomi di Bernstein, operatori lineari di approssimazione positivi, teorema di Korovkin.

3. Polinomi ortogonali e integrazione numerica: formule gaussiane.

4. Trattamento numerico di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo parabolico, iperbolico ed ellittico: il metodo delle differenze finite, consistenza, stabilita' e convergenza. Analisi in norma 2 e norma infinito per il problema modello. Caso ellittico: discretizzazione del
problema di Poisson sul rettangolo, analisi di stabilita', il principio del massimo. Caso parabolico: l'equazione del calore, il metodo di
Crank-Nicolson. Caso iperbolico: discretizzazione dell'equazione delle onde.

TESTI DI RIFERIMENTO:

Appunti forniti dai docenti

R. Bevilacqua, D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi, Metodi Numerici,

Zanichelli, 1992

D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi, "Metodi numerici per l'algebra lineare",
Zanichelli, 1988.

Eugene Isaacson and Herbert Bishop Keller, Analysis of Numerical Methods. Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

R.J. LeVeque. Finite Differences Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM 2007.

W. Rudin, Real and Complex Analysis, Second Edition, Tata McGraw-Hill, 1974.

J. Stoer, R. Burlisch, Introduction to Numerical Analysis, Third Edition, Springer, 2002.

PROGRAMMA DI ISTITUZIONI DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA
Docenti: Franco Favilli, Rosetta Zan
Anno Accademico: 2014-'15
Laurea: Magistrale Matematica Anno di Corso _____ Semestre 2°
Numero crediti: 9

CONTENUTI INSEGNAMENTO

Modelli classici dell'apprendimento: dal costruttivismo all'approccio socio-culturale. Studi specifici sul pensiero matematico: il problem solving, l'advanced mathematical thinking, gli studi sull'intuizione. Teorie e ricerche in didattica della matematica (la teoria delle situazioni, il contratto didattico, il ruolo e la gestione dell'errore, l'uso di strumenti, gli aspetti linguistici, le convinzioni e gli atteggiamenti) e loro implicazioni per l'insegnamento.

Dai modelli teorici alla costruzione del curriculum di matematica secondo le Indicazioni Nazionali e le Linee Guida. I sistemi di valutazione nazionali e internazionali degli apprendimenti in matematica (OCSE-PISA, TIMSS-PIRLS e INVALSI): quadri di riferimento, definizione di competenze matematiche, obiettivi, prove ed esiti a livello nazionale.

TESTI DI RIFERIMENTO

Carpenter T., Dossey J., and Koehler J. (Eds.) (2004), Classics in Mathematics Education Research. NCTM.

D'Amore B. (1999) Elementi di didattica della matematica. Bologna: Pitagora.

Krutetskii V.A. (1976) The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: The University of Chicago Press.

Polya G. (1945) How to solve it. Princeton Science Library.   Schoenfeld, A. (1985) Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

OBIETTIVI FORMATIVI

Obiettivo del corso è dare una preparazione di base nell'ambito della didattica della matematica, fornendo le conoscenze teoriche 'classiche' nel campo dell'educazione matematica, mettendo in evidenza la varietà di ricerche in tale campo e la loro connessione con i problemi della pratica didattica.

PREREQUISITI

Non sono richiesti prerequisiti specifici, oltre a quelli garantiti dal possesso della laurea triennale.

MODALITA' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

Il corso prevede una prova scritta e una prova orale.

PROGRAMMA del CORSO di
ISTITUZIONI di FISICA MATEMATICA

Docente: Dott. Giovanni Federico Gronchi
Anno Accademico: 2014/2015
Corso di Laurea Magistrale in Matematica, 1^o semestre
Numero crediti: 9

Contenuti del Corso:

Principi Variazionali della Meccanica: preliminari di calcolo delle variazioni: funzionali, spazi di funzioni, variazione prima, derivate di Gateaux e di Frechet, variazione seconda, punti coniugati, campi di estremali e condizioni di minimo. Funzionale di azione lagrangiana, principio di Hamilton, equazioni di Eulero-Lagrange, lagrangiane equivalenti, invarianza per cambiamento di coordinate. Principio di Maupertuis, metrica di Jacobi, dinamica e geodetiche,
Meccanica Hamiltoniana: trasformata di Legendre, equazioni di Hamilton, trasformazioni canoniche dipendenti e indipendenti dal tempo.
Sistemi Hamiltoniani Integrabili: integrali primi e parentesi di Poisson, parentesi di Lie di campi vettoriali, commutazione di campi e di flussi. Equazione di Hamilton-Jacobi: dualismo tra meccanica ed ottica geometrica, il metodo delle caratteristiche e la relazione tra le equazioni di Hamilton e l'equazione di Hamilton-Jacobi. Separazione delle variabili, esempi: problema dei 2 centri fissi, problema di Keplero accelerato. Teorema di Liouville-Arnold, variabili azione-angolo, esempi classici. Metodo delle coppie di Lax, integrabilita' del modello di Toda.
Teoria delle Perturbazioni Hamiltoniana: teorema della media, invarianti adiabatici, non integrabilità del problema dei 3 corpi, metodo di Lie, equazione omologica e piccoli divisori.

Testi di riferimento:

1. V. I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer
2. G. Benettin, F. Fassò: Introduzione alla teoria delle perturbazioni per sistemi Hamiltoniani (*Note per il corso di Fisica Matematica*)
3. G. F. Gronchi: *Note del corso di Istituzioni di Fisica Matematica*
4. J. Moser e E. Zehnder: *Notes on Dynamical Systems*, Courant Institute of Mathematical Sciences

OBIETTIVI FORMATIVI: Il corso si propone di presentare alcuni capitoli della Fisica Matematica: i principi variazionali della meccanica ed alcuni argomenti di base del calcolo delle variazioni, la meccanica hamiltoniana, i sistemi integrabili hamiltoniani e le basi della teoria delle perturbazioni hamiltoniana.

PREREQUISITI: Nozioni di calcolo differenziale ed integrale. Elementi di analisi funzionale.

METODI DIDATTICI: Il corso consiste di 63 ore suddivise tra lezioni ed esercitazioni.

MODALITÀ di VERIFICA dell'APPRENDIMENTO: prova scritta e orale; ci saranno inoltre due prove scritte *in itinere* (compitini) che permetteranno l'accesso diretto alla prova orale.

Programma del corso di
Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

1) Richiami di algebra multilineare: prodotti tensoriali, algebra esterna.

2) Varietà differenziabili. Applicazioni differenziabili. Partizioni dell'unità. Spazio tangente. Differenziale. Immersioni, embedding e sottovarietà. Fibrati vettoriali. Fibrato tangente e cotangente. Fibrati tensoriali. Sezioni di fibrati e campi vettoriali. Parentesi di Lie.

3) Connessioni su fibrati. Derivata covariante lungo una curva. Sezioni parallele e trasporto parallelo. Metriche Riemanniane. Isometrie e isometrie locali. Connessione di Levi-Civita. Geodetiche. Mappa esponenziale. Intorni normali e uniformemente normali. Lunghezza di una curva. Distanza Riemanniana. Formula per la prima variazione della lunghezza d'arco. Le geodetiche sono le curve localmente minimizzanti. Teorema di Whitehead sull'esistenza di intorni geodeticamente convessi. Curvature Riemanniana, sezionale e di Ricci (senza dimostrazioni).

4) Forme differenziali. Orientabilità. Integrazione di forme differenziali. Differenziale esterno. Teorema di Stokes. Coomologia di de Rham. Complessi differenziali e successioni esatte lunghe. Successione di Mayer-Vietoris. Dualità di Poincaré (senza dimostrazione). Teorema di Künneth. Complessi doppi e principio di Mayer-Vietoris. Fasci. Coomologia di Čech. Teorema di de Rham (solo idea della dimostrazione).

Bibliografia

– M. Abate, F. Tovena, *Geometria differenziale,* Springer Italia, Milano, 2011.

Modalità d'esame

Scritto e orale.

Argomenti propedeutici

Essenziale per la comprensione del corso è una buona conoscenza del calcolo differenziale e integrale di più variabili reali, dell'algebra lineare, e dei fondamenti di topologia generale, come sviluppati negli insegnamenti di *Geometria analitica e algebra lineare, Analisi in più variabili 1, Geometria proiettiva* e *Topologia e analisi complessa.* Inoltre, pur non essendo strettamente necessario, per capire le motivazioni che hanno portato allo sviluppo degli argomenti trattati può essere utile anche conoscere le basi della geometria differenziale di curve e superfici nello spazio, come sviluppate nell'insegnamento di *Geometria e topologia differenziale.*

PROGRAMMA PRELIMINARE DEL CORSO DI ISTITUZIONI DI PROBABILITÀ 2014/15

MARCO ROMITO

1. Introduzione ai Processi Stocastici

Nozioni di base sui processi stocastici. Filtrazioni, processi adattati, progressiva misurabilità, tempi di arresto. Costruzione di processi: teorema di estensione di Kolmogorov. Esempi: processi gaussiani. Richiami e approfondimenti sulle probabilità condizionali e sulla speranza condizionale. Definizione di proprietà di Markov, riformulazioni e criteri.

2. Due esempi: Moto Browniano e processo di Poisson

Richiami sul moto Browniano, proprietà principali, regolarità delle traiettorie, proprietà di Markov. Richiami sul processo di Poisson.

3. Elementi di teoria delle martingale

Definizioni di martingala, super e sub martingala. Tempi d'arresto. Martingale tempo discreto: teoremi d'arresto, disuguaglianze di Doob, risultati di convergenza. Decomposizione di Doob-Meyer. Martingale a tempo continuo: generalizzazione di alcuni dei risultati precedenti. Cenni su variazione quadratica e semimartingale. Moto browniano come martingala, problema della rovina ed applicazioni delle disuguaglianze di Doob.

4. Integrale stocastico secondo Itô

Costruzione dell'integrale stocastico nel caso del moto Browniano e di processi adattati di quadrato integrabile. Proprietà dell'integrale. Generalizzazione a processi adattati a quadrato non integrabile. Applicazione dei risultati sulle martingale. Cenni sull'integrale di Stratonovich.

5. Formula di Itô

Formula di Itô. Applicazioni: caratterizzazione di Lévy del moto Browniano, teorema di Girsanov, proprietà di rappresentazione delle martingale.

6. Equazioni differenziali stocastiche

Nozioni di esistenza ed unicità. Equazioni con rumore additivo. Teorema di esistenza ed unicità nel caso generale con coefficienti Lipschitz. Teoremi di esistenza di soluzioni deboli con ipotesi più deboli sui i coefficienti. Legami tra equazioni differenziali stocastiche ed equazione di Fokker-Planck, di Kolmogorov, problema di Dirichlet.

Testi di riferimento.

- Paolo Baldi, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*.
- R. Durrett, *Stochastic calculus*.
- Richard F. Bass, *Stochastic Processes*.
- Note del docente.

Nozioni presupposte. Nozioni di base di calcolo delle probabilità e teoria della misura, secondo il programma di massima del corso di Probabilità. Nozioni elementari di analisi funzionale.

Modalità d'esame. Prova scritta e prova orale.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Largo Bruno Pontecorvo 5, I–56127 Pisa, Italia
E-mail address: romito@dm.unipi.it
URL: http://www.dm.unipi.it/pages/romito

PROGRAMMA DI “MATEMATICA DISCRETA”

Docenti: Roberto Dvornicich e Giovanni Gaiffi
Anno Accademico: 2014-2015
Laurea: Matematica   Anno di Corso: 3-4-5   Semestre: secondo
Numero crediti: 6

CONTENUTI INSEGNAMENTO

Richiami di calcolo combinatorio elementare. Partizioni.

Funzioni generatrici e funzioni generatrici esponenziali.
Cards, decks, hands e metodi generali per il calcolo delle funzioni generatrici. Applicazioni a problemi combinatori classici.

Teoria di Polya-Redfeld.

Teoria dei Posets (partially ordered sets). Funzione di Möbius e applicazioni ai complessi simpliciali astratti.

Grafi ed alberi. Colorazioni di grafi. Cenni sulla teoria di Ramsey.
Teorema di Van der Waerden e teorema di Schur.

TESTI DI RIFERIMENTO

M. Cerasoli, F. Eugeni, M. Protasi, Elementi di matematica discreta, Zanichelli.

R. Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 1, 2nd edition, Cambridge University Press.

H. Wilf, Generatingfunctionology, Academic Press.

R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, Ramsey theory, Wiley and sons.

OBIETTIVI FORMATIVI

Conoscenza dei metodi fondamentali della combinatoria. Acquisizione delle formule per
la risoluzione dei problemi più famosi.

PREREQUISTI

Programma del corso di Aritmetica e di Algebra 1. Serie formali.

METODI DIDATTICI

4 ore di lezione alla settimana.

MODALITA' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

Esame orale.

ALTRE INFORMAZIONI

Il corso si svolge a Pisa solo saltuariamente. È stato tenuto l'ultima volta nel 2008-2009.
Il programma si deve intendere come preliminare, e potrà essere modificato in funzione dell'interesse degli studenti.

PROGRAMMA DI Matematiche elementari da un punto di vista superiore - Aritmetica
Docente: Pietro Di Martino
Anno Accademico: 2013-'14
Laurea: Triennale Matematica Anno di Corso _____ Semestre 2°
Numero crediti: 6

CONTENUTI INSEGNAMENTO

Il corso riprenderà le caratterizzazioni degli insiemi numerici soffermandosi sui diversi approcci possibili e approfondendo riflessioni di natura didattica e alcuni aspetti storici della formalizzazione.
Particolare attenzione sarà rivolta all'insieme degli interi e alle proprietà legate alla divisibilità e ai numeri primi. Durante il corso saranno presentate e analizzate le potenzialità e le difficoltà di differenti dimostrazioni di teoremi importanti, saranno inoltre proposti problemi di livello universitario e di scuola secondaria analizzandone anche qui potenzialità e difficoltà. Sarà dato anche spazio alla analisi della letteratura divulgativa (sempre più numerosa) sull'argomento.
La seconda parte del corso affronterà la geometria euclidea e discuterà i principali nodi concettuali del programma di geometria della scuola secondaria superiore.

TESTI DI RIFERIMENTO (non c'è nessun testo adottato)

Autori vari *Numbers* Springer Verlag
Courant R. & Robbins H. *Che cos'è la matematica* Bollati Boringhieri
Kline M. *Storia del pensiero matematico* Einaudi
Villani V. *Cominciamo da Zero* Pitagora
Villani V. *Cominciamo dal Punto* Pitagora
Saranno inoltre utilizzati articoli tratti da varie riviste e appunti forniti dal docente.

OBIETTIVI FORMATIVI

Gli obiettivi del corso sono vari: ripercorrere e approfondire gli aspetti legati all'introduzione e alla formalizzazione degli insiemi numerici e della geometria euclidea. Diventare consapevoli delle potenzialità del contesto aritmetico per costruire problemi significativi. Conoscere e valutare punti di forza e di debolezza in chiave didattica di differenti approcci allo stesso contenuto. Abituarsi ad analizzare la produzione divulgativa su argomenti matematici valutandone eventuali potenzialità didattiche.

PREREQUISITI

Non sono richiesti prerequisiti specifici.

METODI DIDATTICI

Le lezioni saranno il più possibile interattive. Durante le lezioni saranno proposte attività di analisi e soluzione problemi seguite da discussioni collettive.

MODALITA' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

La verifica prevede una parte scritta (incentrata su contenuti e risoluzione/analisi problemi) e di una parte orale (focalizzata maggiormente sugli aspetti didattici toccati durante il corso).

PROGRAMMA del CORSO di MECCANICA RAZIONALE

Docente: Dott. Giovanni Federico Gronchi
Anno Accademico: 2014/2015
Corso di Laurea Triennale in Matematica, 2^o semestre
Numero crediti: 6

Contenuti del Corso:

Meccanica Newtoniana: sistemi meccanici, quantità dinamiche principali, equazioni cardinali, moti relativi, velocità angolare. Sistemi vincolati: vincoli olonomi e anolonomi, vincoli ideali. Il corpo rigido: cinematica rigida, operatore di inerzia, assi e momenti principali di inerzia.
Meccanica Lagrangiana: principio di D'Alembert, equazioni di Eulero-Lagrange, lagrangiane equivalenti, invarianza per cambiamento di coordinate, integrali primi e simmetrie, teorema di Noether, riduzione di Routh. Equilibri e stabilità: configurazioni di equilibrio, teorema di Lagrange-Dirichlet, piccole oscillazioni, frequenze proprie e modi normali. Angoli di Eulero e formulazione lagrangiana per il moto dei corpi rigidi.

Testi di riferimento:

1. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli: *Appunti di Meccanica Razionale*

2. G. F. Gronchi: *Note del corso di Meccanica Razionale*

OBIETTIVI FORMATIVI: Il corso si propone di presentare gli argomenti principali della Meccanica Classica, nella sua formulazione newtoniana e lagrangiana.

PREREQUISITI: Nozioni di calcolo differenziale ed integrale.

METODI DIDATTICI: Il corso consiste di 48 ore suddivise tra lezioni ed esercitazioni.

MODALITÀ di VERIFICA dell'APPRENDIMENTO: prova scritta e orale; ci saranno inoltre due prove scritte *in itinere* (compitini) che permetteranno l'accesso diretto alla prova orale.

PROGRAMMA del CORSO di MECCANICA SUPERIORE

Docente: Dott. Giovanni Federico Gronchi
Anno Accademico 2014/2015
Laurea Magistrale in Matematica, 2^o semestre
Numero crediti: 6

Il corso riguarda lo studio delle singolarità e l'esistenza di orbite periodiche nel problema degli N corpi.
Richiami di Meccanica Hamiltoniana: equazioni di Hamilton; trasformazioni canoniche; equazione di Hamilton-Jacobi; separazione delle variabili; variabili azione-angolo; esempi dalla Meccanica Celeste.
Singolarità del problema degli N corpi: introduzione al problema degli N corpi; integrali primi e riduzione; collisioni e pseudo–collisioni; congettura di Painlevé; teorema di Von Zeipel.
Regolarizzazione delle collisioni nel problema dei 3 corpi: collisioni binarie e regolarizzazione: teoria di Sundman; regolarizzazione di Levi-Civita e di Easton; studio delle collisioni triple: la varietà di collisione tripla di McGehee;
Soluzioni periodiche del problema dei 3 corpi: soluzioni di Eulero e Lagrange per il problema dei 3 corpi. Lo spazio delle forme dei triangoli; costruzione e proprietà dell'orbita periodica a forma di otto di Chenciner-Montgomery.
Orbite periodiche del problema degli N con metodi variazionali: funzionale di azione lagrangiana; esistenza dei minimi; contributo delle collisioni all'azione; teorema di Gordon; stime di livello; variazioni locali con archi diretti e indiretti; nuove orbite periodiche del problema degli N corpi con vincoli topologici e di simmetria.

TESTI CONSIGLIATI:

C. L. Siegel e J. Moser: *Lectures in Celestial Mechanics*, Springer

J. Moser e E. Zehnder: *Notes on Dynamical Systems*, Courant Institute of Mathematical Sciences

Sarà anche suggerita la lettura di articoli di ricerca reperibili in biblioteca.

OBIETTIVI FORMATIVI: apprendere in dettaglio alcuni argomenti di ricerca attuali nel campo della Meccanica Celeste.

PREREQUISITI: si richiede la conoscenza dei sistemi lagrangiani e hamiltoniani, delle equazioni differenziali ordinarie e di nozioni di base di Meccanica Celeste. Corsi utili per acquisire tali competenze sono *Sistemi Dinamici*, *Istituzioni di Fisica Matematica*, *Elementi di Meccanica Celeste*.

METODI DIDATTICI: 42 ore di lezioni frontali.

MODALITÀ di VERIFICA dell'APPRENDIMENTO: la prova finale consiste in un seminario su un argomento attinente al corso da concordare.

INSEGNAMENTO DI METODI DI APPROSSIMAZIONE

Docenti LUCA GEMIGNANI
Anno Accademico 2013/2014
Laurea Magistrale in Matematica-- Semestre I
Numero crediti 6

1) Programma del Corso

a) Metodi numerici per il calcolo degli autovalori in ambiente distribuito: metodi divide-et-impera, metodi di iterazione funzionale.

b) Metodi per il calcolo degli autovalori di matrici sparse e/o di grosse dimensioni:
metodo di Lanczos e risultati di convergenza, metodo di Arnoldi con varianti di restarting.

c) Problemi generalizzati di calcolo degli autovalori: forme normali, linearizzazioni, problemi polinomiali e
problemi non lineari.

d) Metodi numerici per matrici con struttura di rango: risoluzione di sistemi lineari e calcolo degli autovalori.

2) Obiettivi Formativi

Nel corso sono trattati argomenti avanzati di ricerca, principalmente nel settore dell'algebra lineare numerica,
della teoria dell'approssimazione discreta e del calcolo polinomiale ed algebrico.
Il materiale didattico e' costituito da articoli di recente pubblicazione.
La didattica frontale e' svolta dal docente e completata da seminari in itinere degli studenti.

3) Modalita` di Esame
Colloquio finale con modalita' di seminario di approfondimento su argomenti inerenti i contenuti del corso.

Qualche appunto sui metodi topologici in calcolo delle variazioni

per gli studenti del terzo anno del corso di laurea in matematica

a.a. 2013-14 Antonio Marino

1 Il lemma di deformazione

L'introduzione dei metodi topologici nel "calcolo delle variazioni" ha dotato questa teoria di uno strumento molto potente. Nello studio di un funzionale il problema di dimostrare, e prima ancora di congetturare, l'esistenza di punti stazionari diversi da quelli di minimo o massimo, e di valutare la loro eventuale molteplicità, trova nell'analisi della struttura topologica "globale" degli insiemi il proprio naturale strumento di indagine. Evidentemente occorre che il funzionale abbia un grado di regolarità che permetta ad esempio di parlare dei suoi punti stazionari e come vedremo ci basterà poco di più per realizzare il collegamento fra topologia e punti stazionari.
In particolare, per un funzionale $f : X \to \mathbb{R}$, definito su un certo "spazio" X (ad es. $\mathbb{R}^N$, spazio di Hilbert, varietà riemanniana o altro) e dotato di un minimo di regolarità, un tipico dato rivelatore è la struttura topologica dei "sottolivelli" di f, e cioè degli insiemi $f^c = \{u \in X \mid f(u) \leq c\}$, con c in $\mathbb{R}$. Il fatto chiave è in sostanza il seguente:

se due sottolivelli f^a e f^b di f, con ad es. $a < b$, hanno diversa struttura topologica, in un senso abbastanza generale che preciseremo, allora deve esistere un punto u in X che è stazionario per f, con $a \leq f(u) \leq b$.

Il ponte fra l'analisi della topologia dei sottolivelli e l'esistenza dei punti stazionari è costituito da un semplicissimo "lemma di deformazione". Qui di seguito ne vediamo una versione classica, ma esso è presente, in modo palese o nascosto, anche nelle formulazioni più sofisticate della teoria.

Consideriamo dunque un funzionale $f : X \to \mathbb{R}$ di classe C^1, dove X è uno spazio di Hilbert o più in generale, una varietà riemanniana, che noi supporremo di classe C^2, completa e priva di bordo, di dimensione finita o infinita.
Richiamiamo per completezza le seguenti note definizioni.

1.1 Definizione *Diciamo che un elemento u di X è un punto stazionario (o "critico") per (di) f se* $\mathrm{grad} f(u) = 0$. *Il numero $f(u)$ è detto valore critico, o livello critico, per (di) f. I numeri reali che non sono valori critici per f sono detti valori regolari per f.*

La seguente condizione assicura una proprietà di compattezza sufficiente ad un agevole svolgimento della teoria.

1.2 Definizione (La "condizione di Palais - Smale")
Dato c in $\mathbb{R}$ diciamo che vale per f la condizione $(PS)_c$ se ogni successione $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ in X tale che

$$\lim_{h\to+\infty} f(u_h) = c \quad \text{e} \quad \lim_{h\to+\infty} \mathrm{grad} f(u_h) = 0$$

ammette una sottosuccessione convergente in X.

1.3 Osservazione *Se per il funzionale f vale la $(PS)_c$ per ogni c di un intervallo $[a, b]$ che non contiene valori critici di f, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che*

$$\inf \{||\mathrm{grad} f(u)|| \mid u \in X,\ a - \varepsilon \leq f(u) \leq b + \varepsilon\} > 0.$$

Dimostrazione Se la tesi non fosse vera esisterebbe una successione $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ in X tale che $||\mathrm{grad} f(u_h)|| \to 0$ e, passando se occorre ad una sottosuccessione, tale che $f(u_h)$ tenda a un numero c in $[a, b]$. Allora, per la $(PS)_c$, possiamo anche supporre che $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converga ad un punto u di X. Dunque $f(u) = c$, $c \in [a, b]$ e $\mathrm{grad} f(u) = 0$, contro l'ipotesi. □

È facile dimostrare la seguente osservazione.

1.4 Osservazione *Supponiamo che valga per f la condizione $(PS)_c$, per ogni c di un intervallo $[a, b]$. Allora l'insieme dei punti critici u per f tali che $f(u) \in [a, b]$ è compatto, e quindi l'insieme dei corrispondenti valori critici è chiuso.*

Nel lemma di deformazione che ora esponiamo si assume l'ipotesi che f sia di classe C^1, ma per semplicità ne svolgiamo la dimostrazione nel caso che f sia di classe C^2. Nel caso infatti che f sia solo di classe C^1 c'è bisogno di qualche piccolo accorgimento tecnico (vedi il commento che segue la dimostrazione del lemma) che per questo corso non è molto interessante.

1.5 Lemma (Il "primo lemma di deformazione")
Siano a e b due numeri reali con $a \leq b$ e supponiamo che:
a) *in $[a, b]$ non cadano valori critici di f,*
b) *valga la $(PS)_c$ per ogni c in $[a, b]$.*

Allora f^a *è retratto di deformazione*[1] *di* f^b *in* f^b *(e quindi in* X*).*
Si può anzi affermare che se $\varepsilon \geq 0$ *e* $\delta \geq 0$ *sono abbastanza piccoli, allora* $f^{a-\varepsilon}$ *è retratto di deformazione di* $f^{b+\delta}$ *in* $f^{b+\delta}$*.*

Dimostrazione

I passo) Per l'osservazione 1.3 esiste $\sigma > 0$ tale che $||\mathrm{grad} f(u)|| \geq \sigma$ per ogni u tale che $a - \sigma \leq f(u) \leq b + \sigma$. Dati allora ε e δ in $[0, \sigma]$, per brevità poniamo: $a' = a - \varepsilon$ e $b' = b + \delta$.

II passo Supponiamo dunque che f sia di classe C^2. Dobbiamo verificare che esiste una mappa $\mathcal{H} : [0, 1] \times f^{b'} \to f^{b'}$, che sia continua e abbia le proprietà: $\mathcal{H}(0, u) = u$ e $\mathcal{H}(1, u) \in f^{a'}$, per ogni u di $f^{b'}$, e inoltre $\mathcal{H}(t, u) = u$ per ogni t e per ogni u di $f^{a'}$.

Per le u tali che $a' \leq f(u) \leq b'$ vogliamo costruire la $\mathcal{H}(t, u)$ mediante le soluzioni del seguente problema di Cauchy:

1.5.1 $$\mathcal{U}' = -\frac{\mathrm{grad} f(\mathcal{U})}{||\mathrm{grad} f(\mathcal{U})||^2}\,, \qquad \mathcal{U}(0) = u,$$

dove $\mathrm{grad} f(\mathcal{U})$ sta per $(\mathrm{grad} f) \circ \mathcal{U}$.

Notiamo subito che per tutte le u con $a' \leq f(u) \leq b'$, vale per 1.5.1 il teorema di esistenza e unicità locale, perché la funzione $-\dfrac{\mathrm{grad} f(u)}{||\mathrm{grad} f(u)||^2}$ è di classe C^1 in $\{u \in X \mid \mathrm{grad} f(u) \neq 0\}$. Dunque esiste $\rho > 0$ ed esiste una unica $\mathcal{U} : [0, \rho[\to X$ che verifica 1.5.1 in $[0, \rho[$,

III passo) Vediamo ora che se $a' \leq f(u) \leq b'$ allora la soluzione $\mathcal{U}$ giunge in $f(a')$. Notiamo che risulta: $(f \circ \mathcal{U})' = -1$, e dunque dobbiamo verificare che $\mathcal{U}$ è definita in tutto l'intervallo $[0, f(u) - a']$.

Consideriamo perciò l'intervallo I, massimale fra quelli nei quali la soluzione $\mathcal{U}$ è definita. È ben noto che tale intervallo esiste. Se $\sup I > f(u) - a'$ è vero che $[0, f(u) - a'] \subseteq I$.

Supponiamo invece che $\sup I \leq f(u) - a'$ e cominciamo col verificare che I ha massimo. Infatti ora risulta che per tutte le t di $[0, \sup I[$, $a' \leq f(\mathcal{U}(t)) \leq b'$ e d'altra parte $||\mathcal{U}'(t)|| \leq \dfrac{1}{||\mathrm{grad} f(\mathcal{U}(t))||}$. Dunque $||\mathcal{U}'(t)||$ è limitata per le proprietà dei numeri a' e b' introdotti nel I passo.

Di conseguenza se t tende a $\sup I$ la curva $\mathcal{U}(t)$ converge ad un punto v di X e quindi anche $\mathcal{U}'(t)$ converge, perché verifica l'equazione che figura in 1.5.1. Dunque la $\mathcal{U}$ può essere estesa in modo differenziabile a tutto $[0, \sup I]$. Dalla definizione di I segue allora che $\sup I \in I$.

[1]Se Y è uno spazio topologico e Z è un suo sottospazio, allora una retrazione $r : Y \to Z$ è una mappa continua tale che $r(x) = x$ per ogni x di Z. Se inoltre X è uno spazio topologico tale che $Z \subseteq Y \subseteq X$, si dice che Z è in X un retratto di deformazione di Y se esiste una retrazione r di Y in Z che sia omotopa in X all'immersione $i : Y \to X$, nel senso che esiste una mappa continua $\mathcal{H} : [0, 1] \times Y \to X$ tale che $\mathcal{H}(0, x) = x$ e $\mathcal{H}(1, x) \in Z$ per ogni x di Y e anche $\mathcal{H}(1, x) = x$ per ogni x di Z.

Se per assurdo $\max I < f(u) - a'$, allora $a' < f(\max I) < b'$ e dunque si può estendere la $\mathcal{U}$ mediante la soluzione $\mathcal{V}$ della stessa equazione che figura nel problema 1.5.1, ma con la condizione $\mathcal{V}(\max I) = \mathcal{U}(\max I)$. Ma anche questo contraddice la definizione di I. In conclusione $[0, f(u) - a'] \subseteq I$.
IV passo) A questo punto, mediante la soluzione $\mathcal{U}$ di 1.5.1, possiamo senz'altro definire l'omotopia $\mathcal{H}$ per tutte le coppie (t, u) di $[0,1] \times f^{b'}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{H}(t,u) = \begin{cases} \mathcal{U}(t(f(u) - a') & \text{se} \quad a' \leq f(u) \leq b', \\ \\ u & \text{se} \quad f(u) \leq a'. \end{cases}$$

Dai consueti teoremi sulla dipendenza continua dai dati iniziali per sistemi del tipo 1.5.1, segue che $\mathcal{H}$ è continua. Le altre proprietà richieste per $\mathcal{H}$ sono a questo punto evidenti. □

Nel caso che f sia solo di classe C^1 si può procedere sostituendo anzitutto il campo grad$f$ con un campo F che gli sia uniformemente vicino e sia di classe C^2. Infatti, per il procedimento appena seguito non occorre che il vettore $\mathcal{U}'(t)$ sia orientato esattamente come $-\text{grad}f(\mathcal{U}(t)$, ma basta che sia uniformemente concorde con questo. Se X è una varietà riemanniana, per non avere altre grane occorre naturalmente che questa sia comunque di classe C^2.

Vedremo nel seguito come il lemma di deformazione gioca nella dimostrazione di alcuni importanti teoremi riguardanti i punti stazionari di un funzionale f. Intanto possiamo già qui osservare come questo lemma permette di provare l'esistenza di un punto di minimo per f in ipotesi che sono un po' inconsuete. È interessante il fatto che queste ipotesi non richiedono la condizione classica che impone che qualche sottolivello di f sia compatto relativamente ad una opportuna topologia.

1.6 Teorema (Un inconsueto teorema di minimo)
Supponiamo che f sia inferiormente limitato e che valga la $(PS)_c$ almeno per $c = \inf f$. Allora f ha minimo.

Dimostrazione Se per assurdo $\inf f$ non fosse valore critico per f, per il lemma 1.5, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $f^{\inf f - \varepsilon}$ sarebbe un retratto di $f^{\inf f + \varepsilon}$. Ma $f^{\inf f - \varepsilon}$ è vuoto e $f^{\inf f + \varepsilon}$ no. □

Vale evidentemente un analogo teorema di esistenza del massimo, che può essere verificato sostituendo $-f$ a f.

2 % Il metodo del minimassimo

I teoremi che provano l'esistenza di un livello critico per un certo funzionle $f : X \to \mathbb{R}$, possono, come vedremo, essere inquadrati nello schema logico semplice e generale del "metodo del minimassimo". Per semplicità didattica noi esporremo preferibilmente una dimostrazione diretta di quei teoremi, mettendo in evidenza le proprietà topologiche in gioco. Subito dopo, ancora per motivi didattici, riesamineremo daccapo le situazioni prospettate dai diversi enunciati e metteremo esplicitamente in evidenza l'interazione fra le proprietà topologiche e il metodo del minimassimo.

Per presentare ora questo metodo in un modo adatto ai successivi teoremi di esistenza, possiamo, a partire da un assegnato funzionale f di classe C^1 sullo "spazio" X, introdurre un numero a_0 in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, e la classe $\mathcal{R}_{f,a_0}$ delle retrazioni di f^b su f^a, omotope all'identità in f^b, al variare di a e b in $\mathbb{R}$, con $a_o \leq a \leq b$.

2.1 Teorema (Il "metodo del minimassimo")
Sia $\mathcal{E}$ una classe di sottoinsiemi di X avente la proprietà:

$$\textit{per ogni } A \textit{ di } \mathcal{E} \textit{ e per ogni } r \textit{ di } \mathcal{R}_{f,a_0} \textit{ anche } r(A) \in \mathcal{E}.$$

Poniamo poi:

2.1.1 $$c = \inf \{\sup f(A) \mid A \in \mathcal{E}\}.$$

Allora, se $a_0 < c < +\infty$ e se vale la condizione $(PS)c$, esiste u in X tale che $\mathrm{grad} f(u) = 0$ *e* $f(u) = c$.

Dimostrazione Se per assurdo c non fosse un valore critico per f, per il primo lemma di deformazione esisterebbero $\varepsilon > 0$, con $a_0 < a - \varepsilon$, ed una retrazione r, nella classe $\mathcal{R}_{f,a_0}$, di $f^{c+\varepsilon}$ su $f^{c-\varepsilon}$. Ma dalla definizione di c segue che esiste A in $\mathcal{E}$ tale che $\sup f(A) \leq c + \varepsilon$. Allora $r(A) \in \mathcal{E}$ e $\sup f(r(A)) \leq c - \varepsilon$. Ma questo contraddice la definizione di c. □

Riguardo alla condizione $c < +\infty$, è evidente che essa è verificata se e solo se esiste A in $\mathcal{E}$ tale che $\sup f(A) < +\infty$.
Si osservi poi che il teorema di minimo 1.6 rientra nel teorema appena dimostrato, se si considera $a_0 < \inf f$ (ad esempio $a_0 = -\infty$) e si indica con $\mathcal{E}$ la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti di X (oppure la famiglia dei sottoinsiemi di X che hanno uno ed un solo punto).

3 Il teorema della sella

Sia ora X lo spazio $\mathbb{R}^N$ o più in generale uno spazio di Hilbert e sia $f : X \to \mathbb{R}$ un funzionale di classe C^1. Il teorema della sella si basa sul lemma di deformazione e sulla proprietà topologica espressa nel seguente enunciato.

3.1 Lemma *Siano X_0 e X_1 due sottospazi di X tali che $X = X_0 \oplus X_1$ e supponiamo che X_0 abbia dimensione finita. Dato un numero $R > 0$ poniamo:*

$$S_0 = \{u \in X_0 \mid ||u|| = R\} \text{ e } B_0 = \{u \in X_0 \mid ||u|| < R\}.$$

Allora, data una qualunque mappa continua $\Phi : \overline{B}_0 \to X$ tale che $\Phi(u) = u$ per ogni u di S_0 risulta che $\Phi(B_0) \cap X_1 \neq \emptyset$.

Dimostrazione Sia P_0 la proiezione di X su X_0 tale che $\mathrm{Ker} P_0 = X_1$ e consideriamo la mappa continua $P_0 \circ \Phi$ da $\overline{B}_0$ a X_0.
Risulta che se $u \in S_0$ allora $P_0 \circ \Phi(u) = u$. Di conseguenza, poiché X_0 ha dimensione finita, sappiamo che $deg(v, \Phi, B_0(0, R)) = 1$ per ogni v di B_0. Dunque $B_0 \subseteq P_0 \circ \Phi(B_0)$.
In particolare esiste u in B_0 tale che $0 = P_0 \circ \Phi(u)$ e cioè $\Phi(u) \in X_1$. □

3.2 Teorema (Il "teorema della sella")
Siano X_0 e X_1 due sottospazi di X tali che $X = X_0 \oplus X_1$. Supponiamo che
a) *esiste $R > 0$ tale che, posto $S_0 = \{u \in X_0 \mid ||u|| = R\}$, risulti*

$$\sup f(S_0) < \inf f(X_1) \ ,$$

b) *X_0 ha dimensione finita,*
c) *vale la $(PS)_c$ per le c dell'intervallo $[\inf f(X_1), \sup f(B_0)]$, avendo posto $B_0 = \{u \in X_0 \mid ||u|| < R\}$.*
Allora esiste un punto u di X critico per f e tale che

$$\inf f(X_1) \leq f(u) \leq \sup f(B_0).$$

Dimostrazione Poniamo $a = \inf f(X_1)$ e $b = \sup f(B_0)$ e supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora, dal lemma di deformazione segue che esiste $\varepsilon > 0$ ed una retrazione continua r di f^b su $f^{a-\varepsilon}$. Possiamo supporre che ε sia tale che $\sup f(S_0) < \inf f(X_1) - \varepsilon$. Dunque:

$$S_0 \subseteq f^{a-\varepsilon},\ \overline{B}_0 \subseteq f^b,\ f^{a-\varepsilon} \cap X_1 = \emptyset,\ r : f^b \to f^{a-\varepsilon} \text{ e } r(u) = u\ \forall u \text{ in } f^{a-\varepsilon}\ .$$

Consideriamo ora la restrizione Φ di r a $\overline{B}_0$. La mappa $\Phi : \overline{B}_0 \to X$ è continua ed è tale che

$$\Phi(u) = u \quad \text{per ogni } u \text{ in } S_0(0, R) \quad \text{e} \quad \Phi(B_0) \cap X_1 = \emptyset.$$

Ma questo contraddice il lemma 3.1. □

Se ora riconsideriamo il problema alla luce del metodo del "minimassimo", otteniamo una versione più precisa dell'enunciato e della sua dimostrazione.

3.3 % Teorema (Il teorema della sella e i minimassimi)
Con i simboli del precedente enunciato supponiamo ancora che:

a) $\sup f(S_0) < \inf f(X_1)$,

b) X_0 *abbia dimensione finita,*

e poniamo

$$c = \inf \{\sup f(\Phi(\overline{B}_0)) \mid \Phi \in C^0(\overline{B}_0, X),\ \Phi = Id \text{ su } S_0\}.$$

Allora:
a) $\inf f(X_1) \leq c \leq \sup f(B_0)$,
b) *se vale la* $(PS)c$ *esiste* u *in* X *tale che* $\mathrm{grad} f(u) = 0$ *e* $f(u) = c$.

DIMOSTRAZIONE
a) $c \leq \sup f(B_0)$ perché in $C^0(\overline{B}_0, \mathbb{R}^N)$ c'è anche l'identità su $\overline{B}_0$. Inoltre $c \geq \inf f(X_1)$ perché per ogni mappa continua $\Phi : \overline{B}_0 \to \mathbb{R}^N$ risulta che $\Phi(\overline{B}_0) \cap X_1 \neq \emptyset$, grazie al lemma 3.1.
b) Posto $a_0 = \sup f(S_0)$, la famiglia di insiemi

$$\{\Phi(\overline{B}_0) \mid \Phi \in C^0(\overline{B}_0, X),\ \Phi = Id \text{ su } S_0\},$$

è evidentemente stabile rispetto all'azione delle retrazioni di $\mathcal{R}_{f,a_0}$, dato che $S_0 \subseteq f^{a_0}$.
Inoltre, per la a) risulta che $a_0 < c$, per dato che per ipotesi $a_0 < \inf f(X_1)$.
In conclusione, per 2.1, c è un valore critico per f. □

4 Il teorema del passo di montagna

Il teorema del passo di montagna prende in esame una situazione molto frequente nello studio dei problemi differenziali non lineari. Questo teorema fa uso, naturalmente mediante il lemma di deformazione 1.5, di una proprietà topologica del tutto elementare, e cioè del fatto che una mappa continua trasforma insiemi connessi in insiemi connessi.

4.1 Teorema (Il "teorema del passo di montagna")
Supponiamo che
a) *esistano in* X *due punti* u_0 *e* u_1 *ed una sfera* $S = \{u \in X \mid ||u|| = R\}$, *per un certo* $R > 0$, *tali che*

$$||u_0|| < R,\ ||u_1|| > R,\ f(u_0) < \inf f(S),\ f(u_1) < \inf f(S),$$

b) *valga la condizione* $(PS)_c$ *per le* c *dell'intervallo* $[\inf f(S), \sup f \circ \gamma]$, *dove* $\gamma : [0,1] \to X$ *è una fissata curva continua che congiunge* u_0 *con* u_1.

Allora esiste un punto u *di* X *critico per* f *e tale che*

$$\inf f(S) \leq f(u) \leq \sup f \circ \gamma.$$

DIMOSTRAZIONE Se la tesi non fosse vera, posto $a = \inf f(S)$ e $b = \sup f \circ \gamma$, esisterebbe un $\varepsilon > 0$ tale che $f(u_1) < a - \varepsilon$ ed $f(u_2) < a - \varepsilon$ ed una retrazione r di f^b su $f^{a-\varepsilon}$. Ma in questo caso l'insieme $r \circ \gamma([0,1])$ non è connesso perché contiene u_0 e u_1 ma non interseca S. Questo è assurdo perché $\gamma([0,1])$ è connesso. □

Vale evidentemente la seguente affermazione.

4.2 Osservazione *Supponiamo che valgano le ipotesi a) del teorema* 4.1.

a) *Posto* $B = \{u \in X \mid ||u|| < R\}$*, se* $\inf f(B) > -\infty$ *e se vale la* $(PS)c$ *per ogni* c *con* $\inf f(B) \leq c \leq \inf f(S)$ *allora* f *ha minimo in* B (e questo livello critico è diverso da quello considerato nel precedente teorema).

b) *se* $\inf f(X \setminus B) > -\infty$ *e se vale la* $(PS)c$ *per tutti i livelli* c *tali che* $\inf f(X \setminus B) \leq c \leq \inf f(S)$ *allora* f *ha minimo in* $X \setminus B$ (e questo punto critico è diverso dai due precedenti).

La seguente versione con i minimassimi del teorema del passo di montagna è del tutto spontanea e può essere dimostrata per esercizio.

4.3 % Teorema (Il passo di montagna e i minimassimi)
Supponiamo che esistano in X *una sfera* $S = \{u \in X \mid ||u|| = R\}$*, per un certo* $R > 0$*, e due punti* u_0 *e* u_1*, tali che*

$$||u_0|| < R, \ ||u_1|| > R, \ f(u_0) < \inf f(S), \ f(u_1) < \inf f(S),$$

e poniamo $\quad c = \inf \{\sup f \circ \gamma \mid \gamma \in C^0(0,1;X), \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = u_1\}.$

Allora:
a) $\inf f(S) \leq c$,
b) *se vale* $(PS)_c$ *allora* c *è valore critico per* f.

5 Il teorema di allacciamento

Si può dire che il teorema di allacciamento o "linking" estende il teorema del passo di montagna passando da una situazione molto semplice dal punto di vista topologico ad una più complessa ma analoga a quella. Potremo infatti renderci conto che lo schema generale è in sostanza lo stesso.

Cominciamo con un lemma che mette in evidenza in le proprietà topologiche che sono alla base di questo teorema. In esso si considerano due sottospazi X_0 e X_1 di uno spazio di Hilbert X tali che $X = X_0 \oplus X_1$, un elemento non nullo e di X_0, e i seguenti insiemi:

$B_0 = \{u \in X_0 \mid ||u|| < \rho_0\}$,
$S_0 = \{u \in X_0 \mid ||u|| = \rho_0\}$,
$B_1 = \{u \in span(e) \oplus X_1 \mid ||u - e|| < \rho_1\}$,
$S_1 = \{u \in span(e) \oplus X_1 \mid ||u - e|| = \rho_1\}$.

5.1 Lemma *Supponiamo che:*
a) *le sfere* S_0 *e* S_1 *siano "allacciate", e cioè che valga la condizione*

5.1.1 $$-\rho_0 < ||e|| - \rho_1 < \rho_0 < ||e|| + \rho_1.$$

b) X_0 *abbia dimensione finita.*

Allora:
a) *per ogni mappa continua* $\Phi : \overline{B}_0 \to X$ *tale che* $\Phi(u) = u$ *per ogni* u *di* S_0*, risulta che* $\Phi(B_0) \cap S_1 \neq \emptyset$*,*
b) *per ogni mappa continua (omotopia)* $\mathcal{H} : [0,1] \times S_0 \to X$ *con le proprietà*

$$\mathcal{H}(0,u) = u,\ \mathcal{H}(t,u) \notin S_1, \quad \textit{per ogni } u \textit{ in } S_0 \textit{ e per ogni } t \textit{ in } [0,1],$$

risulta che $\mathcal{H}(1, S_0) \cap B_1 \neq \emptyset$*.*

È utile premettere alla dimostrazione di questo lemma una osservazione ovvia ma utilissima.

5.2 Osservazione *Se nel lemma precedente si sostituiscono lo spazio* X *con uno spazio topologico* X' *e gli insiemi* B_0, S_0, B_1 *e* S_1 *con quattro sottoinsiemi* B_0', S_0', B_1' *e* S_1' *di* X'*, e se esiste un omeomorfismo di* X *in* X' *che trasforma (nell'ordine) questi ultimi insiemi nei precedenti, allora la tesi continua evidentemente a valere.*

5.3 Dimostrazione del lemma 5.1
I passo) Grazie alla precedente osservazione possiamo supporre che X_0 e X_1 siano spazi ortogonali, e che $||e|| \geq \rho_0$.
Sia Q la proiezione ortogonale su $span(e) \oplus X_1$ e poniamo $P = Id - Q$. Di conseguenza $P(X) = \mathrm{Ker} Q$ e dunque $P(X)$ è ortogonale al vettore e e $P(X) \oplus span(e) = X_0$.
Consideriamo ora la mappa $\Psi : X \to X_0$ così definita:

$$\Psi(u) = P(u) + (||e|| - ||Q(u) - e||)\ \frac{e}{||e||}, \text{ per ogni } u \text{ di } X.$$

e poniamo $y_0 = (||e|| - \rho_1)\frac{e}{||e||}$.

Osserviamo che $y_0 \in B_0$, dato che per ipotesi $-\rho_0 < ||e|| - \rho_1 < \rho_0$. Riguardo alla Ψ ci interessano le seguenti sue proprietà:

5.3.1 $$\begin{cases} \text{se } u \in S_0 \text{ allora } \Psi(u) = u, \\ \text{se } u \in X \text{ e } \Psi(u) = \lambda\frac{e}{||e||}, \text{ allora } P(u) = 0 \text{ e } ||u - e|| = ||e|| - \lambda. \\ \quad \text{In particolare:} \\ \text{se } u \in X \text{ e } \Psi(u) = \lambda\frac{e}{||e||}, \text{ allora } \lambda \leq ||e||, \\ \text{se } u \in X \text{ e se } \Psi(u) = y_0, \text{ allora } u \in S_1. \end{cases}$$

Infatti, se $u \in \overline{B}_0$ allora esiste λ reale tale che $u = P(u) + \lambda e$, $Q(u) = \lambda e$ e $||Q(u)|| \leq \rho_0$. Dunque $|\lambda| \leq 1$ perché $\rho_0 \geq ||\lambda e|| = |\lambda|\ ||e|| \geq |\lambda|\ \rho_0$. Di conseguenza:

$$\Psi(u) = P(u) + (||e|| - ||\lambda e - e||)\ \frac{e}{||e||} = P(u) + (||e|| - |\lambda - 1|\ ||e||)\ \frac{e}{||e||} =$$

$$= P(u) + (||e|| - (1-\lambda)||e||)\ \frac{e}{||e||} = P(u) + \lambda e = u.$$

Se poi $\Psi(u) = \lambda \frac{e}{||e||}$ per un certo u di X, allora $P(u) = 0$, e cioè $u = Q(u)$, $u \in X_1 \oplus span(e)$ e inoltre $||e|| - ||u - e|| = \lambda$.

II passo) Per dimostrare la **a)** consideriamo la mappa $\tilde{\Phi} = \Psi \circ \Phi : \overline{B}_0 \to X_0$. Se $u \in S_0$ allora $\tilde{\Phi}(u) = \Psi \circ \Phi(u) = \Psi(u) = u$, per la prima delle proprietà 5.3.1. Di conseguenza $deg(y_0, \tilde{\Phi}, B_0) = 1$ e dunque esiste u in B_0 tale che $\tilde{\Phi}(u) = y_0$. Allora, per l'ultima delle proprietà 5.3.1, $\Phi(u) \in S_1$.

III passo) Per la **b)** consideriamo l'omotopia $\tilde{\mathcal{H}} = \Psi \circ \mathcal{H} : [0,1] \times S_0 \to X_0$. Dalle proprietà di Ψ e di $\mathcal{H}$ segue evidentemente che $\tilde{\mathcal{H}}(0,u) = u$ per ogni u e $y_0 \neq \tilde{\mathcal{H}}(t,u)$ per ogni (t,u). Di conseguenza $deg(y_0, \tilde{\mathcal{H}}(1,\cdot), B_0) = 1$.
D'altra parte dalle ipotesi segue che il punto $y_1 = (||e|| + \rho_1)\frac{e}{||e||}$ non sta in $\overline{B}_0$. Inoltre $\tilde{\mathcal{H}}(t,u) \neq y_1$ per ogni (t,u) di $[0,1] \times S_0$ perché $y_1 \notin \Psi(X)$, per la penultima delle 5.3.1. Dunque $deg(y_1, \tilde{\mathcal{H}}(1,\cdot), B_0) = 0$.
Se ne deduce che esistono α_0 in $]||e|| - \rho_1, ||e|| + \rho_1[$ e u in S_0 tali che $\alpha_0 \frac{e}{||e||} = \tilde{\mathcal{H}}(1,u)$. Dalla seconda delle 5.3.1 segue allora che $P(\mathcal{H}(1,u)) = 0$ e $||\mathcal{H}(1,u) - e|| = ||e|| - \alpha_0 < \rho_1$. Cioè $\mathcal{H}(1,u) \in B_1$. □

Possiamo ora esporre e provare il teorema di allacciamento.

5.4 Teorema (Il "teorema di allacciamento")
Supponiamo che:

a) $$-\rho_0 < ||e|| - \rho_1 < \rho_0 < ||e|| + \rho_1$$

b) $$\sup f(S_0) < \inf f(S_1),$$

c) *X_0 ha dimensione finita.*

Allora:
a) *se vale la $(PS)c$ per ogni c di $[\inf f(S_1), \sup f(B_0)]$, in tale intervallo esiste un livello critico per f,*
b) *se $\inf f(B_1) > -\infty$ e se vale $(PS)c$ per le c di $[\inf f(B_1), \sup f(S_0)]$, in tale intervallo esiste un livello critico per f.*

Dimostrazione
Per la **a)** poniamo $a = \inf f(S_1)$ e $b = \sup f(B_0)$. Supponiamo per assurdo che la tesi non valga. In questa ipotesi, per il lemma di deformazione 1.5, esistono un $\varepsilon > 0$ con $a < b - \varepsilon$, ed una retrazione r di f^b su $f^{a-\varepsilon}$. Allora

$\overline{B}_0 \subseteq f^b$, $S_0 \subseteq f^{a-\varepsilon}$ e $f^{a-\varepsilon} \cap S_1 = \emptyset$. Allora la restrizione Φ di r a $\overline{B}_0$ è tale che $\Phi(u) = u$ per ogni u di S_0 e però $\Phi(B_0) \cap S_1 = \emptyset$, in contraddizione con la tesi **a)** del lemma 5.1.
Per la **b)** poniamo $a' = \inf f(B_1)$ e $b' = \sup f(S_0)$ e assumiamo per assurdo l'ipotesi che la tesi non valga. Allora, per il lemma di deformazione 1.5, esistono $\varepsilon > 0$ ed una omotopia $\mathcal{H} : [0,1] \times f^{b'} \to f^{b'}$, con le proprietà: $\mathcal{H}(0,u) = u$ per ogni u, $\mathcal{H}(1,u) \in f^{a'-\varepsilon}$ per ogni u e $\mathcal{H}(1,u) = u$ per ogni u di $f^{a'-\varepsilon}$. D'altra parte $S_0 \subseteq f^{b'}$, $f^{b'} \cap S_1 = \emptyset$ e $f^{a'-\varepsilon} \cap \overline{B}_1 = \emptyset$.
Dunque la restrizione $\tilde{\mathcal{H}}$ di $\mathcal{H}$ a $[0,1] \times S_0$ ha le proprietà: $\tilde{\mathcal{H}}(0,u) = u$ per ogni u, $\tilde{\mathcal{H}}(t,u) \notin S_1$ per ogni (t,u), $\tilde{\mathcal{H}}(1,S_0) \cap B_1 = \emptyset$, in contraddizione con la **b)** del lemma 5.1. □

Anche di questo enunciato possiamo dare una versione con i minimassimi e ne lasciamo al lettore la semplice dimostrazione. Naturalmente occorre servirsi del lemma di deformazione e del lemma 5.1.

5.5 % Teorema (Il teorema di allacciamento e i minimassimi)
Assumiamo le seguenti ipotesi:

a) $$-\rho_0 < ||e|| - \rho_1 < \rho_0 < ||e|| + \rho_1$$

b) $$\sup f(S_0) < \inf f(S_1),$$

c) *X_0 ha dimensione finita.*

Allora:
a) *posto* $c = \inf \{\sup f \circ \Phi(B_0) \mid \Phi \in C^0(\overline{B}_0, X), \Phi(u) = u \text{ se } u \in S_0\}$,

risulta che $$\inf f(S_1) \le c \le \sup f(B_0),$$

e se per tale c vale la $(PS)_c$ allora c è valore critico per f;

b) *posto* $c = \inf \{\sup f \circ \Phi(S_0) \mid \Phi \in C^0(S_0, X), \Phi \text{ omotopa a } Id \text{ in } f^{c_0}\}$,

dove $c_0 = \sup f(S_0)$,

risulta che $$\inf f(B_1) \le c \le \sup f(S_0),$$

e se $c > -\infty$ e vale la $(PS)_c$ allora c è valore critico per f. □

Grazie all'osservazione 5.2 è evidente che anche nel teorema di allacciamento conta solo la struttura topologica degli insiemi in gioco.

5.6 Osservazione *Se nel teorema di allacciamento* 5.4 *si sostituiscono gli insiemi B_0, S_0, B_1 e S_1 con quattro sottoinsiemi B_0', S_0', B_1' e S_1' di X, ed esiste un omeomorfismo di X in X che trasforma (nell'ordine) questi ultimi insiemi nei precedenti, allora la tesi continua evidentemente a valere.*

6 Un secondo lemma di deformazione

Nei paragrafi successivi ci soffermeremo un poco su un punto di vista, in un certo senso complementare rispetto a quello adottato fin qui. Noi metteremo in relazione la struttura globale della varietà sulla quale un funzionale f è definito, con alcune caratteristiche di f e con il numero dei suoi punti stazionari. Considereremo in particolare due diversi casi. Per questo studio ci occorrerà un secondo lemma di deformazione.

Consideriamo di nuovo un funzionale $f : X \to \mathbb{R}$ di classe C^1, dove X è uno spazio di Hilbert o più in generale, una varietà riemanniana di classe C^2, completa e priva di bordo, di dimensione finita o infinita.

6.1 Il "secondo lemma di deformazione"
Dato c in $\mathbb{R}$ sia Z_c l'insieme dei punti critici u di f con $f(u) = c$ e sia V un intorno aperto di Z_c.
Allora, se per tale c vale la $(PS)c$, esistono $\varepsilon > 0$ ed una mappa continua $\mathcal{H} : [0,1] \times (f^{c+\varepsilon} \setminus V) \to f^{c+\varepsilon}$, con le proprietà:

$$\mathcal{H}(0,u) = u \quad e \quad \mathcal{H}(1,u) \in f^{c-\varepsilon}, \quad per\ ogni\ u\ di\ f^{c+\varepsilon} \setminus V.$$

Dimostrazione Limitiamoci e dimostrare il lemma nell'ipotesi che f sia di classe C^2.
I passo) Sia U un intorno aperto di Z_c con le proprietà:

$$\overline{U} \subseteq V \quad \text{e} \quad \inf\{|u - v| \mid u \in X \setminus V,\ v \in U\} = \delta > 0.$$

È facile vedere che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\inf\{||\text{grad} f(u)|| \mid u \in X \setminus U, f(u) \in [c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0]\} = \sigma > 0.$$

Infatti, se non fosse vero esisterebbe una successione $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ in $X\setminus U$ tale che $||\text{grad} f(u_h)|| \to 0$ e $f(u_h) \to c$. Allora, per la $(PS)_c$, una sottosuccessione di $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ convergerebbe ad un punto critico u dell'insieme chiuso $X \setminus U$, con $f(u) = c$. Ma questo è assurdo.
II passo) Vediamo ora che se ε è un numero tale che $0 < 2\varepsilon < \delta\sigma$ e $\varepsilon \le \varepsilon_0$, allora, per ogni u di $f^{c+\varepsilon}\setminus V$ con $f(u) \ge c-\varepsilon$, la soluzione $\mathcal{U}(t)$ del problema:

6.1.1 $$\mathcal{U}' = -\frac{\text{grad} f(\mathcal{U})}{||\text{grad} f(\mathcal{U})||^2}, \qquad \mathcal{U}(0) = u.$$

(che abbiamo già incontrato nella dimostrazione del primo lemma di deformazione) è definita in tutto l'intervallo $[0, f(u) - (c - \varepsilon)]$. Per questo basta mostrare che per le t di tale intervallo $\mathcal{U}(t)$ non entra in U, e per il resto si può procedere con le considerazioni standard già usate in 1.5. Infatti se questa affermazione fosse falsa esisterebbe un primo istante t, con

$0 < t \leq f(u) - (c - \varepsilon)$, tale che $\mathcal{U}(t) \in \overline{U}$. Ma nell'intervallo $[0, t]$ la lunghezza della curva non è sufficiente a coprire la distanza da u (che non sta in V) a U perché

$$\int_0^t |\mathcal{U}'(\tau)| \, d\tau = \int_0^t \frac{1}{||\text{grad} f(\mathcal{U}(\tau)||} \, d\tau \leq \frac{1}{\sigma}(f(u) - (c - \varepsilon)) \leq \frac{1}{\sigma} 2\varepsilon < \delta.$$

II passo) Basta ora osservare che se $u \in f^{c+\varepsilon} \setminus V$ e $f(u) \geq c - \varepsilon$ la soluzione $\mathcal{U}$ di 6.1.1 è tale che $f \circ \mathcal{U}(t) = f(u) - t$. Per la tesi è ora sufficiente definire $\mathcal{H} : [0, 1] \times f^{c+\varepsilon} \setminus V \to f^{c+\varepsilon}$ nel seguente modo

$$\mathcal{H}(t, u) = \mathcal{U}(t \; (f(u) - (c - \varepsilon))^+). \qquad \square$$

6.2 % Osservazione *Il lemma precedente può essere così precisato: se $c \in \mathbb{R}$, se V è un intorno di Z_c e se vale $(PS)_c$, esistono $\varepsilon > 0$ ed una mappa continua $\mathcal{H} : [0, 1] \times ((f^{c+\varepsilon} \setminus V) \cup f^{c-\varepsilon}) \to f^{c+\varepsilon}$, con le proprietà:*

$$\mathcal{H}(0, u) = u \quad e \quad \mathcal{H}(1, u) \in f^{c-\varepsilon}, \quad \textit{per ogni } u \textit{ di } f^{c+\varepsilon} \setminus V$$

$$e \quad \mathcal{H}(t, u) = u \quad \textit{per ogni } u \textit{ di } f^{c-\varepsilon} \textit{ e per ogni } t.$$

7 Il genere

Abbiamo visto che con la teoria del grado viene assegnato un numero naturale alle mappe continue $\Phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, dove Ω è un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$, rispetto ai punti y di $\mathbb{R}^N$.
Anche agli spazi topologici, come è noto, si possono associare numeri interi, o successioni di numeri interi (o più in generale successioni di gruppi). Una situazione tipica di questo genere si presenta quando si vuole dare un indice della "complessità topologica" di uno spazio, per distinguere per esempio le proprietà topologiche della palla, da quelle della sfera e queste da quelle del toro. Per questo sono state formulate appropriate e belle teorie, come la teoria dell'homologia, della cohomologia, dell'homotopia, eccetera.

Nel cosiddetto calcolo delle variazioni la complessità della struttura di uno spazio topologico riveste un'importanza cruciale. Se infatti si considera una funzione reale f definita su uno spazio X, e si assumono alcune ipotesi abbastanza naturali su f e su X allora il numero dei punti stazionari (o critici) di f è collegato alla complessità di X, nel senso che, *quale che sia* f, nel quadro delle ipotesi della teoria è possibile dare una valutazione per difetto del numero dei punti stazionari di f che cresce con la complessità di X. Le teorie che prendono in esame questo tipo di problemi sono varie, e ne vedremo alcune.

Qui vogliamo cominciare considerando uno dei procedimenti che considerano uno spazio topologico dotato di una certa simmetria e proprio in relazione a questa assegnano allo spazio un certo numero intero. Questo approccio è molto utile in alcune situazioni molto interessanti, nelle quali anche il funzionale definito sullo spazio presenta una simmetria che si accorda con quella dello spazio.
Il caso più semplice, che tuttavia conduce a risultati famosi e sorprendenti, è quello della "simmetria antipodale". È questa la situazione alla quale ora ci dedichiamo.

• La definizione di genere e alcune proprietà

Consideriamo uno spazio normato E, e denotiamo con Γ la classe dei sottoinsiemi A di $E \setminus \{0\}$ che sono chiusi in E (basterebbe che siano chiusi in $E \setminus \{0\}$) e tali che se $u \in A$ anche $-u \in A$.

7.1 Definizione
Se $A \in \Gamma$ e $A \neq \emptyset$ diciamo "genere" di A, e denotiamo con $\gamma(A)$, il minimo intero naturale k tale che esista una mappa $\Phi : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ continua e dispari. Se tale k non esiste poniamo $\gamma(A) = +\infty$.
Se $A = \emptyset$ poniamo $\gamma(A) = 0$.

Naturalmente la definizione ora data non cambia se si impone che la mappa Φ sia a valori nella sfera S^{k-1} di $\mathbb{R}^k$: basta eventualmente comporre le Φ con la retrazione $\pi : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to S^{k-1}$ definita da $\pi(x) = \frac{x}{|x|}$.
Indicheremo con $|\ |$ un assegnato modulo in $\mathbb{R}^k$.

Vediamo subito alcune proprietà della mappa $\gamma : \Gamma \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ che giocano un ruolo chiave nel "calcolo delle variazioni non lineare".

7.2 Proposizione Alcune proprietà del genere

a) *Se* $A \in \Gamma$ *allora* $\gamma(A) = 0$ *se e solo se* $A = \emptyset$.

b) *Siano* A *e* B *insiemi di* Γ. *Se* $\Phi : A \to B$ *è una mappa continua e dispari allora* $\gamma(A) \leq \gamma(B)$. *In particolare, se* $A \subseteq B$ *allora* $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

c) *Se* A *e* B *stanno in* Γ *allora* $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.

d) *Se* $A \in \Gamma$ *esiste un intorno aperto* U *di* A *tale che: se* $u \in U$ *allora* $-u \in U$ *e* $0 \notin \overline{U}$ *(dunque* $\overline{U} \in \Gamma$*) e* $\gamma(\overline{U}) = \gamma(A)$.

Dimostrazione La a) è evidente. Per la b) basta osservare che se per un certo k in $\mathbb{N}$ esiste una mappa $\Psi : B \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ continua e dispari, allora $\Psi \circ \Phi : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ è una mappa continua e dispari.
Par la c) supponiamo che, per certi numeri h e k in $\mathbb{N}$, esistano due mappe $\Phi_1 : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ e $\Phi_2 : B \to \mathbb{R}^h \setminus \{0\}$ continue e dispari e indichiamo con $\tilde{\Phi}_1 : A \cup B \to \mathbb{R}^h$ e $\tilde{\Phi}_2 : A \cup B \to \mathbb{R}^k$ le rispettive estensioni continue e dispari (esistono perché A e B sono chiusi). Allora resta definita la mappa $\Phi = (\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2) : A \cup B \to \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$. Φ è continua e dispari e inoltre per ogni u di $A \cup B$ risulta che $\Phi(u) \neq 0$ perché o $\Phi_1(u) \neq 0$ o $\Phi_2(u) \neq 0$.
Infine, per dimostrare la d) possiamo supporre che A non sia vuoto e abbia genere finito k e sia $\Phi : A \to S^{k-1}$ una mappa continua e dispari. Sappiamo che esiste una estensione continua e dispari $\tilde{\Phi} : E \to \mathbb{R}^k$ di Φ. Poniamo allora $U = \{u \in E \mid |\tilde{\Phi}(u)| > \frac{1}{2}\}$. Evidentemente U è un insieme aperto e simmetrico rispetto a 0 che contiene A e $\overline{U} \in \Gamma$. Il resto è ovvio. $\square$

7.3 Osservazione

a) *Se* A *è un sottoinsieme finito e non vuoto di* $E \setminus \{0\}$, *simmetrico rispetto a* 0, *allora* $\gamma(A) = 1$.

b) *Se* $E = \mathbb{R}^N$ *allora per ogni* A *di* Γ $\gamma(A) \leq N$.

Dimostrazione Per la a) basta osservare che se $A = \{x_1, -x_1, \ldots, x_k, -x_k\}$ e $x_i \neq 0$ per ogni i, allora è ben definita e continua la mappa $\Phi : A \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che vale 1 sui punti x_i e -1 sui punti $-x_i$.
Per la b) basta considerare su A la mappa $\Phi = Id$. $\square$

La a) della precedente osservazione ammette una generalizzazione assai utile.

7.4 Osservazione *Se $A \in \Gamma$ e $A \neq \emptyset$ allora $\gamma(A)$ è il minimo degli interi k tali che esistano k insiemi chiusi A'_i tali che $A'_i \cap -A'_i = \emptyset$ e $A = \cup_i (A'_i \cup -A'_i)$.*

Dimostrazione
Supponiamo che $\gamma(A) \leq k$ per un certo k in $\mathbb{N}$ con $k \geq 1$. Dunque esiste una mappa $\Phi : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ continua e dispari. Se indichiamo con Φ_i la componente i-esima di Φ possiamo supporre che $(\sum_i \Phi_i^2(u))^{\frac{1}{2}} \geq N$ per ogni u di A. Poniamo ora $A'_i = \{u \in A \mid \Phi_i(u) \geq 1\}$.
Poiché Φ è dispari risulta che $A'_i \cup -A'_i = \{u \in A \mid |\Phi_i(u)| \geq 1\}$. Inoltre è evidente che $A'_i \cap -A'_i = \emptyset$ e per ogni u di A esiste i tale che $|\Phi_i(u)| \geq 1$. Dunque $A = \cup_i (A'_i \cup -A'_i)$.
Se viceversa esistono k insiemi A'_i con le proprietà indicate nell'enunciato, è evidente che per ogni i esiste una mappa continua e dispari $\Phi_i : A \to \mathbb{R}$ tale che $\Phi(u) = 1$ se $u \in A'_i$ e $\Phi(u) = -1$ se $u \in -A'_i$. Allora la mappa continua $\Phi : A \to \mathbb{R}^N$ definita da $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$ è dispari e $\Phi(u) \neq 0$ per ogni u di A. □

Da quanto ora visto si deduce immediatamente la seguente proprietà dei sottoinsiemi compatti di E.

7.5 Osservazione *Se K è un sottoinsieme di E compatto e simmetrico rispetto a 0 e $0 \notin K$, allora $\gamma(K) < +\infty$.*

È evidentemente molto importante poter valutare il genere di alcuni insiemi che intervengono in modo significativo in matematica. Il risultato che segue è molto importante nel calcolo delle variazioni.

7.6 Teorema Il genere della sfera
Se Ω è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ aperto, limitato e simmetrico rispetto all'origine e se $0 \in \Omega$ allora $\gamma(\partial\Omega) = N$.
Di conseguenza, se E è uno spazio normato avente infinite dimensioni e se Ω è un sottoinsieme di E aperto, limitato e simmetrico rispetto all'origine allora $\gamma(\partial\Omega) = +\infty$.
In particolare, se S è la sfera in $\mathbb{R}^N$ con centro in 0 allora $\gamma(S) = N$.

Dimostrazione Sappiamo che $\gamma(\partial\Omega) \leq N$. D'altra parte, per il teorema di Borsuk, se $\Phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}^k$ è una mappa continua e dispari e $k < N$ risulta che $0 \in \Phi(\partial\Omega)$. □

• Il genere e il calcolo delle variazioni

Sia ora E uno spazio di Hilbert, ad esempio $\mathbb{R}^N$, sia X una sottovarietà di E di classe C^2, completa e priva di bordo che non contenga 0 e sia simmetrica rispetto a 0: cioè se $u \in X$ anche $-u \in X$. Considereremo una funzione

$f : X \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e supporremo che f sia una funzione pari, e cioè: $f(u) = f(-u)$ per ogni u di X.

7.7 Osservazione

Poiché f è pari per ogni c in $\mathbb{R}$ i sottolivelli f^c di f stanno in Γ e per ogni u di X $\mathrm{grad}_X f(-u) = -\mathrm{grad}_X f(u)$.
Di conseguenza le retrazioni che sono oggetto dei lemmi di deformazione 1.5 e 6.1 sono evidentemente mappe dispari e lo stesso vale per tutte le mappe che costituiscono le omotopie ad esse associate.

Le proprietà del genere messe in evidenza in 7.2 e l'osservazione ora fatta implicano il seguente enunciato cruciale.

7.8 Proposizione *Siano a e b due numeri reali tali che $a < b$ e supponiamo che valga la $(PS)_c$ per ogni c di $[a, b]$.*
Se $\gamma(f^a) \neq \gamma(f^b)$ allora esiste un livello critico per f in $[a, b]$.

DIMOSTRAZIONE Se la tesi non fosse vera per il primo lemma di deformazione 1.5 e per quanto appena osservato esisterebbe una retrazione dispari r di f^b in f^a. Di conseguenza risulterebbe che $\gamma(f^b) = \gamma(f^a)$. □

Possiamo subito vedere un esercizio che ci introduce al metodo generale che esponiamo nel seguito.

7.9 Esercizio *Sia f una funzione di classe C^1 definita sulla sfera S di $\mathbb{R}^N$ con centro in 0 e supponiamo che f sia pari e tale che l'insieme X_m dei suoi punti di minimo sia finito o almeno abbia genere uguale a 1.*
Allora, per ogni sfera S' con centro in 0 che sia contenuta in S e abbia dimensione diversa da 0, esiste un livello critico per f nell'intervallo $]\inf f, \sup f(S')[$.

SUGGERIMENTO Posto $c = \sup f(S')$, risulta che $m < c$ altrimenti $S \subseteq X_m$ e allora $\gamma(X_m) \geq 2$. Ma per la d) di 7.2 si può verificare che esiste c_1 in $]\inf f, c[$ tale che $\gamma(f^{c_1}) = 1$. Dal fatto che $\gamma(f^c) \geq 2$ segue la tesi. □

Per cercare un collegamento generale fra il genere di X e il numero dei punti critici di una funzione pari f definita su X, introduciamo ora alcuni valori che, sulla scorta del primo lemma di deformazione, possiamo dire siano candidati livelli critici per f. In un certo senso essi sono i "livelli critici essenziali" di f rispetto al genere.

7.10 Definizione *Per ogni k in $\mathbb{N}$ tale che $1 \leq k \leq \gamma(X)$ poniamo:*

$$\gamma_k = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \gamma(f^c) \geq k\}.$$

Si noti che può accadere che per nessun numero reale c risulti $\gamma(f^c) \geq k$. In questo caso risulta che $\gamma_k = +\infty$ ($\inf \emptyset = +\infty$) e deve essere $\sup f = +\infty$. Vediamo subito che i numeri γ_k sono in realtà dei minimassimi.

7.11 Osservazione *Per ogni k in $\mathbb{N}$ tale che $1 \leq k \leq \gamma(X)$*

$$\gamma_k = \inf \{\sup f(A) \mid A \in \Gamma, \gamma(A) \geq k\}.$$

Dimostrazione Indichiamo per il momento con γ'_k il minimassimo a destra dell'uguaglianza. Poichè per ogni c in $\mathbb{R}$ risulta che $f^c \in \Gamma$ e $\sup f(f^c) \leq c$, si ha: $\gamma'_k \leq \gamma_k$. Per la disuguaglianza inversa risulta ora che essa è senz'altro vera se $\gamma'_k = +\infty$. Se invece $\gamma'_k < +\infty$ possiamo dire che esistono insiemi A di Γ tali che $\gamma(A) \geq k$ e $\sup f(A) < +\infty$. Di conseguenza, per ogni insieme A di questo tipo, posto $c = \sup f(A)$, risulta che $\gamma(f^c) \geq k$ e dunque $\gamma_k \leq c$. Questo prova la tesi. $\square$

Il lemma che segue contiene già tutti gli elementi essenziali del collegamento fra genere e punti stazionari.

7.12 Lemma *Sia k un intero tale che $1 \leq k \leq \gamma(X)$. Allora*
a) $\inf f = \gamma_1 \leq \ldots \leq \gamma_k \leq \ldots \leq \sup f$;
b) *se $\gamma_k \in \mathbb{R}$ e se vale la $(PS)_{\gamma_k}$ allora γ_k è livello critico per f; se in particolare $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ allora $\gamma_1 = \min f$;*
c) *se $\gamma_k = \gamma_{k+1} = \ldots = \gamma_{k+h} \in \mathbb{R}$, per un certo $h \geq 1$ in $\mathbb{N}$, e se vale la $(PS)_{\gamma_k}$, allora l'insieme Z_{γ_k} dei punti critici di f al livello γ_k è tale che*

$$\gamma(Z_{\gamma_k}) \geq h + 1$$

e dunque Z_{γ_k} è un insieme infinito.

Dimostrazione
Per la a) vediamo che $\gamma_k \leq \sup f$. Per questo basta osservare che se un numero reale c è tale che $c > \sup f$, allora $\gamma(f^c) = \gamma(f^{c-\varepsilon})(= \gamma(X))$, per qualche opportuno $\varepsilon > 0$. Il resto della a) è ancora più semplice.
Per la b) basta osservare che se γ_k non fosse un valore critico per f allora per il primo lemma di deformazione 1.5 esisterebbero $\varepsilon > 0$ ed una retrazione r di $f^{\gamma_k+\varepsilon}$ in $f^{\gamma_k-\varepsilon}$. Poiché f è pari r è dispari (vedi 7.7). Di conseguenza risulterebbe che $\gamma(f^{\gamma_k+\varepsilon}) \leq \gamma(f^{\gamma_k-\varepsilon})$. Ma questo contraddice la definizione di γ_k. Il resto è ovvio.
Verifichiamo la c). Evidentemente $Z_{\gamma_k} \in \Gamma$. Allora esiste un intorno aperto U di Z_{γ_k} tale che se $u \in U$ anche $-u \in U$, $\overline{U} \in \Gamma$ e $\gamma(U) = \gamma(Z_{\gamma_k})$. Per il secondo lemma di deformazione e la simmetria di f esistono $\varepsilon > 0$ ed una mappa dispari r di $f^{\gamma_k+\varepsilon} \setminus U$ in $f^{\gamma_k-\varepsilon}$. Allora:

$$k + h \leq \gamma(f^{\gamma_k+\varepsilon}) \leq \gamma(\overline{U}) + \gamma(f^{\gamma_k+\varepsilon} \setminus U) \leq$$

$$\leq \gamma(Z_{\gamma_k}) + \gamma(f^{\gamma_k - \varepsilon}) \leq \gamma(Z_{\gamma_k}) + k - 1. \qquad \square$$

Da questo lemma si deducono in modo evidente i seguenti enunciati.

7.13 Proposizione *Supponiamo che a e b siano due numeri reali tali che $a < b$ e che valga la $(PS)_c$ per ogni c di $[a, b]$. Allora*

$\gamma(f^b) \leq \gamma(f^a)+$ numero delle coppie $\{-u, u\}$ di punti critici di f che stanno in $f^{-1}([a, b])$.

Possiamo dunque enunciare un risultato assai famoso dovuto ai due autori che per primi introdussero (mediante la nozione di "categoria" che vedremo più avanti) questi concetti.

7.14 Teorema (Lusternik e Schnirelman)
Se X è una varietà compatta allora f ha massimo e minimo ed ha almeno $\gamma(X)$ coppie $\{-u, u\}$ di punti critici.
In particolare ogni funzione pari e di classe C^1 definita sulla sfera $S(0, 1)$ di R^N ha almeno N coppie $\{-u, u\}$ di punti stazionari.

Più in generale da 7.12 si deduce immediatamente l'enunciato che segue.

7.15 Teorema *Se la funzione f è limitata e verifica la $(PS)_c$ per ogni c in $[\inf f, \sup f]$, allora f ha massimo e minimo ed ha almeno $\gamma(X)$ coppie $\{-u, u\}$ di punti critici.*

Se si assume l'ipotesi che i punti critici di f siano in numero finito dal lemma 7.12 segue evidentemente un altro fatto interessante.

7.16 Osservazione *Se nei due precedenti teoremi si aggiunge l'ipotesi che i punti critici di f siano in numero finito, allora f ammette $\gamma(X)$ livelli critici.*

7.17 Esercizio *Supponiamo che X sia uno spazio di Hilbert e che X_0 e X_1 siano due suoi sottospazi tali che $X = X_0 \oplus X_1$ e $dim X_0 = N < +\infty$. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione pari e di classe C^1.*
Se S è una sfera in X_0 con centro in 0, supponiamo che f soddisfi le disuguaglianze:

$$\sup f(S) < \inf f(X_1) \qquad e \qquad \inf f > -\infty$$

e valga la (PS)c per ogni $c < \sup f(S)$.
Allora esistono N coppie $\{-u, u\}$ di punti critici per f con $f(u) \leq \sup f(S)$.

• Il caso delle varietà non compatte

Nello studio delle equazioni differenziali di tipo variazionale ci si riconduce (o ci si può ricondurre) allo studio del numero di punti stazionari di un opportuno funzionale definito su una sottovarietà X di uno "spazio di funzioni". È frequente il caso in cui X non è compatta e ha genere infinito. Vogliamo dedicare perciò a questo caso qualche ulteriore riflessione. Ci limitiamo a considerare una situazione che si incontra di frequente.

Premettiamo due considerazioni. Per cominciare notiamo che nelle ipotesi della proposizione 7.15 la varietà X ha genere finito. Vale infatti l'affermazione che segue.

7.18 Proposizione
Supponiamo che la funzione f sia inferiormente limitata e che, per un certo numero reale c_0, valga la $(PS)_c$ per ogni c con $c \leq c_0$. Allora $\gamma(f^{c_0}) < +\infty$.

Dimostrazione Dall'ipotesi segue evidentemente che l'insieme dei punti critici di f in f^{c_0} è compatto. Allora esiste un intorno aperto V di tale insieme, simmetrico rispetto a 0 e tale che $\gamma(\overline{V}) < +\infty$. Poniamo poi $m = \inf f$. Per il secondo lemma di deformazione sappiamo che per ogni c in $[m, c_0]$ esistono $\varepsilon > 0$ ed una mappa continua e dispari $\Phi : f^{c+\varepsilon} \backslash V \to f^{c-\varepsilon}$. Allora esistono un numero finito di intervalli $[a_i, b_i]$, con $i = 0, 1, \ldots, k$, tali che per ogni i il sottolivello f^{a_i} contenga l'immagine di $f^{b_i} \setminus V$ secondo una mappa dispari e tali che $[m, c_0]$ sia contenuto in $\cup_i]a_i, b_i[$. Possiamo anche supporre che per ogni i fra 1 e k risulti $a_{i-1} < a_i < b_{i-1} < b_i$. Di conseguenza per ogni i con $1 \leq i \leq k$ risulta

$$\gamma(f^{b_i}) \leq \gamma(\overline{V}) + \gamma(f^{b_i} \setminus V) \leq \gamma(\overline{V}) + \gamma(f^{a_i}) \leq \gamma(\overline{V}) + \gamma(f^{b_{i-1}})$$

Dunque, dato che $f^{a_0} = \emptyset$, risulta che

$$\gamma(f^{c_0}) \leq \gamma(f^{b_k}) \leq k\ \gamma(\overline{V}) + \gamma(f^{b_0}) \leq (k+1)\ \gamma(\overline{V}). \qquad \square$$

La seconda considerazione è un semplice ritocco del primo lemma di deformazione, utile ad es. nel caso in cui $\sup f = +\infty$.

7.19 Osservazione *Supponiamo che f non abbia massimo e che, per un certo numero reale a, f non abbia punti critici u con $f(u) \geq a$. Supponiamo poi che valga la $(PS)_c$ per ogni c con $a \leq c < \sup f$.*
Allora f^a è retratto di deformazione di tutto X. Poiché f è pari la retrazione è dispari.

Dimostrazione Basta osservare che nella dimostrazione del primo lemma di deformazione 1.5 è sufficiente che per ogni assegnato punto iniziale u con $f(u) \geq a$ valga la $(PS)_c$ per ogni c in $[a, f(u)]$. □

A questo punto è a portata di mano un teorema che inquadra una situazione abbastanza frequente nello studio di alcune classi di equazioni differenziali di tipo variazionale.

7.20 Teorema *Se la funzione f, pari e di classe C^1, è inferiormante limitata e non ha massimo, e se vale la $(PS)_c$ per ogni c in $[\inf f, \sup f[$. Allora:*
a) *f ha minimo ed ha almeno $\gamma(X)$ coppie $\{-u, u\}$ di punti critici;*
b) *se $\gamma(X) = +\infty$ allora esiste una successione $(\{-u_k, u_k\})_{k\in\mathbb{N}}$ di coppie di punti critici di f tale che $\sup f(u_k) = \sup f$.*

Dimostrazione
Dimostriamo anzitutto la b). Supponiamo per assurdo che esista c_0 con $c_0 < \sup f$ tale che non esistano livelli critici maggiori di c_0. Allora dal lemma 7.19 segue che $\gamma(X) = \gamma(f^{c_0})$ e dalla proposizione 7.18 segue che $\gamma(X) < +\infty$.
Dimostriamo la a). Sappiamo già che $\gamma_1 = \min f$, perché per ipotesi vale la $(PS)_c$ con $c = \inf f$.
Supponiamo poi che f abbia un numero finito di punti critici. Allora esiste effettivamente c_0 con le proprietà: $c_0 < \sup f$ e non esistono livelli critici maggiori di c_0. Di conseguenza, per 7.19 risulta che $\gamma(X) = \gamma(f^{c_0})$, e da 7.13 segue che

$$\gamma(X) = \gamma(f^{c_0}) \leq \gamma(f^{\gamma_1 - 1}) + \text{ numero di punti critici } u \text{ con } f(u) \leq c_0.$$

Ma $\gamma(f^{\gamma_1-1}) = \gamma(\emptyset) = 0$. □

Vediamo subito una importante conseguenza di questo teorema.

7.21 Teorema *Se E è uno spazio di Banach di dimensione infinita sia $f : S \to \mathbb{R}$ una funzione pari e di classe C^1 definita sulla sfera S di E che ha centro in 0. Se f è inferiormante limitata e non ha massimo, e se vale la $(PS)_c$ per ogni c in $[\inf f, \sup f[$, allora:*
f ha infinite coppie $\{-u, u\}$ di punti critici ed esiste una successione di coppie $\{-u_k, u_k\}$ di punti critici per f tali che $\sup f(u_k) = \sup f$.

8 La categoria di Lusternik e Schnirelman

Ora vogliamo fare un cenno ad un procedimento che, anche in assenza di ipotesi di simmetria, assegna agli spazi topologici un numero intero che rappresenti, da un certo punto di vista, un indice della complessità della loro struttura. Si tratta della categoria di Lusternik e Schnirelman, della quale metteremo in evidenza, con l'aiuto del secondo lemma di deformazione, una proprietà fondamentale: se ad esempio lo spazio topologico X è una varietà regolare allora *ogni funzione regolare $f : X \to \mathbb{R}$, in presenza di condizioni di compattezza del tipo della (PS), ammette un numero di punti critici almeno pari alla categoria di X.*
Non occorre sottolineare l'importanza di questo fatto, e resta d'altra parte sorprendente la semplicità delle argomentazioni che lo sostengono. Naturalmente, in questo modo diventa molto importante il problema, spesso impegnativo, di valutare la categoria di X.

• La definizione di categoria e alcune proprietà

Sia dunque X uno spazio topologico. Secondo una abitudine abbastanza diffusa opereremo nella classe dei sottoinsiemi chiusi di X, ma altre scelte possono essere fatte.

8.1 Definizione *Se A è un sottoinsieme chiuso e non vuoto di X e $k \in \mathbb{N}^*$, diciamo che la categoria di A in X è k, e scriviamo $cat_X(A) = k$, se k è il minimo numero di insiemi F_i, chiusi e contrattili in X, tali che $A \subseteq \cup_i F_i$.
Se k non esiste poniamo: $cat_X(A) = +\infty$.
Inoltre poniamo: $cat_X(\emptyset) = 0$.*

Anche per la categoria valgono alcune proprietà che sono cruciali per il collegamento di questa nozione con il numero dei punti critici di un funzionale. Nell'elenco che segue, salvo l'ultima, le altre sono assai semplici e, come vedremo, sono spesso sufficienti da sole allo studio dei problemi concreti di analisi, anche perché l'ultima in molti casi diventa evidente. Per gli scopi di questo breve excursus noi ci limiteremo a dimostrare le prime tre.

8.2 Alcune proprietà della categoria di Lusternik e Schnirelman
Siano A e B sottoinsiemi chiusi di X. Allora:
a) *$cat_X(A) = 0$ se e solo se $A = \emptyset$,*
b) *$cat_X(A \cup B) \le cat_X(A) + cat_X(B)$,*
c) *se B contiene un deformato di A in X, e cioè esiste una mappa continua $\mathcal{H} : [0,1] \times A \to X$ tale che $\mathcal{H}(0,u) = u$ e $\mathcal{H}(1,u) \in B$ per ogni u di A, allora $cat_X(A) \le cat_X(B)$,
in particolare, se $A \subseteq B$ allora $cat_X(A) \le cat_X(B)$,*

d) *se X è (ad esempio) una varietà regolare, modellata su $\mathbb{R}^N$ (o su uno spazio di Banach), allora ogni sottoinsieme chiuso A di X ammette un intorno chiuso che ha in X la stessa categoria di A.*

DIMOSTRAZIONE
La a) è ovvia.
Per la b) basta la semplice osservazione che se $F_1, \dots, F_k$ e $F'_1, \dots, F'_h$ sono sottoinsiemi chiusi e contrattili di X tale che $A \subseteq \cup_i F_i$ e $B \subseteq \cup_i F'_i$ allora $A \cup B \subseteq (\cup_i F_i) \cup (\cup_i F'_i)$.
Per la c) osserviamo che se $F_1, \dots, F_k$ sono sottoinsiemi chiusi e contrattili di X che coprono B, gli insiemi $\tilde{F}_i = \{u \in A \mid \mathcal{H}(1,u) \in B\}$ sono chiusi in X, coprono evidentemente A e inoltre sono anche contrattili in X.
Per verificare quest'ultima affermazione basta considerare le omotopie che contraggono gli F_i, e cioè le mappe continue $\mathcal{H}_i : [0,1] \times F_i \to X$ tali che $\mathcal{H}_i(0,u) = u$ e $\mathcal{H}_i(1,u) = u_i$ per ogni u di F_i, dove u_i è un punto di X. Con le $\mathcal{H}_i$ possiamo definire le $\tilde{\mathcal{H}}_i : [0,2] \times \tilde{F}_i \to X$, nel seguente modo: per ogni u in $\tilde{F}_i$ poniamo $\tilde{\mathcal{H}}_i(t,u) = \mathcal{H}(t,u)$, se $t \in [0,1]$, $\tilde{\mathcal{H}}_i(t,u) = \mathcal{H}_i(t-1, \mathcal{H}(1,u))$, se $t \in [1,2]$. Le $\tilde{\mathcal{H}}_i$ sono continue perché $\mathcal{H}_i(0, \mathcal{H}(1,u)) = \mathcal{H}(1,u)$, e contraggono ogni insieme $\tilde{F}_i$ al punto u_i. $\square$

L'osservazione che segue è molto utile e il lettore può facilmente verificarla.

8.3 Osservazione *Supponiamo che X sia una varietà regolare. Allora:*
a) *ogni punto ammette un intorno chiuso e contrattile;*
b) *se X è anche connessa, allora ogni insieme finito ammette un intorno chiuso e contrattile;*
c) *se K è un sottoinsieme compatto di X allora $cat_X(K) < +\infty$.*

8.4 Esempi
a) $cat_{S^N}(S^N) = cat_{\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\}}(dove S^N) = 2$ ($S^N = \{u \in \mathbb{R}^{N+1} \mid |u| = 1\}$).
b) Il toro $T = S^1 \times S^1$ è tale che $cat_T(T) = 3$.

DIMOSTRAZIONE La **a)** è evidente, dato che sappiamo che S^N non è contrattile in sé. Della **b)** omettiamo la dimostrazione.

• La categoria e il calcolo delle variazioni

Consideriamo di nuovo una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ di classe C^1, dove X è uno spazio di Hilbert o più in generale, una varietà riemanniana, di classe C^2, completa e priva di bordo, di dimensione finita o infinita.
Possiamo cominciare introducendo mediante la categoria i candidati livelli critici di f, che potremmo chiamare i "livelli critici essenziali" di f rispetto alla categoria.

8.5 Definizione *Per ogni intero k tale che $1 \leq k \leq cat_X(X)$ poniamo:*

$$c_k = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid cat_X(f^c) \geq k\}.$$

Si noti che, secondo questa definizione, se k è un intero compreso fra 1 e $cat_X(X)$, risulta che $c_k = +\infty$ se e solo se non esiste nessun numero reale c tale che $cat_X(f^c) \geq k$. In questo caso evidentemente $\sup f = +\infty$.

Come nel caso del genere vale evidentemente l'osservazione che segue.

8.6 Osservazione *I livelli c_k che abbiamo qui introdotto sono dei mini-massimi:*

$$c_k = \inf\{\sup f(A) \mid A \subseteq X,\ cat_X(A) \geq k\}.$$

Dalle proprietà della categoria si deducono le seguenti proprietà dei c_k esattamente come nel caso del genere.

8.7 Lemma *Sia k un intero tale che $1 \leq k \leq cat_X(X)$. Allora*
a) $\inf f = c_1 \leq \ldots \leq c_k \leq \ldots \leq \sup f$*;*
b) *se $c_k \in \mathbb{R}$ e se vale la $(PS)_{c_k}$ allora c_k è livello critico per f; se in particolare $c_1 \in \mathbb{R}$ allora $c_1 = \min f$;*
c) *se $c_k = c_{k+1} = \ldots = c_{k+h} \in \mathbb{R}$, per un certo $h \geq 1$ in $\mathbb{N}$, e se vale la $(PS)_{c_k}$, allora l'insieme Z_{c_k} dei punti critici di f al livello c_k è tale che*

$$cat_X(Z_{c_k}) \geq h + 1.$$

In particolare Z_{c_k} è un insieme infinito.

Da questo lemma si deducono evidentemente i seguenti enunciati.

8.8 Proposizione*Supponiamo che a e b siano due numeri reali tali che $a < b$ e che valga la $(PS)_c$ per ogni c di $[a, b]$. Allora*

$$cat_X(f^b) \leq cat_X(f^a) + \text{ numero dei punti critici di } f \text{ in } f^{-1}([a, b]).$$

8.9 Teorema *Se X è una varietà compatta allora ogni funzione $f : X \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ammette $cat_X(X)$ punti stazionari.*

Più in generale, dal lemma 8.7 si deduce in modo immediato il seguente enunciato.

8.10 Teorema *Supponiamo che f sia limitata e che valga la $(PS)_c$ per ogni c di $[\inf f, \sup f]$. Allora f ha almeno $cat_X(X)$ punti critici.*

Se si suppone, come è naturale, che la varietà X sia connessa, si vede bene che per ottenere questi risultati non è necessario usare la proprietà **d)** del gruppo elencato in 8.2, che è l'unica di quelle che non abbiamo dimostrato. Infatti qui possiamo assumere l'ipotesi che i punti critici di f siano in numero finito e allora l'insieme Z_{c_k} dei punti critici di f a livello c_k è finito e la **d)** è ovvia per gli insiemi finiti, come mostra la 8.3.

Mediante 8.3 si può anche osservare, ad esempio, quanto segue.

8.11 Osservazione *Se nel teorema 8.9 si aggiunge l'ipotesi che X sia una varietà connessa e che i punti critici di f siano in numero finito, allora f ammette $cat_X(X)$ livelli critici.*

8.12 Esercizio *Supponiamo che X sia uno spazio di Hilbert e che X_0 e X_1 siano due suoi sottospazi tali che $X = X_0 \oplus X_1$ e $dim X_0 = N < +\infty$. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.*
Se W è un sottoinsieme aperto di X_0 contenente 0, supponiamo che f soddisfi le disuguaglianze:

$$\sup f(\partial W) < \inf f(X_1) \qquad e \qquad \inf f > -\infty$$

e valga la (PS)c per ogni $c < \sup f(\partial W)$.
Allora f ammette 2 punti critici u_1 e u_2, con $f(u_i) \leq \sup f(\partial W)$.

Come nel caso del genere, nelle ipotesi del teorema 8.10 la varietà X ha categoria finita. Vale infatti la seguente affermazione che si dimostra nello stesso modo.

8.13 Proposizione *Supponiamo che la funzione f sia inferiormente limitata e che valga la $(PS)_c$ per ogni numero reale c con $c \leq c_0$, per un certo numero reale c_0. Allora $cat_X(f^{c_0}) < +\infty$.*

Per poter operare anche con varietà aventi infinite dimensioni e categoria infinita ci serve uscire dall'ambito delle varietà compatte. È in effetti possibile, ed è molto utile, dare qualche enunciato "globale", del tipo ora visto nel caso compatto, che integra le proprietà messe finora in evidenza. Per vederlo basta ora aggiungere al primo lemma di deformazione una semplice riflessione già svolta nel caso del genere.

8.14 Osservazione *Dato il numero reale a, supponiamo che non ci siano punti critici u con $f(u) \geq a$ e che valga la $(PS)_c$ per ogni $c \geq a$.*
Allora f^a è retratto di deformazione di tutto X.

A questo punto è a portata di mano un teorema che inquadra una situazione abbastanza frequente negli spazi funzionali nei quali viene impostato lo studio di alcune classi di equazioni differenziali.

8.15 Teorema *Supponiamo che la funzione f sia inferiormante limitata, non abbia massimo e verifichi la $(PS)_c$ per ogni c in $[\inf f, \sup f[$. Allora:*
a) *f ha minimo ed ha almeno $cat_X(X)$ punti critici;*
b) *se $cat_X(X) = +\infty$ allora esiste una successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di punti critici di f tale che $\sup f(u_k) = \sup f$.*

- **% Un risultato famoso e brillante**

La nozione di categoria nacque insieme alle ricerche concernenti le funzioni pari sulla sfera e portarono al bellissimo teorema di Lusternik e Schnirelman. Tuttavia gli sviluppi delle ricerche mostrarono che quel punto di vista era ricco di potenzialità ancora maggiori. Ricordiamo qui un risultato brillantissimo, e anche molto impegnativo, che si può dire rappresenti un traguardo assai alto di queste ricerche. Questo risultato riguarda le linee geodetiche su una varietà.

Consideriamo per semplicità una sottovarietà M di $\mathbb{R}^N$, di classe C^2 e priva di bordo.

8.16 Definizione *Dati a e b in M con $a < b$, una curva $q : [a, b] \to M$ di classe C^2 è detta una "geodetica" su M se per ogni t di $[a, b]$ il vettore $\ddot{q}(t)$ è ortogonale al piano tangente a M in $q(t)$.*
Se poi, nell'intorno di M, è presente un "potenziale" V, che dà luogo al "campo di forze conservativo" $\mathbf{F} = -\mathrm{grad}V$, e introduciamo anche una "massa" $m > 0$, una curva q su M è una "geodetica su M di un punto di massa m rispetto al potenziale V", se per ogni t di $[a, b]$

il vettore $m\ddot{q}(t) + \mathrm{grad}V(q(t))$ è ortogonale al piano tangente a M in $q(t)$.

È interessante tenere presente che, se $N = 3$, una geodetica su M rappresenta la traiettoria che segue un punto materiale che sia vincolato a stare su M e non sia soggetto ad alcuna forza esterna. Insomma una geodetica su M è ciò che in $\mathbb{R}^3$ è il moto rettilineo uniforme. Così una geodetica su M di un punto di massa m rispetto a un potenziale V rappresenta la traiettoria che effettivamente segue un punto materiale di massa m vincolato ad M quando sia soggetto al campo di forze $\mathbf{F} = -\mathrm{grad}V$.

Fissati due punti A e B su M, vogliamo occuparci delle curve geodetiche su M che hanno estremi in A e B.
Ebbene, come si può attendere, è possibile stabilire sullo spazio X delle curve su M da A a B una struttura di varietà, e risulta che il consueto funzionale $f : X \to \mathbb{R}$, definito dall'integrale della lagrangiana:

$$f(q) = \int_a^b \left(\frac{m}{2}|\dot{q}|^2 - V(q)\right) dt$$

è tale che i sui punti stazionari siano proprio le geodetiche su M da A a B.

Mediante la cohomologia si dimostra che, se M è completa e priva di bordo e non è contrattile allora $cat_X(X) = +\infty$. Si giunge così al teorema.

8.17 Teorema *Se M è completa e priva di bordo e non è contrattile allora esistono infinite geodetiche da A a B su M.*

9 % Qualche problema "ai limiti" in dinamica

Nello studio dei problemi che si presentano in alcune discipline, la costruzione di un modello matematico, quando è possibile, gioca un ruolo essenziale, sia teorico che pratico. È ben vero che la creazione di un modello è abbastanza arbitraria, potremmo dire "prescientifica": tanto per fare un esempio, le derivate sono una "invenzione" (iniziata con le "flussioni" di Newton) che è adatta a tradurre in termini matematici il concetto di velocità di un punto in movimento non uniforme nello spazio. Tuttavia la ricerca e la stessa costruzione del modello portano a selezionare un punto di vista corrispondente agli scopi che ci si prefigge, a riflettere su questi ultimi, e a mettere in luce una struttura logica intrinseca al problema. Sarà poi il confronto fra le attese e i risultati ai quali porta il modello a provocare una nuova analisi delle proprie intuizioni e una eventuale revisione del modello. La ricerca è fatta proprio di questi passaggi. È così che si giunge a formulare congetture inattese e a ricercare metodi di risoluzione. Questo discorso sembra forse astratto e un po' filosofico, ma se ne constata facilmente la concretezza anche in situazioni abbastanza semplici come quelle che qui vogliamo esaminare.
Negli esempi che qui consideriamo il quadro logico, il modello, è quello offerto dal classico principio di Hamilton. Noi vedremo come, in modo del tutto naturale e spontaneo, l'analisi del modello porta a mettere in luce alcune basilari strutture topologiche che si rivelano estremamente utili a dimostrare, e prima ancora a congetturare, l'esistenza di soluzioni.

Si può dire che il fascino della ricerca scientifica stia proprio in questa alternanza di fasi diverse ripercorse a livelli crescenti: l'osservazione di "fatti concreti" come i "fenomeni naturali", l'ideazione di strumenti logici come i "modelli" matematici, forse inventati e astratti o forse "scoperti" sulla base della nostra cultura e della nostra immaginazione, e infine l'analisi delle strutture logiche, della "ratio" che, pur non prevista, in quei modelli progressivamente si manifesta.

Il problema pilota che scegliamo è la classica equazione della dinamica. L'analisi classica fornisce riposte in un certo senso esaurienti riguardo all'esistenza di soluzioni delle quali siano assegnate posizione e velocità "iniziali", e cioè in un certo istante ”iniziale”. Noi vogliamo qui occuparci delle soluzioni alle quali sia invece imposta la posizione in due istanti prefissati.

9.1 Il problema “ai limiti” nella dinamica
Supponiamo che in $\mathbb{R}^N$ *un “punto materiale” di massa* $m > 0$ *sia soggetto al campo di forze conservativo* $-\mathrm{grad}V$*, dove* $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *è un assegnato potenziale che supporremo sia di classe* C^1*. Assegnati due punti* A *e* B *in* $\mathbb{R}^N$ *e due istanti di tempo* a *e* b*, con* $a < b$*, noi vogliamo studiare il problema:*

9.1.1
$$\begin{cases} m\ \ddot{q} + \mathrm{grad}V(q) = 0 \\ q(a) = A,\ \ q(b) = B \\ q \in C^2(a, b; \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Consideriamo per questo gli spazi di Sobolev $H^1(a, b; \mathbb{R}^N)$ e $H^1_0(a, b; \mathbb{R}^N)$ che indicheremo brevemente con i simbol H^1 e H^1_0 rispettivamente. Come è noto H^1 è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$< q, \delta >= \int_a^b (q \cdot \delta + \dot{q} \cdot \dot{\delta})\ dt,$$

dove il simbolo “ $\cdot$ ” denota il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$. Indicheremo con $\|\ \|$ la norma relativa al prodotto $<\ ,\ >$. Ci serve anche il sottospazio affine X di H definito da $X = \{q \in H^1 \mid q(a) = A,\ q(b) = B\}$ in H^1.

9.2 Definizione *Consideriamo su* H^1 *il classico funzionale* $f : H^1 \to \mathbb{R}$*, definito dall'integrale della Lagrangiana associata al sistema di equazioni*

$$m\ \ddot{q} + \mathrm{grad}V(q) = 0 \qquad \text{e cioè}$$

$$f(q) = \int_a^b \left(\frac{m}{2}|\dot{q}|^2 - V(q)\right)\ dt.$$

9.3 Osservazione *Per ogni* q *e* δ *in* H^1 *risulta*

$$f'(q)(\delta)\Big(= \lim_{s\to 0} \frac{f(q + s\delta) - f(q)}{s}\Big) = \int_a^b (m\ \dot{q} \cdot \dot{\delta} - \mathrm{grad}V(q) \cdot \delta)\ dt.$$

Dimostrazione La tesi segue dalle uguaglianze:

$$\int_a^b \frac{1}{s}\frac{m}{2}\Big(|\dot{q} + s\dot{\delta}|^2 - |\dot{q}|^2\Big)\ dt = s\int_a^b \frac{m}{2}|\dot{q}|^2\ dt + m\int_a^b \dot{q} \cdot \dot{\delta}\ dt,$$

$$\lim_{s\to 0} \int_a^b \frac{V(q + s\delta) - V(q)}{s}\ dt = \int_a^b \mathrm{grad}V(q) \cdot \delta\ dt,$$

l'ultima delle quali vale perchè l'integrando a primo membro, per $s \to 0$, converge uniformemente all'integrando a secondo membro.

Il classsico principio di Hamilton stabilisce un fondamentale collegamento fra il problema 9.1.1 e il funzionale f.

9.4 Proposizione (Una versione del principio di Hamilton)
I punti stazionari di f sul vincolo X sono le soluzioni di 9.1.1 .
Di conseguenza le soluzioni di 9.1.1 *sono le soluzioni del "problema debole"*

9.4.1 $$\begin{cases} \int_a^b (m\ \dot q \cdot \dot\delta - \mathrm{grad}V(q)\cdot\delta)\ dt = 0, \text{ per ogni } \delta \text{ in } H_0^1 \\ q \in X. \end{cases}$$

Dimostrazione Anzitutto osserviamo che un dato q in X è stazionario per f rispetto al vincolo X se e solo se $f'(q)(\delta) = 0$ per ogni δ in H_0^1, dato che $q + s\delta \in H^1$ (per $s \neq 0$) se e solo se $\delta \in H_0^1$. Dunque la 9.4.1 equivale a dire che q è stazionario per f su X.
Se ora vale la 9.4.1 allora la derivata debole di $\dot q$ è uguale a $-\mathrm{grad}V(q)$ e dunque è continua. Allora $\dot q$ è di classe C^1 (e le sue derivate debole e forte coincidono). In particolare $\dot q$ è continua. Di conseguenza q è di classe C^1 (e le sue derivate debole e forte coincidono). Dunque vale la 9.1.1 . Il viceversa è del tutto ovvio. □

Va detto che nella versione originale del principio di Hamilton non si parla di derivate in senso debole (non erano ancora state introdotte) e si assume che q e δ siano regolari quanto occorre per rimanere nella analisi classica. A noi questo non basta perché il principio di Hamilton non ci serve soltanto per descrivere una proprietà delle soluzioni di 9.1. Infatti, con la versione ora vista di questo principio, siamo in grado di dimostrare che esistono delle soluzioni di quel problema, una o più, a seconda del comportamento di V.

Un primo risultato di esistenza lo possiamo avere semplicemente mediante un classico procedimento di minimizzazione, senza bisogno dei metodi topologici di cui abbiamo parlato nei paragrafi precedenti.

9.5 Teorema *Supponiamo che il potenziale V sia superiormente limitato, o più in generale, che soddisfi la condizione:*

$$\limsup_{|x|\to+\infty} \frac{V(x)}{|x|^2} = 0.$$

Allora esiste una soluzione q di 9.1.1. *Infatti esiste q in X che minimizza f su X.*

Dimostrazione
I passo) Cominciamo con l'osservare che, nella nostra ipotesi,

$$\lim_{q\in X, ||q||\to\infty} f(q) = +\infty.$$

Infatti, fissato un $\varepsilon > 0$ esiste K in $\mathbb{R}$ tale che per ogni x in $\mathbb{R}^N$ valga la disuguaglianza $V(x) \leq \varepsilon|x|^2 + K$.

D'altra parte, se $q \in X$ allora $|q(t)| \leq \int_a^b |\dot q|\ dt + |A|$, evidentemente.

Di conseguenza, se $q \in X$ allora

9.5.1 $$\int_a^b |q|^2\, dt \le 2(b{-}a)^2 \int_a^b |\dot q|^2 {+} 2(b{-}a)|A|^2.$$

Dunque $$f(q) \ge \frac{m}{2}\int_a^b |\dot q|^2\, dt {-} \varepsilon \int_a^b |q|^2\, dt {-} K(b{-}a) \ge$$

$$\ge (\frac{m}{2} - 2\varepsilon(b-a)^2)\int_a^b |\dot q|^2\, dt - \varepsilon(b-a)\ (2\ |A|^2 + K).$$

Se dunque ε è abbastanza piccolo vale la tesi perché, se $||q|| \to \infty$, anche $\int_a^b |\dot q|^2\, dt \to \infty$, come mostra la 9.5.1 .

II passo) Sia $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante f su X: $f(q_h) \to \inf f(X)$. Per il primo passo $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata in H^1. Di conseguenza è noto che esiste una sottosuccessione $(q_{h_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge debolmente in H^1 e uniformemente ad una q di H^1. Allora $q \in X$, e inoltre

$$\int_a^b |\dot q|^2\, dt \le \liminf_{h\to+\infty} \int_a^b |\dot q_{h_k}|^2\, dt, \qquad \lim_{h\to+\infty}\int_a^b V(q_{h_k})\, dt = \int_a^b V(q)\, dt.$$

Si noti che la disuguaglianza a sinistra vale perché la funzione $\int_a^b |\dot q|^2\, dt$ è convessa e continua in H^1, e dunque è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole. □

9.6 Corollario *Se V è una funzione concava il problema* 9.1.1 *ammette una ed una sola soluzione.*

Il lettore può fare la semplice dimostrazione per esercizio.

Vogliamo vedere che in opportune ipotesi su V il problema 9.1.1 ammette più di una soluzione.
Per concentrare l'attenzione sugli aspetti essenziali del procedimento supporremo che $A = B = 0$. Con piccole modifiche il lettore potrà per esercizio considerare il caso generale.

Ricordiamo che nello spazio $H_0^1 = \{q \in H^1 \mid q(a) = q(b) = 0\}$ la norma $||\ ||_0$ associata al prodotto scalare $< q, \delta >_0 = \int_a^b \dot q \cdot \dot\delta\, dt$ equivale a quella di H^1.

Anche se non è strettamente necessario per il seguito, è interessante studiare la forma e le proprietà del gradiente di f. Assumiamo ora la sola ipotesi che V sia di classe C^1.

9.7 Osservazione *Esiste una ed una sola mappa $G : L^1(a, b; \mathbb{R}^N) \to H_0^1$*

tale che $$\int_a^b G(\dot{h}) \cdot \dot\delta\, dt = -\int_a^b h \cdot \delta\, dt, \quad \textit{per ogni } q \textit{ e } \delta \textit{ in } H_0^1,$$

cioè tale che $\ddot{G(h)} = h$, *nel senso delle distribuzioni.*

Inoltre $||G(h)||_0 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}}||h||_{L^1}$, *per ogni h in L^1.*

DIMOSTRAZIONE Poiché $|\int_a^b h \cdot \delta \; dt \leq ||h||_{L^1}||\delta||_{L^\infty} \leq ||h||_{L^1}(b-a)^{\frac{1}{2}}||\delta||_0$, allora, per il teorema di rappresentazione di Riesz, possiamo dire che per ogni h in L^1 esiste un unico elemento $G(h)$ in H_0^1 tale che, per ogni δ in H_0^1 risulti: $< G(h), \delta >_0 = \int_a^b h \cdot \delta \; dt$. Inoltre $||G(h)||_0 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}}||h||_{L^1}$ □

Si verifichi per esercizio che G è una mappa compatta.

Indichiamo ancora con f la restrizione ad H_0^1 del funzionale definito in 9.2.

9.8 Osservazione *Il funzionale $f : H_0^1 \to \mathbb{R}$ è di classe C^1. Inoltre*

$$\text{grad} f(q) = mq + G(\text{grad}V(q)), \textit{ per ogni } q \textit{ in } H_0^1.$$

La mappa $K : H_0^1 \to H_0^1$, che a ogni q associa $K(q) = G(\text{grad}V(q))$, è compatta.

DIMOSTRAZIONE
I passo) Notiamo che l'immersione $i : H_0^1 \to C^0$ è compatta e che la mappa $\mathcal{G}_V : C^0 \to C^0$ che a q associa $\text{grad}V(q)$ è continua. Se ora indichiamo con j l'immersione continua di C^0 in L^1 vediamo che la mappa K è compatta perché $K = G \circ j \circ \mathcal{G}_V \circ i$.
II passo) È evidente che per ogni q in H_0^1, $f'(q)(\delta)$, come funzione di δ, è una forma lineare continua su H_0^1, cioè sta in $(H_0^1)'$. Indichiamola con $f'(q)$. Dall'osservazione 9.7 segue evidentemente che

$$f'(q)(\delta) =< mq + G(\text{grad}V(q)), \; \delta >_0, \text{ per ogni } \delta \text{ in } H_0^1.$$

Se ne deduce che $f'(q)$ dipende con continuità da q in H_0^1. Allora, per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile e dunque:

$$f'(q)(\delta) = \mathrm{d}f(q)(\delta) =< \text{grad}f(q), \delta >_0, \text{ per ogni } \delta \text{ in } H_0^1.$$

Dal confronto di questa formula con la precedente si ottiene l'espressione di $\text{grad}f(q)$. □

Vogliamo anche mettere in evidenza il ruolo che l'ampiezza dell'intervallo $[a, b]$ può giocare nel problema 9.1. Studiamo perciò il problema 9.1.1 nella forma che segue.

9.9 Un problema ai limiti con i dati nulli al bordo

9.9.1
$$\begin{cases} m\,\ddot{q} + (b-a)^2 \,\text{grad}V(q) = 0 \\ q(0) = q(1) = 0 \\ q \in C^2(0,1;\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

È chiaro che se q è una soluzione di questo problema allora $\tilde{q}$ definita da

$$\tilde{q}(t) = q(\frac{t}{b-a})$$

risolve 9.1.1 con $A = B = 0$, e viceversa.

9.10 Teorema
a) *Se $b-a$ è abbastanza piccolo allora* 9.9.1 *ammette una soluzione.*
b) *Se inoltre V soddisfa l'ipotesi:*

$$(V) \qquad \begin{cases} \textit{esistono } \alpha > 2 \textit{ e } r_0 > 0 \textit{ tali che} \\ 0 < \alpha V(x) \leq V'(x)(x), \quad \textit{almeno per } |x| \geq r_0 \ , \end{cases}$$

allora esiste una seconda soluzione

Premettiamo un'osservazione.

9.11 Osservazione *Se vale l'ipotesi (V) allora esistono c_0, c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$, tali che $c_1 > 0$ e*

a) $\qquad V'(x)(x) \geq \alpha V(x) - c_0, \qquad$ *per ogni x in $\mathbb{R}^N$,*

b) $\qquad V(x) \geq c_1 |x|^\alpha - c_2, \qquad$ *per ogni x in $\mathbb{R}^N$.*

Dimostrazione La **a)** è evidente. Per la **b)**, per ogni fissato x con $|x| = r_0$ consideriamo la funzione $g(t) = V(tx)$, definita per $t \geq 1$. Risulta:

$$tg'(t) = tV'(tx)(x) \geq \alpha V(tx) = \alpha g(t), \quad \text{e dunque} \quad (t^{-\alpha} g(t))' \geq 0.$$

Di conseguenza $\quad V(tx) \geq t^\alpha \, V(x)$, per ogni $t \geq 1$.

Ovvero $\quad V(x) \geq |x|^\alpha \dfrac{1}{r_0^\alpha} \min \{V(x) \mid |x| = r_0\}$, per ogni x con $|x| \geq r_0$.

Il resto è ovvio. □

9.12 Dimostrazione del teorema 9.10
I passo) Posto $l = b - a$ consideriamo il funzionale $f : H_0^1 \to \mathbb{R}$ definito da

9.12.1 $$f(q) = \int_0^1 \Big(\frac{m}{2} |\dot{q}|^2 - l^2 V(q)\Big) \, dt.$$

Sappiamo che f è di classe C^1 e che le soluzioni del problema 9.9.1 sono i punti stazionari di f. Inoltre, dal lemma 9.13, che dimostriamo fra poco, segue che per f vale la $(PS)_c$ per ogni c in $\mathbb{R}$.
II passo) Fissato un $R > 0$ sia S la sfera in H_0^1 con centro nell'origine e raggio R. Vediamo che se l è abbastanza piccolo allora

9.12.2 $$f(0) < \inf f(S).$$

Infatti se $q \in S$ allora $|q(t)| \leq \int_0^1 |\dot{q}|\ dt \leq R$ e dunque

$$f(q) \geq \frac{m}{2}R^2 - l^2 \sup\{V(x) \mid |x| \leq R\}.$$

D'altra parte $f(0) = -l^2V(0)$. A questo punto è evidente che se l è abbastanza piccolo vale la 9.12.2 .
Ora è facile vedere che esiste un punto di minimo q_1 per f nella palla B di centro 0 e raggio R: basta considerare una successione che minimizza f in $\overline{B}$, e seguire lo stesso procedimento della prova di 9.5 . Dunque esiste una soluzione q_1 in B tale che $f(q_1) \leq f(0)$.
III passo) Vediamo che, fissato un elemento q non nullo in H_0^1 risulta

9.12.3 $$\lim_{s\to+\infty} f(sq) = -\infty.$$

Infatti da 9.11 segue che $f(sq) \leq s^2\ \frac{m}{2} \int_0^1 |\dot{q}|^2\ dt - s^\alpha l c_1 \int_0^1 |q|^\alpha\ dt + lc_2.$

Poiché $\alpha > 2$ e $c_1 > 0$, vale la 9.12.3 .
IV passo) Di conseguenza esiste $\overline{q}$ in H_0^1 tale che $||\overline{q}|| > R$ e $f(\overline{q}) < \inf f(S)$. Valgono dunque tutte le ipotesi del teorema del passo di montagna, e quindi esiste una soluzione q_2 con $f(q_2) \geq \inf f(S)$. Di conseguenza $q_2 \neq q_1$ perché $f(q_2) > f(q_1)$. □

9.13 Lemma *Se vale l'ipotesi V allora il funzionale f definito in* 9.12.1 *soddisfa la* $(PS)_c$ *per ogni c in* $\mathbb{R}$.
Precisamente: se $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ *è una successione in* H_0^1 *tale che* $(f(q_h))_{h\in\mathbb{N}}$ *sia superiormente limitata e* $(\mathrm{grad} f(q_h))_{h\in\mathbb{N}}$ *tenda a* 0 *allora* $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ *ammette una sottosuccessione convergente in* H_0^1.

Dimostrazione
I passo) Se $q \in H_0^1$ allora

$$f'(q)(q) = \int_0^1 (m|\dot{q}|^2 - l^2\ \mathrm{grad}V(q)\cdot q)\ dt \leq \int_0^1 (m|\dot{q}|^2 - \alpha\ l^2V(q) + l^2c_0)\ dt$$

D'altra parte $-\int_0^1 \alpha l^2 V(q)\ dt = \alpha f(q) - \alpha\ \frac{m}{2} \int_0^1 |\dot{q}|^2\ dt.$

Dunque $m\ (\frac{\alpha}{2} - 1) \int_0^1 |\dot{q}|^2\ dt \leq - < \mathrm{grad} f(q), q >_0 + \alpha f(q) + c_0.$

Se dunque $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione in H_0^1 tale che $(f(q_h))_{h\in\mathbb{N}}$ sia superiormente limitata e $(||\mathrm{grad} f(q_h)||)_{h\in\mathbb{N}}$ sia limitata, da questa disuguaglianza segue che $(||q_h||)_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata.
II passo) Poiché, per q e δ in H_0^1,

$$< \mathrm{grad} f(q)\cdot\delta >= f'(q)(\delta) = \int_0^1 (m\dot{q}\cdot\dot{\delta} - l^2\ \mathrm{grad}V(q)\cdot\delta)\ dt$$

Dall'ipotesi che $\mathrm{grad} f(q_h) \to 0$ e dal fatto che $(||q_h||)_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata segue ora che $f'(q_h)(q_h) \to 0$. Inoltre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge in C^0 e debolmente in H_0^1 ad una q di H_0^1.

Allora $\qquad \int_0^1 m|\dot{q}_h|^2 \, dt \to \int_0^1 l^2 \, \mathrm{grad}V(q) \cdot q \, dt.$

D'altra parte $f'(q_h)(q) \to 0$ e dunque

$$\int_0^1 m|\dot{q}|^2 \delta \, dt = l^2 \int_0^1 \mathrm{grad}V(q) \cdot q \, dt.$$

Di conseguenza $\qquad ||q_h||_0 \to ||q||_0.$

Da questa relazione e dal fatto che $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ tende a q debolmente in H_0^1, segue com'è noto che $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ tende a q in H_0^1. □

Il secondo passo della dimostrazione precedente ammette una versione che da un certo punto di vista è più comprensibile. Vediamola.

Versione alternativa del secondo passo
Sappiamo che $\mathrm{grad} f(q_h) = mq_h + K(q_h)$, dove $K : H_0^1 \to H_0^1$ è una mappa compatta. Poiché $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata $(K(q_h))_{h\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente. Se poi $\mathrm{grad} f(q_h) \to 0$, anche la corrispondente sottosuccessione di $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge. □

Al termine di questo paragrafo notiamo che il comportamento di f del tipo del passo di montagna è assicurato dalla sola condizione b) di 9.11. L'ipotesi (V) è strettamente più forte, ma quando si assume la condizione b) di 9.11 e non sembra si possa fare a meno di rafforzarla in qualche modo se si vuole assicurare la condizione (PS).

10 % Alcune orbite periodiche in dinamica

Vogliamo esaminare un problema nel quale si cercano soluzioni periodiche dell'equazione della dinamica. Faremo sempre l'ipotesi che sia presente un campo di forze conservativo, per poter utilizzare un principio variazionale del tipo di Hamilton. nel caso in esame vogliamo studiare l'esistenza di soluzioni di periodo T in dipendenza dal valore di T. Perciò mettiamo subito in evidenza T già nell'equazione.

10.1 Un problema di orbite periodiche di periodo assegnato

Supponiamo dunque che un punto di massa m (naturalmente $m > 0$) sia soggetto al campo di forze associato ad un potenziale $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, di classe C^1. Sia dato $T > 0$. Vogliamo studiare il problema

10.1.1 $$\begin{cases} m \, \ddot{q} + \mathrm{grad}V(q) = 0 \\ q \text{ periodica di periodo } T \\ q \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Per mettere in evidenza la dipendenza dal periodo T noi studieremo il problema

10.1.2
$$\begin{cases} m\,\ddot{q} + T^2 \,\mathrm{grad}V(q) = 0 \\ q \text{ periodica di periodo } 1 \\ q \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

È chiaro che se q è una soluzione di questo problema allora l'orbita $\tilde{q}$ definita da $\tilde{q}(t) = q(\frac{t}{T})$ è periodica di periodo T e risolve 10.1.1 Introduciamo ora lo spazio di funzioni e il funzionale che ci servono per impostare il problema in modo variazionale.

10.2 Definizione *Indicheremo con il simbolo H^1_1 lo spazio così definito*

$$H^1_1 = \{q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \mid q \text{ periodica di periodo } 1,\ q \in H^1(0,1;\mathbb{R}^N)\}.$$

Su H^1_1 considereremo ancora il classico funzionale $f : H^1_1 \to \mathbb{R}$, definito dall'integrale della Lagrangiana associata al sistema di equazioni 10.1.2*, e cioè*

10.2.1
$$f(q) = \int_0^1 \Big(\frac{m}{2}|\dot{q}|^2 - T^2\, V(q)\Big)\, dt.$$

Evidentemente risulta ancora che, per ogni q e δ in H^1_1 ,

$$f'(q)(\delta) = \int_a^b (m\,\dot{q}\cdot\dot{\delta} - T^2\,\mathrm{grad}V(q)\cdot\delta)\, dt.$$

Di conseguenza è del tutto naturale formulare la seguente versione del principio di Hamilton per il problema 10.1.2.

10.3 Un principio di Hamilton per le orbite periodiche
I punti stazionari di f sullo spazio H^1_1 sono le soluzioni di 10.1.2 .
In altre parole, le soluzioni di 10.1.2 *sono le soluzioni del "problema debole"*

10.3.1
$$\begin{cases} \int_0^1 (m\,\dot{q}\cdot\dot{\delta} - T^2\,\mathrm{grad}V(q)\cdot\delta)\, dt = 0, \text{ per ogni } \delta \text{ in } H^1_1 \\ q \in H^1_1. \end{cases}$$

Dimostrazione Se infatti una q di H^1_1 verifica la 10.3.1 allora, per ogni fissato intervallo I di ampiezza uguale a 1, la 10.3.1 vale per le δ di $C^\infty_0(I;\mathbb{R}^n)$ (estese con periodo 1 a tutto $\mathbb{R}$). Se ne deduce allora, grazie alle note proprietà della derivata debole, che $q \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$ e risolve 10.1.2 . Il viceversa è ovvio. □

Per studiare f su H^1_1 ci è utile soffermarci dapprima sulla struttura di questo spazio.

10.4 Definizione

a) *Se* $q \in H^1_1$ *poniamo* $\mu(q) = \int_0^1 q\ dt$. *Dunque* $\mu(q)$ *è il vettore di* $\mathbb{R}^N$ *che è valore medio per* q.

b) *Considereremo in* H^1_1 *il prodotto scalare:*

$$< q, \delta >_1 = \mu(q) \cdot \mu(\delta)) + \int_0^1 \dot{q} \cdot \dot{\delta}\ dt \quad \textit{e la relativa norma } ||\ ||_1$$

c) *Utilizzeremo anche gli spazi:*

$$L^1_1 = \{q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \mid q \textit{ è periodica di periodo } 1,\ q \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)\},$$

con la norma $||q||_{L^1_1} = \int_0^1 |q|\ dt$,

e $\quad C^0_1 = \{q \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \mid q$ *è periodica di periodo* $1\}$

con la usuale norma $||q||_\infty$.

10.5 Lemma

a) *Se* $q \in H^1_1$ *allora* $||q - \mu(q)||_\infty \leq \int_0^1 |\dot{q}|\ dt$ *e quindi* $||q||^2_\infty \leq 2\ ||q||^2_1$.

b) *In* H^1_1 *la norma* $||\ ||_1$ *è equivalente alla norma canonica*

$$\Big(\int_0^1 (|q|^2 + |\dot{q}|^2)\ dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Di conseguenza $H^1_1 \subseteq C^0_1$ *e l'immersione è compatta.*

c) H^1_1 *con il prodotto scalare* $< , >_1$ *è uno spazio di Hilbert.*

Dimostrazione

a) Se $q \in H^1_1$ allora $q(t) - q(s) = \int_s^t \dot{q}(\tau)\ d\tau$. Integrando rispetto a s, si ottiene: $q(t) - \int_0^1 q(s)\ ds = \int_0^1 \int_s^t \dot{q}(\tau)\ d\tau\ ds$. Allora $|q(t) - \mu(q)| \leq \int_0^1 |\dot{q}|\ dt$, per ogni t in $[0, 1]$.

Di conseguenza $||q||^2_\infty \leq (|\mu(q)| + ||q - \mu(q)||_\infty)^2 \leq 2\ (|\mu(q)|^2 + \int_0^1 |\dot{q}|^2\ dt)$

b) Se $q \in H^1_1$ dalla parte **a)** si deduce che

$$\int_0^1 |q|^2\ dt \leq ||q||^2_\infty \leq 2\ ||q||^2_1$$

Se ne deduce che la norma canonica è maggiorata dalla norma $||\ ||_1$. Il viceversa è ovvio.

c) Si tratta di vedere che H^1_1 con la norma $||\ ||_1$ è completo. Sia dunque $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ una successione in H^1_1 di Cauchy nella norma $||\ ||_1$ e quindi nella norma canonica. Allora su ogni intervallo I di ampiezza 1 la successione $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge ad una q_I di $H^1(I)$. Ma sappiamo che $(q_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente e dunque negli estremi di I la q_I assume lo stesso valore. Per lo stesso motivo, se I_1 e I_2 sono intervalli di ampiezza 1 che si intersecano, q_{I_1} e q_{I_2} coincidono su $I_1 \cap I_2$. Dunque le q_I dànno luogo ad una unica q che è periodica di periodo 1 e sta in $H^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$. $\square$

10.6 Lemma *Esiste una ed una sola mappa* $G : L^1_1 \to H^1_1$ *tale che*

per ogni h *in* L^1_1 *risulti* $\quad < G(h), \delta >_1 = \int_0^1 h \cdot \delta \; dt,$ $\quad$ *per ogni* δ *in* H^1_1,

Inoltre $||G(h)||_1 \leq \sqrt{2}\; ||h||_{L^1_1}$.

Dimostrazione Sia dato h in L^1_1. Dal lemma precedente segue che per ogni δ in H^1_1 risulta: $| \displaystyle\int_0^1 h \cdot \delta \; dt| \leq ||h||_{L^1_1} ||\delta||_\infty \leq \sqrt{2}\; ||h||_{L^1_1} ||\delta||_{H^1_1}$.
Dunque, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste uno ed un solo elemento $G(h)$ in H^1_1 che soddisfa l'uguaglianza richiesta nella tesi.
Di conseguenza $| < G(h), \delta >_1 | \leq \sqrt{2}\; ||h||_{L^1_1} ||\delta||_{H^1_1}$, per ogni δ in H^1_1. □

Come avviene nel caso del problema ai limiti anche qui si può per esercizio verificare che G è compatta.

10.7 Proposizione
a) *Il funzionale* $f : H^1_1 \to \mathbb{R}$ *introdotto in* 10.2.1 *è di classe* C^1.
b) *Se* $q \in H^1_1$ *risulta:*

$$\mathrm{grad} f(q) = m(q - \mu(q)) + G(\mathrm{grad} V(q))$$

c) *La mappa* $K : H^1_1 \to H^1_1$ *che a* q *associa* $K(q) = -m\; \mu(q)) + G(\mathrm{grad} V(q))$ *è compatta.*

Dimostrazione Vale evidentemente l'uguaglianza

$$< \mathrm{grad} f(q), \delta >_1 = f'(q)(\delta), \quad \textit{per ogni } \delta \text{ in } H^1_1.$$

Da questa si deduce come al solito (teorema del differenziale totale) che f è differenziabile. Di conseguenza grad$f$ è proprio quello indicato.
Per verificare la **c)** osserviamo che l'immersione $i : H^1_1 \to C^0_1$ è compatta e che la mappa $\mathcal{G}_V$ che a q di C^0_1 associa grad$V(q)$ in L^1_1 è continua. Allora la mappa $K_1 : H^1_1 \to H^1_1$, definita da $K_1(q) = G(\mathrm{grad} V(q))$ è compatta perché $K_1 = G \circ \mathcal{G}_V \circ i$.
D'altra parte μ definisce un operatore lineare compatto in H^1_1 perché è continuo ed ha l'immagine in $\mathbb{R}^N$. □

Possiamo ora enunciare e provare il risultato al quale è dedicato questo paragrafo, che mostra l'esistenza di infinite orbite periodiche in una buca di potenziale dalle pareti assai ripide. Utilizzeremo ancora l'ipotesi di superlinearità del campo di forze.

10.8 Teorema *Supponiamo che* V *soddisfi la seguente condizione:*

$$(V) \qquad \begin{cases} \textit{esistono } \alpha > 2 \textit{ e } r_0 > 0 \textit{ tali che} \\ 0 < \alpha V(x) \leq V'(x)(x), \qquad \textit{almeno per } |x| \geq r_0 \ . \end{cases}$$

Allora per ogni $T > 0$ *il problema* 10.1.1 *ammette una soluzione non costante.*
Precisamente: per ogni $T_0 > 0$ *esiste un numero naturale* k_0 *tale che per ogni intero* $k \geq k_0$ *il problema* 10.1.1 *ammette una soluzione* q_k*, non costante, di periodo* $T = \frac{T_0}{k}$*. Inoltre*

$$\lim_{k \to +\infty} ||q_k||_\infty = +\infty.$$

Dimostrazione
I passo) Dati $T_0 > 0$ e k in $\mathbb{N}^*$ cerchiamo una soluzione di periodo 1 del problema 10.1.2, con $T = \frac{T_0}{k}$. Studiamo perciò sullo spazio H_1^1 il funzionale

$$f(q) = \int_0^1 \left(\frac{m}{2} |\dot{q}|^2 - \frac{T_0^2}{k^2} \, V(q) \right) \, dt \; .$$

Per semplificare supponiamo, come è sempre possibile, che sia $V \geq 0$.

Poniamo $Y = \{q \in H_1^1 \mid q \text{ è } costante\}$ e $Z = \{q \in H_1^1 \mid \mu(q) = 0\}$.

Evidentemente $H_1^1 = Z \oplus Y$ e $Z = \{q \in H_1^1 \mid q \text{ è } ortogonale\ a\ Y\}$, rispetto al prodotto scalare $< \, , \, >_1$.
Per questo basta osservare che se $q \in H_1^1$ allora $q = q - \mu(q) + \mu(q)$ e $q - \mu(q) \in Z$. Il resto è ovvio.
II passo) Dato un numero $\rho > 0$ poniamo $S = \{q \in Z \mid ||q||_1 = \rho\}$.
Se $q \in S$ allora

$$f(q) = \frac{m}{2} \rho^2 - \frac{T_0^2}{k^2} \int_0^1 V(q) \, dt \geq \alpha_k = \frac{m}{2} \rho^2 - \frac{T_0^2}{k^2} \, \sup \{V(x) \mid |x| \leq \rho\},$$

perché se $q \in Z$ allora $||q||_\infty \leq ||q||_1$. Se dunque k è abbastanza grande

$$\inf f(S) \geq \alpha_k > 0.$$

III passo) Notiamo che se $q \in Y$ allora $f(q) \leq 0$ perché $V \geq 0$.
Sia poi $\overline{q}$ un elemento non nullo di Z. Allora

$$\lim_{||q||_1 \to \infty, \; q \in Y \oplus span(\overline{q})} f(q) = -\infty \; .$$

Infatti, dall'osservazione 9.11 segue che

$$f(q) \leq \frac{m}{2} \, ||q||_1^2 - \frac{T_0^2}{k^2} \, \left(c_1 \int_0^1 |q|^\alpha \, dt - c_2 \right)$$

e nello spazio $Y \oplus span(\overline{q})$, che ha dimensione finita, la norma $||q||_1$ è equivalente alla norma $\left(\int_0^1 |q|^\alpha \, dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}$.
In conclusione esiste $R > \rho$ tale che, posto

$$\Sigma = \{q + s\overline{q} \mid q \in Y, ||q + s\overline{q}||_1 = R, s \geq 0\} \cup \{q \in Y \mid ||q||_1 = R\},$$

risulti che $\quad \sup f(\Sigma) < \inf f(S)$.

IV passo) Vale la $(PS)_c$ per ogni c in $\mathbb{R}$, come si verifica in modo praticamente identico a quello seguito in 9.13, dove infatti si assumeva la stessa ipotesi (V).
Possiamo a questo punto constatare che valgono le ipotesi del teorema di allacciamento 5.4, pur di tenere presente l'osservazione 5.6.
Dunque, se k è abbastanza grande perché risulti

$$\alpha_k = \frac{m}{2}\rho^2 - \frac{T_0^2}{k^2}\ \sup\{V(x) \mid |x| \le \rho\} > 0,$$

esiste una soluzione q_k tale che $f(q_k) \ge \alpha_k$. Notiamo che q_k non è una costante perché $f(q_k) > 0$.
V passo) Vediamo infine che $||q_k||_\infty \to \infty$.
Supponiamo che non sia vero. In questo caso, a meno di passare ad una sottosuccessione, risulta che $||q_k||_\infty \le c$, per un certo c di $\mathbb{R}$. Allora, dall'equazione

$$m\ \ddot{q}_k + \frac{T^2}{k^2}\mathrm{grad}V(q_k) = 0$$

segue che $||\ddot{q}_k||_\infty \to 0$. Di conseguenza anche $\int_0^1 |\dot{q}_k|^2\ dt = -\int_0^1 \ddot{q}_k \cdot q_k\ dt \to 0$, e quindi

$$\lim_{k\to+\infty} f(q_k) = \lim_{k\to+\infty} \int_0^1 \left(\frac{m}{2}|\dot{q}_k|^2 - \frac{T_0^2}{k^2}\ V(q_k)\right)\ dt = 0.$$

Invece $\qquad f(q_k) \ge \alpha_k \to \dfrac{m}{2}\rho^2 > 0.$ $\square$

PROGRAMMA DEL CORSO di
Modelli matematici in biomedicina e fisica matematica

6 cfu, 42 ore (II semestre 2014-2015)
Paolo Acquistapace (10 ore), Paola Cerrai (10 ore), Vladimir Georgiev (12 ore) e Rita Giuliano (10 ore)

Sito del corso:
http://www.dm.unipi.it/~georgiev/didattica/annoattuale/14_15Modelli.htm
Piataforma moogle E-learning: https://www.dm.unipi.it/elearning/

1. Modelli biologici: dinamica di una o piu` popolazioni, modelli di competizione, modelli preda-predatore, reazioni cinetiche in biochimica.

2. Richiami sulla trasformata di Fourier e sulla trasformata di Laplace.

3. Equazioni differenziali ordinarie: stabilita` lineare e non lineare, effetti dissipativi e di ritardo, stime a priori, cicli limite.

4. Equazioni alle derivate parziali: moti diffusivi, moti oscillatori, soluzioni quasi stazionarie.

5. Approccio stocastico: Moto Browniano, equazioni differenziali stocastiche: cenni di teoria e applicazione ai modelli preda-predatore e di competizione stocastici. Cenno ai modelli stocastici in dinamica delle popolazioni.

6. Applicazioni della teoria matematica all'analisi dei modelli biologici (deterministici e stocastici)

Testi consigliati:

J. D. Murray, Mathematical Biology, I. An Introduction, Springer 2002.

B. Oksendal, Stochastic Differential Equations (An Introduction with Applications) Springer 1998

F. Klebaner, Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial Coillege Press 1998

Hal Smith, An Introduction to Delay Differential Equations with Sciences Applications to the Life, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011. (first four chapters)

PROGRAMMA DEL CORSO di
Modelli matematici in biomedicina e fisica matematica

6 cfu, 42 ore (II semestre 2014-2015)
Paolo Acquistapace (10 ore), Paola Cerrai (10 ore), Vladimir Georgiev (12 ore) e Rita Giuliano (10 ore)

Sito del corso:
http://www.dm.unipi.it/~georgiev/didattica/annoattuale/14_15Modelli.htm
Piataforma moogle E-learning: https://www.dm.unipi.it/elearning/

1. Modelli biologici: dinamica di una o piu` popolazioni, modelli di competizione, modelli preda-predatore, reazioni cinetiche in biochimica.

2. Richiami sulla trasformata di Fourier e sulla trasformata di Laplace.

3. Equazioni differenziali ordinarie: stabilita` lineare e non lineare, effetti dissipativi e di ritardo, stime a priori, cicli limite.

4. Equazioni alle derivate parziali: moti diffusivi, moti oscillatori, soluzioni quasi stazionarie.

5. Approccio stocastico: Moto Browniano, equazioni differenziali stocastiche: cenni di teoria e applicazione ai modelli preda-predatore e di competizione stocastici. Cenno ai modelli stocastici in dinamica delle popolazioni.

6. Applicazioni della teoria matematica all'analisi dei modelli biologici (deterministici e stocastici)

Testi consigliati:

J. D. Murray, Mathematical Biology, I. An Introduction, Springer 2002.

B. Oksendal, Stochastic Differential Equations (An Introduction with Applications) Springer 1998

F. Klebaner, Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial Coillege Press 1998

Hal Smith, An Introduction to Delay Differential Equations with Sciences Applications to the Life, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011. (first four chapters)

PROGRAMMA DEL CORSO di
Modelli matematici in biomedicina e fisica matematica

6 cfu, 42 ore (II semestre 2014-2015)
Paolo Acquistapace (10 ore), Paola Cerrai (10 ore), Vladimir Georgiev (12 ore) e Rita Giuliano (10 ore)

Sito del corso:
http://www.dm.unipi.it/~georgiev/didattica/annoattuale/14_15Modelli.htm
Piataforma moogle E-learning: https://www.dm.unipi.it/elearning/

1. Modelli biologici: dinamica di una o piu` popolazioni, modelli di competizione, modelli preda-predatore, reazioni cinetiche in biochimica.

2. Richiami sulla trasformata di Fourier e sulla trasformata di Laplace.

3. Equazioni differenziali ordinarie: stabilita` lineare e non lineare, effetti dissipativi e di ritardo, stime a priori, cicli limite.

4. Equazioni alle derivate parziali: moti diffusivi, moti oscillatori, soluzioni quasi stazionarie.

5. Approccio stocastico: Moto Browniano, equazioni differenziali stocastiche: cenni di teoria e applicazione ai modelli preda-predatore e di competizione stocastici. Cenno ai modelli stocastici in dinamica delle popolazioni.

6. Applicazioni della teoria matematica all'analisi dei modelli biologici (deterministici e stocastici)

Testi consigliati:

J. D. Murray, Mathematical Biology, I. An Introduction, Springer 2002.

B. Oksendal, Stochastic Differential Equations (An Introduction with Applications) Springer 1998

F. Klebaner, Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial Coillege Press 1998

Hal Smith, An Introduction to Delay Differential Equations with Sciences Applications to the Life, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011. (first four chapters)

PROGRAMMA DEL CORSO di
Modelli matematici in biomedicina e fisica matematica

6 cfu, 42 ore (II semestre 2014-2015)
Paolo Acquistapace (10 ore), Paola Cerrai (10 ore), Vladimir Georgiev (12 ore) e Rita Giuliano (10 ore)

Sito del corso:
http://www.dm.unipi.it/~georgiev/didattica/annoattuale/14_15Modelli.htm
Piataforma moogle E-learning: https://www.dm.unipi.it/elearning/

1. Modelli biologici: dinamica di una o piu` popolazioni, modelli di competizione, modelli preda-predatore, reazioni cinetiche in biochimica.

2. Richiami sulla trasformata di Fourier e sulla trasformata di Laplace.

3. Equazioni differenziali ordinarie: stabilita` lineare e non lineare, effetti dissipativi e di ritardo, stime a priori, cicli limite.

4. Equazioni alle derivate parziali: moti diffusivi, moti oscillatori, soluzioni quasi stazionarie.

5. Approccio stocastico: Moto Browniano, equazioni differenziali stocastiche: cenni di teoria e applicazione ai modelli preda-predatore e di competizione stocastici. Cenno ai modelli stocastici in dinamica delle popolazioni.

6. Applicazioni della teoria matematica all'analisi dei modelli biologici (deterministici e stocastici)

Testi consigliati:

J. D. Murray, Mathematical Biology, I. An Introduction, Springer 2002.

B. Oksendal, Stochastic Differential Equations (An Introduction with Applications) Springer 1998

F. Klebaner, Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial Coillege Press 1998

Hal Smith, An Introduction to Delay Differential Equations with Sciences Applications to the Life, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011. (first four chapters)

Origini e sviluppo della matematica moderna
Anno accademico 2014-2015

Pier Daniele Napolitani

Il corso intende affrontare il problema della nascita della matematica moderna (XVI-XIX secolo), Il suo scopo è quello di fornire allo studente un'idea concreta di cosa significhi fare ricerca in storia della matematica.

Per raggiungere questo obiettivo verrà affrontato lo studio di un'opera che abbia rappresentato un momento cruciale (per esempio il *Dialogo sopra i massimi sistemi* di Galileo, la *Géométrie* di Cartesio, la *Nova methodus* di Leibniz). Alternativamente potranno essere affrontati temi quali, per esempio, la teoria delle equazioni e la nascita della teoria di Galois; la creazione del calcolo differenziale; la nascita dell'algebra.

La scelta dell'argomento verrà effettuata dopo una discussione con gli studenti interessati a frequentare il corso.

I materiali di studio verranno forniti via via durante le lezioni.

Non sono richiesti particolari prerequisiti, salvo un forte interesse per la storia e una preparazione matematica corrispondente a quella fornita dalla frequentazione dei primi due anni del corso di laurea in matematica.

L'esame consisterà nella preparzaione di un seminario su argomenti vicini a quelli affrontati durante le lezioni. Allo scopo di facilitare la preparazione dell'esame,

Ricerca Operativa (072AA)

Corso di Laurea in Matematica

a.a. 2013/2014

Antonio Frangioni

Lo scopo del corso è quello di fornire una panoramica (per quanto necessariamente ristretta) sui principali aspetti teorici e pratici inerenti alla costruzione di modelli matematici di sistemi reali, con particolare riferimento ai modelli di ottimizzazione, ed alla loro soluzione algoritmica.
Verranno presentate le proprietà matematiche alla base di alcune delle principali tecniche algoritmiche per la soluzione di tre grandi classi di problemi di ottimizzazione: problemi di programmazione lineare, problemi di cammino e flusso su reti, e problemi di ottimizzazione combinatoria. Verranno discusse le proprietà che rendono alcuni di questi problemi "facili" ed altri "difficili", e l'impatto che esse hanno sugli algoritmi risolutivi disponibili. Verranno inoltre discusse le problematiche relative alla costruzione di modelli matematici che coniughino (per quanto più possibile) la rispondenza del modello alla situazione reale rappresentata con la risolubilità computazionale dello stesso, fornendo tecniche ed esempi applicativi che consentano allo studente di acquisire la capacità di modellare autonomamente i problemi con strumenti che attualmente sono considerati tra i migliori in pratica.

PROGRAMMA DEL CORSO

1. Problemi e Modelli (4 ore)
   - Il processo decisionale
   - Esempi di problemi ottimizzazione
   - Definizioni generali
2. Programmazione Lineare (20 ore)
   - Geometria della Programmazione Lineare
   - Algoritmo del simplesso primale
   - Teoria matematica della dualità
   - Algoritmo del simplesso duale
   - Riottimizzazione ed analisi parametrica
   - Cenni sull'ottimizzazione nonlineare
3. Grafi e Reti di flusso (16 ore)
   - Flusso di costo minimo
   - Cammini di costo minimo
   - Flusso massimo
   - Problemi di accoppiamento
4. Ottimizzazione Combinatoria (20 ore)
   - Ottimizzazione Combinatoria e Programmazione Lineare Intera

- Tecniche di modellazione per la PLI
- Dimostrazioni di ottimalità
- Algoritmi euristici
- Tecniche di rilassamento
- Algoritmi enumerativi

(Le ore indicate includono le esercitazioni)

Testi di riferimento

1. Appunti del corso
2. Massimo Pappalardo, Mauro Passacantando "Ricerca Operativa", Plus, 2010

Altri testi consultabili

1. F.S. Hillier, G.J. Lieberman, "Introduzione alla ricerca operativa", Franco Angeli, Milano (1999)

Corso di laurea in Matematica

Anno accademico 2014/2015, primo semestre

Corso di Sistemi Dinamici

Docenti: Prof. Andrea MILANI COMPARETTI, Dr. Giacomo Tommei

CONTENUTI DEL CORSO

[1] **Introduzione:** Sistemi dinamici continui e discreti, lineari e nonlineari, conservativi, integrabili: definizioni ed esempi semplici.

[2] **Sistemi dinamici lineari:** richiami di algebra lineare, esponenziale di matrici, prodotto di serie, autovalori reali e complessi, nilpotenti, risonanza.

[3] **Teoria qualitativa:** Richiami sulle soluzioni dei problemi alle condizioni iniziali. Stabilità, instabilità, sorgenti e pozzi, esponenti e funzioni di Lyapounov, sistemi Newtoniani conservativi e con dissipazione, sistemi gradiente, selle, insiemi limite, orbite periodiche, teorema di Poincaré-Bendixon.

[4] **Sistemi discreti e discretizzazione:** equazioni alle differenze finite lineari, esempi di applicazioni all'economia matematica, metodo di Eulero, errore di troncamento e convergenza, discretizzazione conservativa, mappa standard.

[5] **Sistemi Hamiltoniani a un grado di libertà:** teorema di Liouville, integrabilità e legge oraria, studio qualitativo, trasformata di Legendre, sistemi lagrangiani, moti vincolati, trasformazioni canoniche, variabili azione-angolo.

[6] **Caos:** regioni caotiche per la mappa standard, teorema delle separatrici, punti omoclinici, insiemi iperbolici, ferro di cavallo di Smale, regioni ordinate, esponenti di Lyapounov, definizione di caos.

TESTI DI RIFERIMENTO

A. Milani, *Introduzione ai sistemi dinamici,* Seconda edizione riveduta e corretta, Edizioni Plus, Pisa, 2009; 256 pagine + CD-ROM, prezzo 18 euro. Contiene più di 80 esercizi (lo svolgimento degli esercizi e i programmi per alcuni esperimenti numerici sono disponibili sul CD-ROM venduto con il libro).

OBIETTIVI FORMATIVI

Conoscenze di base sull'algebra delle matrici e sui sistemi dinamici lineari, sui concetti di stabilità, equilibrio, integrale primo, sulle equazioni alle differenze finite.

Conoscenze specifiche sulla teoria qualitativa, sopratutto nel piano, sui sistemi conservativi con i formalismi newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano, sulla discretizzazione di equazioni differenziali ordinarie, sui sistemi dinamici non integrabili e caotici.

Esempi formativi di applicazioni a sistemi meccanici, economici, a problemi modello.

PREREQUISITI

Vengono ampiamente utilizzati argomenti che fanno parte dei programmi dei corsi del primo biennio, in particolare in Aritmetica, Algebra Lineare e Geometria Analitica, Elementi di Analisi, Analisi in più Variabili 1.

METODI DIDATTICI

Le lezioni e le esercitazioni sono svolte dal prof. Milani. L'orario comprende 6 ore settimanali (più le ore di ricevimento, per cui è disponibile anche il dr. Tommei). Gli studenti sono tenuti a partecipare attivamente, svolgendo esercizi e problemi.

MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

Esame scritto e orale. Saranno proposti agli studenti due compiti parziali; chi conseguirà una media sufficiente nei due compitini sarà esonerato dallo scritto. Sono previsti 5 appelli per lo scritto (2 a gennaio-febbraio, 2 a giugno-luglio, 1 a settembre), gli orali potranno essere distribuiti in un maggior numero di date, da negoziare caso per caso.

PROGRAMMA DI STATISTICA MATEMATICA}

Docente: Rita Giuliano

Anno Accademico 2013/14

Laurea Triennale, Anno di Corso 3, Secondo semestre

Numero crediti 6

CONTENUTI DELL' INSEGNAMENTO

Statistica Inferenziale: modelli statistici (dominati, regolari). Campioni.

Riassunti esaustivi, teorema di fattorizzazione di Neyman-Fisher.

Modelli esponenziali.

Il meccanismo delle decisioni: criteri di preferibilita'.

Teoria della stima: stima ed esaustivita'.

\smallskip\noindent

Informazione secondo Fisher e disuguaglianza di Cramer-Rao .

Informazione di Kullback.

Stime di massima verosimiglianza, consistenti e fortemente consisitenti. Teorema limite centrale per le stime di massima verosimiglianza.

Variabili gaussiane e vettori gaussiani. Modelli di regressione e modelli lineari. Il teorema di Gauss-Markov.
Campioni gaussiani, Teorema di Cochran.

Teoria dei test: La teoria di Neyman-Pearson. Test unilaterali e bilaterali. Test del rapporto di verosimiglianza.

Test sulla media di un campione Gaussiano, test di Student, test sulla varianza di un campione Gaussiano. Confronto tra due campioni indipendenti: il problema di Behrens -Fisher.

Introduzione ai metodi non parametrici: la funzione di ripartizione empirica, il teorema di Glivenko-Cantelli. Il test del chi-quadro. Test del chi-quadro per l'indipendenza. Il test di Kolmogorov.

TESTI DI RIFERIMENTO. Il corso si basera' principalmente su appunti (da distribuire a lezione).

Ottimi testi sono i seguenti:

–P. Baldi (1997), Calcolo delle Probabilita' e Statistica, Mc-Graw Hill Italia, Milano

–D. Dachuna-Castelle, M. Duflo (1986) Probability and Statistics, Springer, New York.

OBIETTIVI FORMATIVI. Il corso fornisce alcuni elementi di Statistica, con particolare attenzione al rigore matematico, oltre che alle applicazioni.

PREREQUISTI. Il corso di " Elementi di Probabilita'".

METODO DIDATTICO. Lezioni frontali con alcune esercitazioni.

MODALIT`A' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO. Colloquio orale.

Storia della matematica
Anno accademico 2014-2015
Pier Daniele Napolitani

Il corso abbraccia lo sviluppo della matematica in Occidente dai Greci fino alla creazione del calcolo infinitesimale. Si forniranno inoltre anche indicazioni su alcuni sviluppi dell'analisi e dell'algebra nel corso dell'Ottocento.

Non sono richiesti particolari prerequisiti, salvo un forte interesse per la storia e una preparazione matematica corrispondente a quella fornita dalla frquntazione dei primi due anni del corso di laurea in matematica.

Data la vastità del tema, si richiede la lettura di un manuale di storia della matematica; fortemente consigliato è

> Morris Kline, *Storia del pensiero matematico. Volume 1: dall'Antichità al Settecento*, a cura di Alberto Conte. Einaudi, Torino, 1999.

L'esame prevede un colloquio che inizierà su un tema scelto dal candidato.

A lezione verranno illustrati e approfonditi alcuni momenti salienti dello sviluppo della matematica in Occidente, e precisamente:

La matematica greca

- caratteri generali della matematica greca;
- Euclide e gli *Elementi*;
- Archimede e la geometria di misura;
- la geometria di posizione: da Apollonio a Pappo; il metodo del- l'analisi e sintesi.

Caratteri della matematica del Rinascimento (XIII-XVI secolo)

a. La cultura dell'abaco e dell'umanesimo
    - Leonardo Fibonacci e le scuole d'abaco;
    - l'Umanesimo e il recupero della matematica greca; l'invenzione della stampa e la diffusione della cultura scientifica.

b. Dalla riappropriazione dei Classici a nuovi orizzonti metodologici
    - la *traditio* dell'opera di Archimede, di Apollonio e di Pappo;
    - il problema dei centri di gravità e l'opera di Luca Valerio;
    - François Viète e l'invenzione dell'algebra simbolica.

La nascita della matematica moderna

- La teoria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri;
- La *Géométrie* di René Descartes;
- la nascita delle accademie e delle riviste scientifiche;
- il problema delle tangenti: i metodi di Descartes e di Pierre de Fermat
- il problema delle tangenti il calcolo differenziale di Leibniz
- serie e flussioni: i metodi di Isaac Newton.

Il materiale di approfondimento su questi temi verrà fornito di volta in volta durante il

TECNOLOGIE PER LA DIDATTICA

Syllabus del corso

Docente: Giuseppe Fiorentino
A.A.: 2014/15
Laurea: Specialistica Matematica – TFA (se attivato)
Semestre: 2°
Crediti: 6

CONTENUTI DELL'INSEGNAMENTO

Il corso mostra le potenzialità delle nuove tecnologie per la didattica della matematica, offrendo una panoramica sui principali strumenti informatici: fogli di calcolo (LibreOffice Calc), computer algebra (wxMaxima), geometria interattiva (GeoGebra), e-learning (Moodle), mappe concettuali (XMind), social media (Google Suite). Le lezioni sono svolte in laboratorio, in modo da presentare attivamente i vari strumenti e valutarne l'utilità e l'efficacia didattica sia sul piano teorico sia su quello pratico.

TESTI DI RIFERIMENTO

I materiali didattici saranno forniti durante il corso utilizzando la piattaforma di e-learning.

OBIETTIVI FORMATIVI

Il corso consentirà di appropriarsi di alcune tecnologie per rendere più efficace ed immediata la comunicazione didattica e la produzione di materiali interattivi. Saranno mostrate le potenzialità teoriche, l'uso e l'applicazione mediante la realizzazione concreta di materiali didattici.

PREREQUISTI

Non sono richiesti prerequisiti specifici.

METODI DIDATTICI

Il corso sarà svolto con un approccio *hands-on* in laboratorio, per sperimentare personalmente tutti gli strumenti analizzati. Per realizzare gli obiettivi del corso, si cercherà costantemente di collegare la teoria con la pratica con esercitazioni in aula e attività online.
Il corso si avvarrà di una piattaforma di e-learning per la condivisione di materiali, esercitazioni, opinioni, ecc.

MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

Parte delle attività del corso saranno svolte online e costituiranno elementi di valutazione per l'esame.
L'esame sarà costituito da un progetto collettivo e individuale. La progettazione delle varie parti sarà collegiale mentre la realizzazione delle stesse sarà individuale (o a piccoli gruppi, dipende dal numero dei partecipanti). L'attività di progettazione e di supporto sarà svolta sia in presenza sia online.

PROGRAMMA PRELIMINARE DI TEORIA ALGEBRICA DEI NUMERI 1
Docente ILARIA DEL CORSO
Anno Accademico 2014-20015

Richiami di teoria di Galois. Corrispondenza di Galois. Gruppi di Galois delle estensioni ciclotomiche e dei campi finiti.

Estensioni intere di un anello. Norma e traccia. Struttura additiva dell'anello degli interi di un campo dei numeri. L'anello degli interi dei campi quadratici.

Discriminante di una n-upla di elementi algebrici. Cambi di base e relazioni fra i discriminanti. Basi intere dei campi ciclotomici. Basi intere costruite mediante polinomi valutati in un generatore intero.

Domini di Dedekind. Gruppo degli ideali frazionari e gruppo delle classi di ideali. Fattorizzazione unica degli ideali nei domini di Dedekind.

Indice di ramificazione e grado di inerzia dei primi nelle estensioni. Formula di connessione con il grado dell'estensione. Il caso delle estensioni di Galois. Teorema di Kummer sullo spezzamento dei primi nelle estensioni. Spezzamento dei primi nei campi quadratici e nei campi ciclotomici.

Estensioni di Galois: gruppi di decomposizione e gruppi di inerzia. Estensioni massimali non ramificate ed estensioni massimali in cui un primo si spezza completamente. Applicazioni ai campi ciclotomici: legge di reciprocità quadratica.
Automorfismo di Frobenius per i primi non ramificati.
Caratterizzazione dei primi ramificati come quelli che dividono il discriminante del campo.

Teorema del corpo convesso di Minkowski. Finitezza del gruppo delle classi di ideali e determinazione della costante di Minkowski. Finitezza dell'insieme dei campi di numeri che ha un discriminante assegnato. Teorema delle unità di Dirichlet.

TESTI DI RIFERIMENTO

D. Marcus , Number Fields, Springer Verlag 1977.

PREREQUISTI

I prerequisiti per seguire il corso sono costituiti dai
programmi di Aritmetica e di Algebra1. Gioverebbe avere qualche conoscenza dei contenuti del corso di Algebra2.

Anno Accademico 2014-15

Programma del corso

Teoria Analitica dei Numeri A

modulo specialistico - 36 ore - 6 crediti

prof. G.Puglisi

Cenni alla teoria delle funzioni intere di ordine finito ed in particolare alla funzione gamma di Eulero.

La funzione zeta di Riemann: proprietá elementari, prolungamento analitico, equazione funzionale, striscia critica, funzione $\xi(s)$, prodotto di Weierstrass.

La formula di Riemann - von Mangoldt ed il teorema di Hadamard - de la Vallée Poussin; conseguenze aritmetiche: il teorema dei numeri primi, problemi aperti e congetture.

Caratteri e funzioni L di Dirichlet: proprietá elementari, prolungamento analitico, equazione funzionale, striscia critica, funzioni $\xi(s,\chi)$, prodotto di Weierstrass.

Zeri delle funzioni L nella striscia critica e regioni libere da zeri; i teoremi di Landau - Page e di Siegel. Numeri primi nelle progressioni aritmetiche.

Disuguaglianze di crivello largo additivo e moltiplicativo. Cenni alle stime di densitá per gli zeri della funzioni zeta e L. Applicazioni: primi negli intervalli corti, teorema di Bombieri - Vinogradov, problema di Brun - Titchmarsh e teorema di Davenport - Halberstam.

Bibliografia

H. Davenport *Multiplicative Number Theory - Third edition* Springer

E.C. Titchmarsh *The Theory of the Riemann Zeta-function - Second edition* Oxford Science

E. Bombieri *Le Grand Crible dans la Théorie Analytique des Nombres* Asterisque (1987)

Obiettivi

Presentare le principali tecniche analitiche ed i piú salienti risultati sia classici che relativamente recenti nell'ambito della teoria dei numeri moltiplicativa.

Prerequisiti

I corsi di analisi reale elementare e di analisi complessa in una variabile, i corsi di aritmetica e di teoria elementare dei numeri, rudimenti di analisi di Fourier e spazi L^p, funzioni speciali.

Modalitá di verifica

Esame finale orale con voto in trentesimi

Commissione d'esame

G. Puglisi (presidente), R. Dvornicich, C. Viola

PROGRAMMA DI Teoria dei Controlli
Docente Eugene Stepanov
Anno Accademico 2014/15
Laurea Matematica Anno di Corso 3,4,5 Semestre I
Numero crediti __________

CONTENUTI INSEGNAMENTO

1. Introduzione. Storia della teoria del controllo automatico. Regolatore di Watt.
2. Modello a blocchi e funzioni di trasferimento dei sistemi lineari. Criteri di stabilita` basati sull'analisi di frequenze.
3. Teoria dei sistemi di controllo lineari. Controllabilita`. Osservabilita` e stabilizzazione.
4. Teoria nonlineare dei sistemi regolari. Trasformazioni equivalenti e forme canoniche. Controllabilita` nonlineare, teorema di Chow-Rachevski. Linearizzazione totale e stabilizzazione.
[Problema di Aiserman. Stabilita`assoluta e criterio di Popov.]
[Insieme controllabile e le sue proprieta`. Controlli bang-bang.]
5. Sistemi switching. Teoria di Filippov (di sliding regime).
6. Sistemi di controllo ibrido. Effetto di memoria. Dinamica ibrida come limite di dinamiche classiche: esempio biologico.
7. [Elementi di controllo ottimo. Esistenza e unicita` dei controlli di norma minima e di tempo minimo. Principio di massimo di Pontryagin].

TESTI DI RIFERIMENTO

1. H. Halil. Nonlinear Systems.
2. J.R. Leigh. Functional Analysis and Linear Control Theory.
3. A. Isidori. Nonlinear Control Systems.
4. J.K. Hedrick, A. Girard. Control of Nonlinear Dynamic Systems: Theory and Applications

OBIETTIVI FORMATIVI

conoscenza dei problemi, metodi e concetti di base della teoria
moderna del controllo automatico

PREREQUISTI

Analisi matematica (equazioni differenziali) - obbligatorio;
puo` essere di grande aiuto avere
seguito anche il corso di sistemi dinamici
(almeno avere una nozione di stabilita` di Lyapunov).

METODI DIDATTICI
lezioni

MODALITA' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

esame

2014-09-01 18:34 GMT+04:00 <majer@dm.unipi.it>:
>
> Cari colleghi,
>
> Lunedi 22 e Martedi 23 settembre presenteremo agli sudenti
> i corsi dell'anno accademico entrante.
>
> Lo spazio che abbiamo a disposizione per i corsi di Analisi
> e di Probabilita' (16 in tutto) e', per entrambi i giorni:
>
>   Mattina: 11-12. (tre corsi LT/LM per di')
>
>   Pomeriggio: 16-17:30 (cinque corsi LT per di')
>
> La durata di ogni presentazione è indicativamente 15 minuti (come vedete
> i tempi non sono compressi; è bene pero' che cerchiamo di rispettarli
> affinche' queste giornate, improntate alla gioia e all'entusiasmo d'un
> nuovo Studio da intraprendere, non siano velate da un eccessivo e
> prematuro Affaticamento, ed anche per permettere un ordinato ricambio del
> pubblico).
>
> AttenzionE: per motivi organizzativi dovremmo presentare il
> programma entro il 16 settembre.
>
> Quindi vi chiedo intanto di segnalarmi le vostre indisponibilità
> entro questa settimana, e nel caso che non vi sia possibile essere
> presenti vi chiedo di indicare un sostituto, e di segnalarmi le sue
> indisponibilita' (io stesso sono disponibile, ma solo per il giorno 22).
>
> Grazie!
> Buona giornata.
> Pietro.

---------- Переадресованное сообщение ----------
От: "Eugene Stepanov" <stepanov.eugene@gmail.com>
Дата: 01.09.2014 23:02
Тема: Re: Per il Programma della Presentazione dei Corsi di Analisi.
Кому: "Pietro Majer" <majer@dm.unipi.it>
Копия:

Caro Pietro,

purtroppo non potrei venire a Pisa prima del 28.09, quindi, il corso "Teoria dei Conrolli" lo inizio il lunedi 29 settembre. Potete comunicarlo agli studenti? In realta` non dovrebbe essere un problema perche' il corso lo devo tenere (secondo l'orario che mi ha mandato Beatrice Meini) ogni lunedi e mercoledi, ma visto che lunedi della prima settimana (il 22.09) e` gia` occupato con la presentazione dei corsi, in realta` perdo solo il primo mercoledi (il 24.09) e inizio il corso, appunto gia` il lunedi successivo il 29.09.

In particolare, non potro' essere presente alla presentazione dei corsi.
Per gli studenti interessati allego qui il breve programma.

Cordiali saluti, Eugene

PROGRAMMA DI Teoria dei Controlli
Docente Eugene Stepanov
Anno Accademico 2014/15
Laurea Matematica Anno di Corso 3,4,5 Semestre I
Numero crediti ___________

CONTENUTI INSEGNAMENTO

1. Introduzione. Storia della teoria del controllo automatico. Regolatore di Watt.
2. Modello a blocchi e funzioni di trasferimento dei sistemi lineari. Criteri di stabilita` basati sull'analisi di frequenze.
3. Teoria dei sistemi di controllo lineari. Controllabilita`. Osservabilita` e stabilizzazione.
4. Teoria nonlineare dei sistemi regolari. Trasformazioni equivalenti e forme canoniche. Controllabilita` nonlineare, teorema di Chow-Rachevski. Linearizzazione totale e stabilizzazione.
[Problema di Aiserman. Stabilita`assoluta e criterio di Popov.]
[Insieme controllabile e le sue proprieta`. Controlli bang-bang.]
5. Sistemi switching. Teoria di Filippov (di sliding regime).
6. Sistemi di controllo ibrido. Effetto di memoria. Dinamica ibrida come limite di dinamiche classiche: esempio biologico.
7. [Elementi di controllo ottimo. Esistenza e unicita` dei controlli di norma minima e di tempo minimo. Principio di massimo di Pontryagin].

TESTI DI RIFERIMENTO

1. H. Halil. Nonlinear Systems.
2. J.R. Leigh. Functional Analysis and Linear Control Theory.
3. A. Isidori. Nonlinear Control Systems.
4. J.K. Hedrick, A. Girard. Control of Nonlinear Dynamic Systems: Theory and Applications

OBIETTIVI FORMATIVI

conoscenza dei problemi, metodi e concetti di base della teoria
moderna del controllo automatico

PREREQUISTI

Analisi matematica (equazioni differenziali) - obbligatorio;
puo` essere di grande aiuto avere
seguito anche il corso di sistemi dinamici
(almeno avere una nozione di stabilita` di Lyapunov).

METODI DIDATTICI
lezioni

MODALITA' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO esame

TEORIA DESCRITTIVA DELLA COMPLESSITÀ (222AA)

DOCENTE: Alessandro Berarducci
Anno di corso: 2013-2014
Laurea magistrale, Semestre: I
6 CFU, 42 ore, codice insegnamento 222AA

CONTENUTI DELL'INSEGNAMENTO:

I problemi suscettibili di una soluzione algoritmica possono essere raggruppati in classi di complessità a seconda del tempo di calcolo e dello spazio di memoria necessari a trovare una soluzione. Le classi più note sono la classe P dei problemi risolubili in tempo polinomiale e la classe NP dei problemi risolubili non-derministicamente in tempo polinomiale. Uno dei sette "problemi del millennio" del Clay Institute chiede se P=NP. Nell'approccio descrittivo alla teoria della complessità si riescono a caratterizzare le principali classi di complessità senza far riferimento alle risorse di calcolo, ma facendo invece riferimento al numero e al tipo di quantificatori necessari a descrivere il problema. Ciò apre la strada alla possibilità di affrontare lo studio delle classi di complessità con i metodi della teoria dei modelli finiti. In particolare possono essere utilizzati a questo scopo i cosidetti "giochi di Erenfeucht-Fraïssé". Nel corso presenteremo una selezione dei risultati della teoria dei modelli finiti e le principali connessioni con la teoria della complessità.

TESTI DI RIFERIMENTO:

Neil Immerman, Descriptive Complexity, Springer 1998

Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, Finite Model Theory, Springer 1999

Christos H. Papadimitriou, Computational Complexity, Addison-Wesley, 1994

PREREQUISITI: Non vi sono prerequisiti specifici salvo una generale maturità matematica. Il corso è comunque rivolto soprattutto agli studenti che hanno seguito il corso di Logica Matematica.

METODI DIDATTICI: Lezioni ed esercitazioni integrate.

OBIETTIVI FORMATIVI: Presentazione di alcune tematiche della logica matematica nelle loro connessioni con l'informatica teorica.

MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO: Esame finale orale.

Teoria Ergodica

Molti sanno che le traiettorie di una dinamica caotica sono imprevedibili, e piccole variazioni sulle condizioni iniziali portano a traiettorie diverse.
Le proprietà statistiche di queste traiettorie (che sono quelle importanti per molte applicazioni) in molti sistemi caotici sono al contrario piuttosto stabili e prevedibili.
La teoria Ergodica si occupa dello studio di queste proprietà.
Il corso affronterà alcuni argomenti classici di questa teoria, con uno sguardo particolare all approccio funzional-analitico e all operatore di trasferimento.

Programma

TRASFORMAZIONI CHE CONSERVANO UNA MISURA

Definizioni. Ricorrenza. Misure invarianti ed ergodiche.
Esistenza delle misure invarianti. Teorema di Krylov-Bogolyubov.

Mixing. Decadimento delle correlazioni.
Teoremi ergodici.
Cenni alla ricorrenza quantitativa e sviluppi recenti.

MISURE INVARIANTI REGOLARI E MISURE FISICHE

Operatore di Perron-Frobenius e di trasferimento.
Misure invarianti assolutamente continue.
Mappe espandenti a pezzi, diseguaglianza di Lasota Yorke e conseguenze.
Spettro dell operatore di trasferimento, decadimento delle correlazioni e conseguenze.

ENTROPIA
Denizione. Partizioni generanti e Teorema di Kolmogorov-Sinai.
Teorema di Shannon-McMillan.

Testi di riferimento:

K. Petersen, \Ergodic Theory", Cambridge University Press, 1983

V. I. Arnold, A. Avez, Ergodic Problems in Classical Mechanics, New York, Benjamin, 1968.

C. Liverani Invariant measures and their properties. A functional analytic approach.
www.mat.uniroma2.it/~liverani/Lavori/live0203.pdf

O. Sarig Introduction to the transfer operator method
http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~sarigo/TransferOperatorCourse.pdf

Programma di massima. Gli argomenti toccati saranno scelti nella seguente lista:

- Topologia Algebrica Combinatoria (Teoria di Morse Discreta)

- Teoria classica dell'omotopia (gruppi di omotopia superiore, approssimazione cellulare, teoremi di Whitehead e Hurewicz, omega-spettri,ecc)

- Fibrazioni e fibrati localmente banali (con cenni alle successioni spettrali)

- Elementi di coomologia dei gruppi.

Testi consigliati:

A. Hatcher, "Algebraic Topology"; (sito dell'autore)
" , "Spectral sequences"; "
N. Steenrod, "The topology of fibre bundles"; Princeton Landmarks in Mathematics
D. Kozlov, "Combinatorial Algebraic Topology"; Springer
K. Brown, "Cohomology of groups"; Springer, GTM

Corso "ULTRAFILTRI E METODI NONSTANDARD" (UMN) (cod. 230AA)

anno accademico 2014/2015 - Secondo semestre

Docente: Mauro Di Nasso

TESTI di RIFERIMENTO:

W. Comfort, S. Negropontis, The Theory of Ultrafilters, Springer-Verlag.

McCutcheon, Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory, Springer.

I. Protasov, Combinatorics of Numbers, VNTL Publishers

R. Goldblatt, Lectures on the Hyperreals, Springer.

PROGRAMMA PREVISTO:

PARTE 1: ULTRAFILTRI

Filtri e ultrafiltri. Prodotto tensore tra ultrafiltri. Limiti in topologia lungo ultrafiltri e relativa caratterizzazione della compattezza. Teorema dei tre colori (se f:N-->N non ha punti fissi, allora esiste una 3-colorazione tale che n ed f(n) hanno sempre colori diversi). Immagini di ultrafiltri, isomorfismo tra ultrafiltri, preordine di Rudin-Keisler. Lo spazio topologico betaN degli ultrafiltri su N come compattificazione di Stone-Cech dello spazio discreto N. Ultrafiltri selettivi e ultrafiltri P-points.

PARTE 2: COMBINATORIA DEI NUMERI

Teorema di Ramsey finito e infinito. Insiemi di somme e di differenze. Teorema combinatorio di Schur, ed esistenza di soluzioni non banali all'equazione di Fermat per campi finiti sufficientemente grandi. Principio di compattezza combinatoria. La pseudosomma in betaN e relativa struttura di semigruppo topologico destro compatto. Teorema di Ellis e esistenza di ultrafiltri idempotenti. Teorema di Hindman additivo e moltiplicativo. Versione simultaneamente

additiva e moltiplicativa del Teorema di Hindman. Ideali sinistri in betaN.
Ideali minimali ed ultrafiltri minimali. L'ideale bilatero minimo K.
Un insieme che appartiene ad un ultrafiltro minimale contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe. Teorema di van der Waerden.
Regolarita' per partizione debole e forte e relative caratterizzazioni mediante ultrafiltri.

PARTE 3: ANALISI NONSTANDARD

Introduzione all'analisi nonstandard. Campi superreali, numeri infinitesimi ed infiniti, parte standard di un numero finito. Costruzione di ultraprodotto.
Numeri iperreali come ultrapotenza dei reali. Numeri ipernaturali, iperrazionali ecc. La mappa * (estensione nonstandard) e il principio di transfer.
Uso dell'analisi nonstandard per la dimostrazione di alcuni risultati fondamentali del calcolo, tra cui Teorema di Heine-Cantor, Teorema di Weierstrass, regola di Leibniz. Insiemi interni, proprieta' di overspill, underspill e saturazione.
Insieme iperfiniti.

PARTE 4: APPLICAZIONI IN TEORIA COMBINATORIA DEI NUMERI

Densita' asintotica inferiore e superiore. Insieme spesso, sindetico, sindetico a tratti. Se un insieme A ha densita' positiva, allora l'insieme di differenze A-A incontra ogni insieme X-X con X infinito, e in particolare e' sindetico.
Gli insiemi sindetici a tratti sono regolari per partizione. Caratterizzazioni nonstandard degli insiemi spessi, sindetici, sindetici a tratti. Insiemi additivamente grandi, insiemi AP-rich (cioe' contenenti progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe) e loro regolarita' per partizioni.
Relazione di finita immergibilita' tra insiemi di interi, e relative proprieta'.
Lemma di Fekete, densita' di Banach e sua caratterizzazione nonstandard.
Teorema di Jin: l'insieme somma A+B di due insiemi con densita' di Banach positiva

e' sindetico a tratti (dimostrazione nonstandard).

Ultrafiltri generati da numeri ipernaturali e la relativa mappa tra *N e betaN.

Dimostrazione nonstandard che il centro di betaN e' N. Sistemi dinamici discreti, punti di ricorrenza, di uniforme ricorrenza. Teorema di Birkhoff. Il sistema dinamico (betaN, s) dove S:betaN-->betaN e' l'operatore "shift". Gli ultrafiltri minimali sono i punti di uniforme ricorrenza di (betaN,S).

Caratterizzazione nonstandard della regolarita' per partizione di equazioni.

Dimostrazione nonstandard del teorema di Rado sulla regolarita' per partizione di equazioni diofantee lineari. Il caso non lineare. Discussione di problemi aperti.