

Alcuni argomenti di Analisi Geometrica in spazi metrici ed in strutture non riemanniane

Valentino Magnani (Università di Pisa)

Descrizione La parte introduttiva del corso esporrà le motivazioni ed il punto di vista astratto dell'analisi e della geometria in spazi metrici, fornendo le prime nozioni ed i primi risultati generali. Si focalizzerà successivamente l'attenzione su varietà subriemanniane e gruppi nilpotenti stratificati (o di Carnot), anche in contesto infinito dimensionale. Si introdurranno le metriche naturali in tali spazi e si studieranno le nozioni di differenziabilità intrinseca, con le loro conseguenze sulla "rigidità" dei gruppi stratificati. Si mostrerà come questo tipo di differenziabilità e le strutture algebriche di tali gruppi portino ad una naturale nozione di varietà intrinseca. Saranno fornite alcune formule recenti per calcolare la misura di Hausdorff di insiemi in spazi metrici con applicazioni a superfici regolari ed intrinsecamente regolari. Si mostreranno anche i legami recentemente osservati di tali applicazioni con teoremi di differenziabilità intrinseca quasi ovunque. Saranno introdotti gli insiemi intrinsecamente rettificabili e la teoria dei perimetri di Caccioppoli-De Giorgi nel contesto dei gruppi nilpotenti. Se il tempo lo consentirà, brevi cenni saranno dedicati alle questioni di trasversalità per superfici e alle mappe di Sobolev rispetto alle geometrie dei gruppi nilpotenti. Ogni capitolo trattato avrà una sezione dedicata alle attuali questioni irrisolte.

Abstract We will first illustrate motivations and the abstract viewpoint of Analysis and Geometry in metric spaces, providing basic notions and some general results. Then we will focus our attention on subriemannian manifolds and stratified nilpotent Lie groups (or Carnot groups), along with their infinite dimensional versions. Natural metrics and the notion of intrinsic differentiation with respect to the algebraic group structure will be introduced. We will show how this differentiability provides "rigidity" results for stratified groups. Connections between this type of differentiation and the algebraic structures of the stratified groups naturally lead to a notion of intrinsic submanifold. Some recent formulas will be provided to compute the Hausdorff measure of subsets in metric spaces, with the objective to show how these formulae can be used to compute the Hausdorff measure of regular and of intrinsically regular surfaces in stratified groups. Some recent connections of this problem to almost everywhere intrinsic differentiability theorems will be pointed out. Intrinsically rectifiable sets and the Caccioppoli-De Giorgi's theory of perimeters will be introduced in the context of nilpotent groups. If

time permits, a short introduction will be also devoted to transversality issues for submanifolds and to Sobolev mappings with respect to the geometry of stratified groups. Each topic of the course will contain a section devoted to open questions.

Prerequisiti Sono indispensabili le nozioni di varietà differenziabile astratta, campo vettoriale, flusso ed elementi di algebra multilineare, è quindi raccomandabile aver seguito almeno un corso di Geometria Differenziale. Saranno richiamati brevemente teoremi di ricoprimento, misure di Borel e di Hausdorff, formule di area e di coarea classiche, per cui sarà importante avere conoscenze almeno basilari di Teoria Geometrica della Misura.

Prerequisites The notions of abstract differential manifold, vector field, flux and elements of multilinear algebra are essential, therefore having followed at least a course in Differential Geometry is recommended. Covering theorems, Borel and Hausdorff measures, classical area and coarea formulas will be briefly recalled, so it is important to have some basic knowledge of Geometric Measure Theory.