Relazione triennale di attività scientifica e didattica nel periodo 30.12.2017 — 30.12.2020

Ekaterina Pervova

Nel periodo indicato la mia attività si è svolta nei seguenti ambiti, la maggior parte di cui riguarda i cosiddetti spazi diffeologici. Con il termine *diffeologia* si intende un analogo di struttura liscia, di cui però può essere dotato qualsiasi insieme, cosicché anche le operazioni topologiche/insiemistiche che di solito non conservano una struttura liscia usuale, possono essere applicate a spazi diffeologici. In particolar modo, l'operazione dell'incollamento topologico, che in genere non conserva una struttura liscia, può essere agevolmente eseguita per spazi diffeologici, con risultato sempre uno spazio diffeologico (si parla in tal caso dell'*incollamento diffeologico*).

1. Decomposizioni lisce e decomposizioni canoniche di spazi vettoriali diffeologici

Dotare uno spazio vettoriale, anche di dimensione finita, di un'opportuna struttura diffeologica (riguarda alla quale le operazioni dello spazio vettoriale siano lisce nel senso diffeologico) dà inizio ad alcuni fenomeni, che non trovano un analogo nel contesto standard. Tra questi, c'è la nozione di una *decomposizione liscia* dello spazio in una somma diretta (se $V_1, V_2 \leqslant V$ sono due sottospazi di uno spazio vettoriale V tali che $V = V_1 \oplus V_2$, tale decomposizione può essere o meno liscia, a seconda della relazione esistente tra la struttura diffeologica di V e quelle di V_1, V_2). Come è dimostrato in [1], esistono molte decomposizioni di un V in somma diretta, anche nei casi più semplici, che non sono lisce; d'altronde, si dimostra in [3] che esistono sottospazi che non fanno parte di alcuna decomposizione liscia. In [2] si considerano inoltre casi di sottospazi specifici, ad esempio, quelli del nucleo e dell'immagine di un'applicazione lineare liscia nel senso diffeologico.

Il concetto di una decomposizione liscia in somma diretta ha molti legami con quello di una *pseudo-metrica*, che è l'analogo diffeologico del prodotto scalare, definito come una forma bilineare simmetrica semi-definita positiva di rango massimale (si dimostra in [1] che tale rango coincide con la dimensione dello spazio duale ed è in genere minore della dimensione dello spazio stesso). Come dimostrato in [3], il sottospazio isotropico massimale W_0 di una qualsiasi pseudo-metrica on un dato V di dimensione finita non dipende dalla pseudo-metrica e quindi è un invariante di V stesso; lo è pertanto anche il quoziente V/W_0, detto *quoziente caratteristico*. La naturale diffeologia su quest'ultimo è sempre una diffeologia standard (cioè, un'usuale struttura liscia su uno spazio Euclideo).

Il sottospazio isotropico massimale fa sempre parte di una qualche decomposizione liscia; in particolare, ad ogni scelta di una base di V corrisponde la cosiddetta *decomposizione canonica* di V in somma diretta $V = W_0 \oplus V_0$, dove W_0 è il sottospazio isotropico massimale and V_0 è il complementare ortogonale di W_0 rispetto al prodotto scalare canonico di V associato alla scelta della base, detto anche il *sottospazio caratteristico* di V. Tale decomposizione è in particolare sempre liscia, pur non essendolo il prodotto scalare coinvolto nella sua determinazione; e infatti, questa decomposizione, e nello specifico il sottospazio caratteristico, non è un invariante di V e dipende dalla scelta di base ([3]). D'altro canto, quando tale scelta viene fissata, la corrispondente decomposizione canonica fornisce una naturale decomposizione liscia della algebra Clifford di V associata ad una qualsiasi pseudo-metrica on V ([2], [3]).

2. Quozienti caratteristici di pseudo-fibrati, sottofibrati caratteristici, e *gluing-dual commutativity*

In un lavoro precedente (E. Pervova, "Pseudo-bundles of exterior algebras as diffeological Clifford modules", Adv. Appl. Clifford Algebras 27 (2017), 2677-2737) viene studiata la cosiddetta *gluing-dual commutativity condition*, che stabilisce ipotesi sotto le quali le operazioni, rispettivamente, di incollamento e del passaggio allo pseudo-fibrato duale commutano tra loro. In quel lavoro tale condizione viene però studiata sotto forti assunzioni base sugli pseudo-fibrati di partenza; in particolar modo, viene richiesto che siano ben definiti ed univocamente determinati i loro sottofibrati caratteristici (si chiede inoltre che gli pseudo-fibrati siano localmente banali, un'assunzione che spesso non si verifica), un'ipotesi valida, ad esempio, quando tutte le fibre dello pseudo-fibrato hanno una struttura diffeologica standard. Peró, evince dai risultati di [3] che la validità di tale ipotesi è assai limitata. Pertanto in [4] vengono studiati altri potenziali approcci allo studio di questa condizione della commutatività, ivi compreso lo sviluppo della nozione di *un* sottofibrato caratteristico (in generale, non ben definito con approcci precedenti) e l'utilizzo della costruzione del cosiddetto *quoziente caratteristico* di un sottofibrato (esso sempre ben definito).

Insiemi di generatori di diffeologie da pseudo-fibrato Il precursore di uno pseudo-fibrato diffeologico è un'applicazione surgettiva da un insieme V su uno spazio diffeologico X tale che la pre-immagine di ogni punto è dotata di una struttura di uno spazio vettoriale (che viene detto *pre-fibrato*). Tale V può essere dotato di diverse diffeologie che lo rendono uno pseudo-fibrato diffeologico (dette *diffeologie da pseudo-fibrato*). Come un prerequisito allo sviluppo del concetto di uno pseudo-fibrato caratteristico, vengono approfondite alcune questioni riguardanti l'insieme di possibili diffeologie da pseudo-fibrato su un dato V, ivi comprese la determinazione della diffeologia da pseudo-fibrato minimale e studio delle sue proprietà, e la descrizione di un insieme di generatori della diffeologia da pseudo-fibrato minimale che contiene un dato insieme di mappe (qui viene sottolineata la seguente distinzione. Dato un'insieme A di mappe into V, esiste il concetto standard della diffeologia on V generata da A. Questa diffeologia in genere non è una diffeologia da pseudo-fibrato. L'insieme dei generatori di quest'ultima, più grande di A, viene ottenuto da A, come è descritto in [9]). Vengono anche studiati insiemi dei generatori delle diffeologie da pseudo-fibrato canoniche sugli pseudo-fibrati duali, pseudo-fibrati somme dirette, e pseudo-fibrati prodotti tensoriali, a partire da insiemi di generatori delle diffeologie (da pseudo-fibrato) sugli pseudo-fibrati di partenza.

Decomposizioni lisce di pseudo-fibrati Una decomposizione di uno pseudo-fibrato diffeologico V nella somma diretta dei suoi sottofibrati V_1 e V_2 viene detta *liscia* se la diffeologia di V coincide con la canonica diffeologia di somma diretta su $V_1 \oplus V_2$. Tale concetto estende quello di una decomposizione liscia di uno spazio vettoriale senza ridursi ad esso. È infatti possibile che una decomposizione $V = V_1 \oplus V_2$ induca una decomposizione liscia, ai sensi di spazi vettoriali, su ciascuna fibra senza essere liscia globalmente (ovviamente, se V è localmente banale, questo non può accadere).

Pseudo-fibrati metrizzabili e il concetto di un sottofibrato caratteristico Uno pseudo-fibrato è detto *metrizzabile* se il pre-fibrato ad esso sottogiacente dotato dalla diffeologia da pseudo-fibrato minimale (detto *pre-fibrato minimale*) ammette una pseudo-metrica. Se un pseudo-fibrato è metrizzabile, un suo sottofibrato caratteristico può essere definito come l'insieme degli complementari ortogonali, rispetto ad una qualsiasi pseudo-metrica sul suo pre-fibrato minimale, degli sottospazi isotropici massimali di tutte le fibre; l'insieme di tutti questi sottospazi viene detto il *sottofibrato isotropico*, ed è univocamente definito. Almeno quando lo pseudo-fibrato iniziale V è localmente banale, la corrispondente decomposizione di V in somma diretta del suo sottofibrato isotropico e di qualsiasi suo sottofibrato caratteristico (che dipende invece dalla scelta di pseudo-metrica sul pre-fibrato minimale) è liscia. Il sottofibrato caratteristico è inoltre diffeomorfo sia al fibrato duale di V, sia al suo quoziente dal sottofibrato isotropico (detto il *quoziente caratteristico*).

Commutatività tra l'operazione di incollamento e quella del passaggio al pseudo-fibrato duale, e quozienti caratteristici La *gluing-dual commutativity condition* si riferisce all'eventuale esistenza di un diffeomorfismo di pseudo-fibrati $(V_1 \cup_{\tilde{f}} V_2)^* \cong V_2^* \cup_{\tilde{f}^*} V_1^*$. L'esistenza di un tale diffeomorfismo, sotto opportune ipotesi, può talvolta essere stabilita utilizzando il sottofibrato caratterstico (assumendone per ipotesi l'esistenza e l'unicitá). Le ipotesi aggiuntive necessarie per definite un sottofibrato caratteristico, insieme con la sua non-unicità, rende meno agevole il suo utilizzo nello studio della *gluing-dual commutativity condition.* Lo pseudo-fibrato quoziente caratteristico è privo di questi diffetti. Esso pertanto viene utilizzato per studiare la commutativitá tra incollamento e passaggio al duale, minimizzando le ipotesi di partenza.

3. Pull-backs di connessioni diffeologiche

Nel [5] era già stata introdotta la nozione di una connessione diffeologica su uno pseudo-fibrato (una delle versioni esistenti di tale concetto). Siccome questa nozione viene definita per la più stretta analogia con il caso classico, è naturale considerare anche l'opportuna estensione, nel contesto diffeologico, della costruzione di una connessione pull-back, corredandola, stavolta, di opportuni esempi (si veda il punto successivo).

4. Alcuni casi specifici di spazi diffeologici, e revisione dei lavori precedenti

In [4]—[8] venivano sviluppati talune versioni di analoghi diffeologici delle principali componenti di un operatore di Dirac. Questi lavori precedenti rappresentavano tuttavia una specie di ossatura che necessita uno sviluppo ulteriore, sotto forma innanzitutto dello studio di un loro inquadramento in un più ampio contesto di geometria differenziale. Tale sviluppo viene effettuato lungo le direttrici sotto elencate (la relativa revisione dei lavori [4] — [8] comprende una riscrittura del manoscritto [8], non destinato a pubblicazione, in base di tutti gli altri nuovi risultati ottenuti nel frattempo).

Incollamento diffeologico e atlanti di varietà riemanniane Come dimostrato in un lavoro precedente (E. Pervova, "Diffeological gluing of vector pseudo-bundles and pseudo-metrics on them", Topology and Its Applications 220 (2017) 65-99), la nozione dell'incollamento tra pseudo-fibrati corrisponde, nel contesto appropriate, a quella della classica nozione d'un atlante su una varietà liscia. Questo approccio viene esteso, dimostrando una simile corrispondenza, per gli altri concetti già apparsi in [4] — [8] (ad esempio, che una 1-forma differenziale su una varietà liscia corrisponde all'1-forma differenziale diffeologica ottenuta tramite un opportuno incollamento delle 1-forme indotte sulle carte dell'atlante, e così via per gli altri concetti).

Varietà lisce dotate di una metrica degenere Il fibrato tangente di una varietà liscia dotato di una metrica talora degenere può essere facilmente interpretato come uno pseudo-fibrato vettoriale diffeologico dotato di una pseudo-metrica, estendendo la diffeologia standard su ciascuna fibra su cui la metrica data degenera, ad una diffeologia su tale fibra rispetto a cui essa diventa una pseudo-metrica ai sensi di spazi vettoriali diffeologici. Tale costruzione è facilissima da effettuare, con l'esito però di una certa artificiosità. Si spera di poter identificare una diffeologia che adempi allo stesso scopo, ma che scaturisca, in un modo più naturale, dal contesto iniziale medesimo.

5. Accoppiamento e dimensioni di zattere lipidiche in base alla minimizzazione di energia libera e metodi della geometria differenziale discreta

Le zattere sono aggregati, nelle membrane cellulari, di alcuni tipi di lipidi, specialmente colesterolo e sfingolipidi; si distinguono, rispetto al resto della membrana, per maggiori spessore e rigidità. Essendo le tipiche dimensioni di zattere assai limitate (le stime vanno da circa 10 nm di diametro all'incirca 100 nm di diametro), esse sono assai difficili da osservare *in vivo*, pertanto gli aspetti sconosciuti che riguardano le zattere sono assai numerosi. L'importanza di zattere lipidiche, oltre che alle numerose incognite ad esse associate, è dovuta anche al fatto che esse ospitano diverse proteine di notevole rilevanza biologica, basti nominare il trasportatore di dopamina (DAT).

Tra gli aspetti ignoti delle zattere spiccano questioni riguardanti le loro effettive dimensioni — essendo le stime sopra citate assai ampie, nonché incerte —, la loro forma — dove secondo alcuni punti di vista sarebbero piatte e secondo alcune altre sferiche —, e la questione se una tipica zattera sia contenuta in un foglietto (esterno o interno) soltanto, o è più comune per due zattere nei due foglietti essere accoppiate. In un progetto in collaborazione con il Prof. Riccardo Zucchi abbiamo cercato di mettere in relazione alcune di queste questioni, senza però poter arrivare a delle conclusioni definitive.

Approccio energetico e accoppiamento di zattere L'approccio energetico è il principale metodo tipicamente utilizzato nello studio di zattere. Esso si basa sul presupposto che il valore dell'energia richiesta per l'esistenza di una zattera non può superare una certa soglia critica. Ora, questa energia dipende dai fattori quali lo spessore della zattera (tramite il concetto della cosiddetta *line tension*) e la sua forma. In quest'ultimo caso l'energia richiesta dipende innanzitutto dalla precisa composizione lipidica di una zattera (il tipico profilo di tale composizione è noto solo molto approssimativamente). Una miscela lipidica infatti assume spontaneamente una certa forma corrispondente ad un determinato minimo energetico; perché essa assuma una forma diversa, va spesa l'energia, il cui valore dipende sia dalla forma nuova sia dalla composizione della miscela.

Assumendo in via teorica una certa composizione di una zattera ipotetica, si può quindi calcolare l'energia richiesta perché essa sia, ad esempio, sferica, e ciò in due casi: quando la zattera è composta da due zattere accoppiate (cioè, quando è bilaterale) e quando la zattera si limita ad un unico foglietto, cioè, è unilaterale, con la speranza anche di poter stabilire quale dei due casi, bilaterale o unilaterale, è più probabile. Premettendo che, mentre la convinzione prevalente è che le zattere tendono di assumere una forma sferica, i dati sperimentali in tal senso non sono del tutto netti, tale distinzione non sembra possibile da effettuare in base a sole stime approssimative, senza disporre di dati più precisi riguardanti sia la composizione di una zattera "realistica" sia quella di una regione di membrana "tipica". Infatti, considerando i soli modelli approssimativi, abbiamo visto che si ottengono entrambi i tipi di conclusione: in taluni casi sembrava che le zattere erano più probabili di essere bilaterali, in altri casi, unilaterali. Non potendo disporre di dati sperimentali più precisi che potessero chiarire tale contraddizione, non ci restava che abbandonare questo progetto.

Approccio basato sulla versione discreta del teorema di Gauss Un altro approccio (oltre quello energetico) sembrava di poter essere usato per studiare specificamente le potenziali dimensioni delle zattere. Questo approccio è basato sulla presentazione di molecole lipidiche dai coni tondi troncati e utilizzerebbe tecniche della geometria differenziale discreta (sviluppata ad esempio in F. Günther, D. Jiang, H. Pottmann, "Small polyhedral surfaces", arXiv:1703.05318), con utilizzo di una qualche versione discreta del teorema di Gauss-Bonnet.

L'idea di fondo sarebbe questa. Una zattera (e questo è uno dei pochi dati certi) è costellata dalle molecole di colesterolo, pertanto la sua superficie può essere considerata ben rappresentata dagli intorni locali di queste molecole. Questi intorni locali (*annular shells*) sarebbero composti da una molecola di colesterolo insieme con tutte le molecole ad essa adiacenti. Ora, abbastanza spesso si crede che le poche molecole coinvolte in una tale configurazione possono essere ben rappresentate da coni tondi (troncati all'vertice), i cui parametri possono essere dedotti da alcuni noti dati sperimentali. (Questo è perché, mentre il modello a sfere e bastoncini di una molecola, ad esempio, di colesterolo ha una forma piuttosto piatta, l'effettivo volume occupato dalla molecola deve essere arrotondato, dato che essa continuamente vibra attorno ad una sua asse). In base a tutto ciò, è possibile stabilire un aspetto preciso di un involucro locale di una molecola di colesterolo, ad esempio, quante molecole di ogni determinata specie lipidica esso contiene.

Però, dalla considerazione di alcune situazioni da ritenere plausibili, emergeva sempre il risultato che le molecole adiacenti ad una molecola di colesterolo erano quattro. Il che sarebbe stata una buona notizia, permettendo, in un modo naturale, di definire le curvature principali locali della superficie poliedrica approssimante la superficie della zattera (e questo effettivamente si può fare). Il problema è che, mentre ci sono dati sperimentali che indicano che la forma effettiva di una molecola di colesterolo è in effetti tonda, ugualmente ci sono dati che indicano che le molecole ad essa adiacenti sono in media cinque. Di nuovo, non disponendo di ulteriori dati sperimentali che permetterebbero di chiarire questa contraddizione, non ci restava che abbandonare anche questo approccio.

Non rientrando ciò negli obblighi istituzionali dei RTI, in questo periodo non ho tenuto lezioni frontali.

Pubblicazioni

1. E. Pervova, *On the notion of scalar product for finite-dimensional diffeological vector spaces*, Electr. J. Linear Algebra 34 (2018), 18-27.

2. E. Pervova, *Diffeological Clifford algebras and pseudo-bundles of Clifford modules*, Linear and Multilinear Algebra (9) 67 (2019), 1785-1828.

Preprint

3. E. Pervova, *Linear and multiplinear algebra on diffeological vector spaces*, arXiv:1504.08186v4 (2020).

4. E. Pervova, *Differential* 1*-forms on diffeological spaces and diffeological gluing*, arXiv:1605.07328v2, under revision.

5. E. Pervova, *Diffeological connections on diffeological vector pseudo-bundles*, arXiv:1611.07694v2, under revision.

6. E. Pervova, *Diffeological Levi-Civita connections*, arXiv:1701.04988v1, under revision.

7. E. Pervova, *Diffeological Dirac operators and diffeological gluing*, arXiv:1701.06785v1, under revision.

8. E. Pervova, *Diffeological De Rham operators*, arXiv:1703.01404v1, under revision.

In preparazione

9. E. Pervova, *On characteristic sub-bundles and characteristic quotient bundles of diffeological vector pseudo-bundles, and gluing-dual commutativity conditions*, in preparation.

10. E. Pervova, *Pullbacks of diffeological connections*, in preparation.

11. E. Pervova, *Diffeological gluing and atlases of Riemannian manifolds*, in preparation.