

FUNZIONI LISCE GENERALIZZATE

PAOLO GIORDANO

ABSTRACT. Cauchy, Heaviside e Dirac inventarono la delta di Dirac usando un punto di vista intuitivo, che è ancora in uso tra diversi fisici e ingegneri. Dopo il lavoro di L. Schwartz questa “definizione” intuitiva viene spesso chiusa con la frase: “Naturalmente questa non è una funzione ordinaria... e la proprietà importante è che essa si comporti come un funzionale”. Ma alcuni problemi persistono, e sono ben noti, se si fanno alcuni calcoli con la funzione H di Heaviside e la proprietà $H^n = H$. Si potrebbe dire che tutto questo accade perché Schwartz ha sostituito l’effetto (l’essere funzionali) con la causa (il non essere funzioni ordinarie sui reali). Le funzioni lisce generalizzate (FLG) sono ordinarie funzioni insiemistiche definite e a valori nell’anello $\tilde{\mathbb{R}}$ dei numeri generalizzati di Colombeau. Esse condividono diverse proprietà con le funzioni lisce ordinarie, ma includono tutte le funzioni generalizzate di Colombeau (e quindi tutte le distribuzioni di Schwartz). E.g. le FLG sono chiuse rispetto alla composizione, possono essere derivate usando rapporti incrementali generalizzati, per esse vale la regola della catena, hanno primitive, possono essere integrate per sostituzione, vale il teorema dei valori intermedi, i teoremi della media, ogni forma del teorema di Taylor, il teorema dei valori estremi e una utile proprietà di fascio. Possiamo anche definire spazi di FLG a supporto compatto e il corrispondente limite induttivo stretto, che hanno ottime proprietà e possono essere facilmente studiati usando seminorme a valori in $\tilde{\mathbb{R}}$. Vedremo come questi spazi sono un primo necessario passo per tentare di provare il teorema di Picard-Lindelöf per ODE singolari. Usando la terminologia detta all’inizio, potremmo dire che le FLG sono una possibile formalizzazione della causa, non dell’effetto.

Questo lavoro è stato fatto in collaborazione con M. Kunzinger e H. Vernaev. Non si assume nessuna pre conoscenza della teoria di Colombeau.

UNIVERSITÀ DI VIENNA, FACOLTÀ DI MATEMATICA

E-mail address: `paolo.giordano@univie.ac.at`