

Indice

Introduzione	2
0.1 Il progetto	2
0.2 La struttura	4
0.3 Ringraziamenti	5
1 Proprietà delle potenze	6
1.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti	6
1.2 Alcune risposte dei tutor tratte dai diari di bordo in itinere .	8
1.3 Riflessioni didattiche e possibili risposte	12
1.4 Attività di consolidamento e autovalutazione	15
2 Lettura di un grafico	17
2.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti	17
2.2 Alcune risposte dei tutor tratte dai diari di bordo in itinere .	19
2.3 Riflessioni didattiche e possibili risposte	25
2.4 Attività di consolidamento e autovalutazione	28
3 Scrittura di un grafico	31
3.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti	31
3.2 Alcune risposte dei tutor tratte dai diari di bordo in itinere .	33
3.3 Riflessioni didattiche e possibili risposte	39
3.4 Attività di consolidamento e autovalutazione	41
4 Trigonometria	47
4.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti	47
4.2 Alcune risposte dei tutor tratte dai diari di bordo in itinere .	49

4.3	Riflessioni didattiche e possibili risposte	50
4.3.1	Sulla circonferenza trigonometrica	51
4.3.2	Sulle funzioni trigonometriche	52
4.3.3	Sulla risoluzione dei triangoli	55
4.4	Attività di consolidamento e autovalutazione	56
5	Meta-riflessioni didattiche	58
5.1	Riflessioni didattiche e possibili risposte	58
	Bibliografia	65

Introduzione

Questo documento raccoglie le riflessioni e le esperienze maturate durante la realizzazione del progetto di “Tutorati di matematica in ambito PLS e POT”, promosso dal Dipartimento di Matematica dell’Università di Pisa durante l’anno accademico 2019/2020 all’interno del Progetto Lauree Scientifiche (coordinato dal prof. Pietro Di Martino).

0.1 Il progetto

L’impreparazione matematica di alcuni degli studenti che affrontano facoltà come agraria, farmacia, chimica e informatica (ma anche altre come biologia che in questa edizione non faceva parte del progetto) è ormai diagnosticata in maniera eccellente dal Cisia e da tutti i test di accesso alle facoltà, ma rimane pur sempre una constatazione dei fatti che spiega il gran numero di abbandoni senza fornire indicazioni per tentare di risolvere il problema.

L’obiettivo del progetto era quindi quello di rendere accessibili le facoltà in cui la matematica è una materia “di servizio” anche a quegli studenti che con la matematica avrebbero sperato di non dover più fare i conti.

Per perseguire tale obiettivo sono stati assunti nove tutors, tutti laureati in matematica, che, in un orario strutturato nelle varie facoltà, hanno affiancato gli studenti nel loro percorso a ostacoli nella matematica proposta dai corsi universitari; in realtà le difficoltà sembrano partire dai corsi ma molto spesso rimandano a una fragilità della matematica di base di origine antica e difficilmente sanabile anche in corsi propedeutici tipo matematica zero.

Naturalmente non era previsto il recupero di tutti gli studenti in difficoltà

ma almeno di quella parte di studenti che era seriamente motivata al proseguimento degli studi intrapresi.

Di fronte a difficoltà di tipo elementare originate da misconcetti stratificati nel tempo si capisce come sia difficile per gli studenti anche chiedere spiegazioni perché non è più né il tempo né il luogo giusto. La presenza di tutor competenti in grado di individuare i nodi concettuali più critici e soprattutto senza l'onere del giudizio, ha dato agli studenti la libertà di esprimere le proprie difficoltà senza paura e senza vergogna e forse finalmente di capire quello che non avevano mai avuto il coraggio di chiedere.

In aggiunta a questo percorso, il progetto ha previsto la documentazione scritta delle fasi più significative del lavoro, con esercizi e ragionamenti su di essi, con le strategie vincenti e non, le difficoltà inevitabili, il feedback degli studenti, la percezione del successo o dell'insuccesso.

I tutors hanno quindi redatto di settimana in settimana un diario di bordo in cui hanno raccontato in dettaglio tutti gli aspetti, cognitivi e non, del loro lavoro: gli argomenti trattati, il numero di studenti, il livello di preparazione, i problemi di disomogeneità del gruppo, la difficoltà di dover lavorare su due livelli diversi e soddisfare le esigenze di entrambi, la metodologia adottata, lo stare alla lavagna o non starci, la crescente fiducia, la richiesta di aiuto personalizzata, la scelta degli esercizi e la discussione su di essi, la riflessione sul perché alcuni concetti non siano mai stati acquisiti e la percezione di aver fatto un miracolo nel vederli convinti di aver capito, i commenti degli studenti e altro ancora.

Alla fine del percorso, dopo tre mesi, i tutors hanno prodotto una relazione finale in cui hanno documentato la fase o le fasi che hanno ritenuto più significative del percorso fatto con gli studenti, quelle di maggiore successo, secondo alcuni punti concordati insieme: l'ascolto delle domande, la scelta del metodo, la scelta dell'esercizio o degli esercizi mirati alla "comprensione" degli argomenti non capiti, le possibili soluzioni, gli errori più frequenti e i loro commenti, le inevitabili digressioni, come rendersi conto se hanno capito davvero, come verificarlo, altri esempi o esercizi perché loro stessi siano convinti di aver sciolto un nodo cognitivo.

L'analisi dei materiali prodotti dai tutor è stata condotta dalla prof.ssa Donata Foà e ha portato alla stesura di questo documento, nella speranza di fornire ai lettori (professori universitari ma anche professori di scuola secondaria, oltre ai futuri tutors) la possibilità di rendersi conto, con cognizione di causa, dei livelli di ingresso, accrescendo così la propria consapevolezza di quali siano i nodi concettuali più ostici per molti degli studenti del primo anno e prendendo in esame eventuali strategie didattiche per tentare di scioglierli.

0.2 La struttura

Ogni capitolo corrisponde a una scheda dedicata a un tema matematico risultato particolarmente significativo tra le esperienze vissute dai tutor del progetto.

Per ciascuna scheda è stata individuata una “domanda guida”, la cui risposta è suddivisa in quattro sezioni:

1. Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà che incontrano gli studenti
2. Alcune risposte dei tutor tratte dai diari di bordo in itinere
3. Riflessioni didattiche e possibili risposte
4. Attività di consolidamento e di autovalutazione

La prima sezione contiene alcune considerazioni preliminari sulle possibili cause delle difficoltà incontrate dagli studenti, elaborate alla luce della lunga esperienza didattica della prof.ssa Foà.

Nella seconda sezione riportiamo poi una raccolta di estratti dei diari di bordo redatti dai tutor durante lo svolgimento del progetto, in cui vengono descritti - direttamente dalla voce dei tutor - i problemi segnalati dagli studenti e le soluzioni effettivamente implementate all'interno delle loro lezioni. La terza sezione è dedicata alle riflessioni a posteriori, in cui vengono indicate alcune possibili strategie didattiche per lavorare sui nodi concettuali emersi come più ostici per la maggior parte degli studenti.

Nell'ultima sezione, infine, viene proposta una raccolta di attività di consolidamento e autovalutazione, elaborate a partire dai problemi affrontati realmente dai tutor durante le loro lezioni e pensate come uno strumento per permettere a studenti e insegnanti di rendersi conto della profondità della comprensione raggiunta in merito ai temi trattati.

0.3 Ringraziamenti

Le riflessioni contenute in queste schede sono basate sulle esperienze fatte dai tutor nell'anno accademico 2019/2020 presso i Corsi di Laurea di Scienze Agrarie, Scienze dei Prodotti Erboristici e della Salute, Chimica e Tecnologia Farmaceutica, Farmacia, Chimica per l'Industria e l'Ambiente, Chimica, Viticoltura ed Enologia e Informatica dell'Università di Pisa.

Un ringraziamento speciale va dunque ai tutor che hanno condotto e documentato le loro esperienze di tutorato, che con le loro preziose riflessioni hanno reso possibile la stesura di questo elaborato:

Abramo Bertucco, Marco Inversi, Eleonora La Fauci, Giulia Menconi, Alice Merz, Cristina Pagliantini, Chiara Spagnoli e Michele Tocchet.

Capitolo 1

Proprietà delle potenze

Domanda: perché le proprietà delle potenze?

1.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti

I risultati dei test di accesso alle varie facoltà evidenziano in maniera nettissima che ci sono dei problemi sulle proprietà delle potenze, soprattutto nelle operazioni con potenze numeriche.

Si ha l'impressione che queste difficoltà non vengano riconosciute dagli studenti, forse perché non hanno il coraggio di ammetterlo o forse perché le potenze non sono messe in relazione con gli argomenti che vengono affrontati in seguito e di cui sono parte indispensabile; infatti emergono nel momento in cui si affrontano i prodotti fra polinomi, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le proprietà dei logaritmi, le equazioni e le disequazioni esponenziali. Le proprietà delle potenze sono così lontane nel tempo dell'apprendimento, si parla della scuola elementare o di una prima media, che nella scuola secondaria superiore la traccia della memoria è scomparsa e occorre riproporle come nuove, facendone scoprire direttamente agli alunni il significato; non è che non vengano usate nel corso degli anni ma mai riprendendone il significato, solamente come regole, possibilmente da imparare a memoria. Inoltre dall'esperienza dei test si evince che sono più difficili da gestire le po-

1.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti 7

tenze numeriche di quelle letterali, questo perché almeno il problema della base che deve rimanere la stessa viene accettato con maggiore assuefazione: infatti $a^3 \cdot a^4$ può sì fare indifferentemente a^7 o a^{12} ma più raramente $(2a)^7$ o $(a^2)^{12}$, come invece avviene con la base numerica.

La tentazione di operare con i numeri, anche senza sapere come e perché, è antica e attraente, mentre operare con le lettere induce un minimo di incertezza, di soggezione, di distanza per cui anche la fantasia più fervida si blocca e in questo caso sbaglia un po' meno.

Gli studenti del primo anno nel frattempo, essendo diventati adulti, non hanno difficoltà a capire di nuovo il motivo elementare che porta 2^{3+4} ad essere uguale a $2^3 \cdot 2^4$, e solo a questo punto sono in grado di accettare il concetto, effettivamente astratto, di omomorfismo che trasforma somme in prodotti.

Questo è effettivamente uno scoglio intellettuale, così come lo è la formula di addizione nella trigonometria, come è sempre quando si perde la linearità, tentazione ancestrale di semplificazione del mondo.

E così si assiste alla casualità delle risposte: $2^3 \cdot 2^4$ può essere trasformato indifferentemente in 2^{12} , 4^{12} , 4^7 , $2^3 + 2^4$, e la casualità sta nel fatto che se manca la comprensione del concetto di base qualunque operazione diventa plausibile, la base può diventare il prodotto delle basi, gli esponenti possono diventare la somma ma anche il prodotto, in una confusione totale di termini e di processi.

Un'altra difficoltà sta nel metodo usato nella scuola secondaria per estendere le potenze ai diversi campi numerici, da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$, da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ e poi magari anche da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Questa estensione in realtà viene fatta attraverso le potenze solo per il passaggio a $\mathbb{Z}$, quando vengono date le definizioni di a^{-k} , a^0 , a^1 perché è il primo momento in cui viene meno il significato elementare di potenza. Nel passaggio da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ vengono invece proposti nuovi oggetti, i radicali, (vedi Villani, cominciamo da zero, pag.88-92) che hanno proprietà proprie, tra l'altro complicate, che sembrano non avere niente a che vedere con le potenze, e che solo molto tardi, forse al momento di risolvere equazioni e disequazioni esponenziali, o di applicare la derivata a una funzione irrazionale, verranno espressi attraverso le potenze frazionarie. Per non parlare dell'estensione a

R che viene data per buona purché si mantengano le stesse proprietà.

C'è una inutile dispersione dei concetti e una mancanza di rigore nel definire le potenze nei nuovi ambiti senza mai fare riferimento al motivo vero delle definizioni che si basano unicamente sulla conservazione dell'omomorfismo.

1.2 Alcune risposte dei tutor tratte dai diari di bordo in itinere

Quasi tutti i tutor all'interno del progetto si sono trovati a lavorare sulle proprietà delle potenze durante le loro lezioni: tra gli otto tutor, soltanto uno non cita esplicitamente le proprietà delle potenze tra gli argomenti affrontati. In particolare, l'esperienza dei tutor conferma come le difficoltà principali emergano dall'estensione della definizione di potenza a insiemi numerici diversi da quello dei naturali. La maggior parte dei tutor, infatti, riporta tra i nodi concettuali affrontati insieme ai propri studenti il significato di potenze con esponente negativo e le proprietà dei radicali (riportati a potenze con esponente frazionario), ma anche alcune applicazioni che si basano sulla comprensione di questi nodi concettuali, come ad esempio l'uso corretto della notazione scientifica, le semplificazioni che coinvolgono radicali (semplificare $n/\sqrt{n}$), la gestione delle potenze di un numero negativo (distinguere la differenza tra -1^3 e $(-1)^3$) o la risoluzione delle equazioni esponenziali.

Inoltre, in tutti i corsi tranne uno gli studenti hanno fatto domande sulle proprietà dei logaritmi, confermando la stretta connessione tra questi due argomenti ed evidenziando come, se in molti casi i problemi cominciano proprio a livello della definizione, d'altra parte spesso basta solo sapere la definizione e ragionare per risolvere gli esercizi.

Per mostrare le potenzialità di un lavoro centrato sulle proprietà delle potenze riportiamo l'esperienza di uno dei tutor del progetto, illustrando nei dettagli i passi salienti del percorso.

Da dove cominciare: le potenze con esponente naturale

Dato il numero ridotto dei presenti è risultato particolarmente efficace far “scoprire” le proprietà delle potenze direttamente agli studenti. Ad esempio, per la proprietà delle potenze $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$ è stato utile scrivere alla lavagna $2^3 \cdot 2^4 = ?$ e chiedere loro di completare l’uguaglianza. Inizialmente alcuni hanno risposto 2^7 , ma senza riuscire a spiegare perché. A quel punto ragionando sul significato di 2^3 gli studenti hanno scritto alla lavagna

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

e una ragazza ha concluso “ma certo, perché il primo ce ne ha 3 di 2, il secondo ce ne ha 4 di 2, quindi tutti insieme sono 7”

$$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 27$$

Allora è bastato sostituire 3, 4 con 100, 67 e chiedere $2^{100} \cdot 2^{67} = ?$ per ottenere come risposta “il primo ne ha 100, il secondo 67, quindi in tutto ce ne sono 167”.

A questo punto è stato facile guidarli verso la generalizzazione della proprietà. Alla domanda $2^n \cdot 2^m = ?$ gli studenti hanno infatti risposto che bastava fare la somma, quindi 2^{n+m} . In questo modo sono stati gli studenti stessi a concludere che $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$ dicendo “devono essere uguali, perché così li contiamo tutti insieme, la prima A la prendiamo n volte, la seconda m volte, quindi in tutto $n + m$ ”.

Inoltre, sostituendo il 2 con il 3 abbiamo ottenuto $2^n \cdot 3^m = ?$ e gli studenti hanno osservato che doveva rimanere così perché le basi erano diverse, mentre alla domanda $2^3 + 2^4 = ?$ hanno risposto che non si poteva far nulla, perché non era lo stesso “modo” di prendere i 2, quindi $A^n + A^m =$ rimane così.

Infine, sostituendo le basi con l’incognita x e assegnando dei valori numerici agli esponenti abbiamo ottenuto $x^3 + x^2 = ?$ e un ragazzo ha esclamato “ah! al massimo si può mettere in evidenza!”, scrivendo $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$.

In conclusione, per riassumere i risultati ottenuti, abbiamo cancellato la lavagna e scritto:

$A^m \cdot A^n = A^{n+m}$ $A^m + A^n =$ al più raccogliamo.

Questo episodio testimonia come un approccio “per scoperta”, in cui il tutor non si limita a spiegare i contenuti teorici necessari per la risoluzione degli esercizi, ma coinvolge gli studenti in un percorso di esplorazione stimolando le loro riflessioni e guidandoli verso una trattazione via via sempre più generale, possa risultare estremamente efficace sia per favorire una comprensione profonda delle proprietà e, soprattutto, delle loro motivazioni, sia per incrementare l'autonomia degli studenti e la loro percezione di controllabilità sui fatti matematici: alla fine di un percorso di questo tipo sarà molto più facile ricordare come applicare le proprietà delle potenze ma anche, in caso di dubbi, ricavare nuovamente le relazioni corrette facendo affidamento sul proprio ragionamento.

Una prima estensione ai numeri interi: le potenze con esponente negativo

Interrogati sul senso degli esponenti negativi, scrivendo alla lavagna $2^{-1} = ?$, tutti hanno risposto $1/2$. In questo caso è stato utile visualizzare il $-$ all'esponente come se fosse una specie di “ascensore”, che porta i numeri dal numeratore al denominatore e viceversa.

A questo punto per rispondere alla domanda $2^3 : 2^4 = ?$ è stato facile ricondursi alla proprietà precedente dopo aver interpretato il $:$ come elevare alla -1 per trasformare l'espressione precedente in $2^3 \cdot 2^{-4} = ?$, con la quale sappiamo come comportarci, quindi il risultato è 2^{-1} .

Questo passaggio mostra come, a volte, un piccolo espediente didattico possa essere d'ausilio alla corretta applicazione delle proprietà, fermo restando che la comprensione del perché delle relazioni ha un'importanza fondamentale e che un approccio di questo tipo è sempre successivo alla comprensione delle motivazioni che sottendono i fatti matematici (la necessità di estendere

l'omomorfismo ai numeri interi in questo caso), per evitare che tutto si riduca alla semplice memorizzazione di una regola non ben giustificata. Ma soprattutto, ed è il motivo per cui abbiamo scelto di ripotarlo, questo episodio è stato particolarmente efficace per mostrare agli studenti come spesso, anche se non si ricorda una proprietà specifica, ragionando e modificando un po' il problema ci si può ricondurre a delle relazioni note.

Un traguardo da raggiungere: il passaggio dalle potenze al logaritmo

Una delle applicazioni più entusiasmanti è stata la deduzione delle proprietà dei logaritmi a partire dalle proprietà delle potenze. Come sempre gli studenti sono stati “sfidati” a trovare da soli le proprietà partendo dalla definizione di logaritmo, ricavata esplorando le funzioni inverse in generale, ovvero chiedendo se sapevano come “annullare” l'effetto di alcune operazioni: “partiamo da un numero, ad esempio 2. Come fate a tornare a 2?” Gli studenti hanno risposto correttamente:

$$2 \Rightarrow 2 + 3 \Rightarrow 5 - 3 \Rightarrow 2$$

$$2 \Rightarrow 2 \cdot 3 \Rightarrow 6 : 3 \Rightarrow 2$$

$$2 \Rightarrow 2^2 \Rightarrow \sqrt[2]{4} \Rightarrow 2$$

$$2 \Rightarrow 2^4 \Rightarrow \sqrt[4]{16} \Rightarrow 2$$

$$2 \Rightarrow \cos 2 \Rightarrow \arccos(\cos(2)) \Rightarrow 2$$

$$2 \Rightarrow \tan 2 \Rightarrow \arctan(\tan(2)) \Rightarrow 2$$

$$2 \Rightarrow 3^2 \Rightarrow ??$$

Dopo un po' di errori (su tutti il provare a fare la radice) una ragazza ha sparato “facciamo il logaritmo!”, anche se alla domanda su quale logaritmo dovessimo fare ha risposto “quello naturale?”. A quel punto l'esplorazione si è conclusa fornendo la risposta corretta

$$2 \Rightarrow 3^2 \Rightarrow \log_3 3^2 \Rightarrow 2$$

e formalizzando sulla lavagna: il logaritmo è quella funzione che “annulla” l’esponenziale.

Questo passaggio è importante perché dimostra come, in questo campo, siano piccole le distanze fra il non sapere nulla di un argomento e l’entrare in possesso di nuove conoscenze ragionate, costruite personalmente e immediatamente utilizzabili nell’ambito universitario.

1.3 Riflessioni didattiche e possibili risposte

Le potenze, un argomento così elementare! nessun bambino della scuola media trova difficoltà a capirlo, a farci esercizi sopra e anche a imparare a memoria le regole, prodotto di potenze con la stessa base, potenza di una potenza, proprietà distributiva della potenza rispetto al prodotto, e analogamente per il quoziente; allora perché tanti problemi col passare degli anni? Un motivo probabilmente sta nella perdita di significato che avviene nel passaggio da $\mathbb{N}$ agli altri insiemi numerici, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e quindi la necessità di nuove definizioni date per garantire la conservazione delle proprietà: questo è un salto logico non indifferente, cosa vuol dire $a^{3/4}$, a^{-5} , a^x , a^{ix} ; il significato glielo dobbiamo dare noi sulla base di quello che vale in $\mathbb{N}$.

E queste definizioni hanno a che fare con le funzioni inverse, ad esempio quale deve essere il valore di a^{-k} affinché $a^{-k} \cdot a^k = a^0 = 1$ oppure di $a^{1/n}$ affinché $(a^{1/n})^n = a^1 = a$ e giocare con le funzioni inverse è sempre uno scoglio difficile da superare.

E’ lecito per lo studente chiedersi perché sia tanto importante che continuino a valere le proprietà delle potenze anche quando si cambia ambiente numerico.

Le risposte sono molte e a livelli molto diversi, ma non sempre evidenti.

La prima che mi viene in mente è la visualizzazione grafica: dalla successione geometrica (ovvero le potenze con le loro proprietà) alla funzione esponenziale.

È inevitabile pretendere che l’insieme discreto di punti che appartiene alla successione geometrica appartenga anche alla funzione esponenziale con la

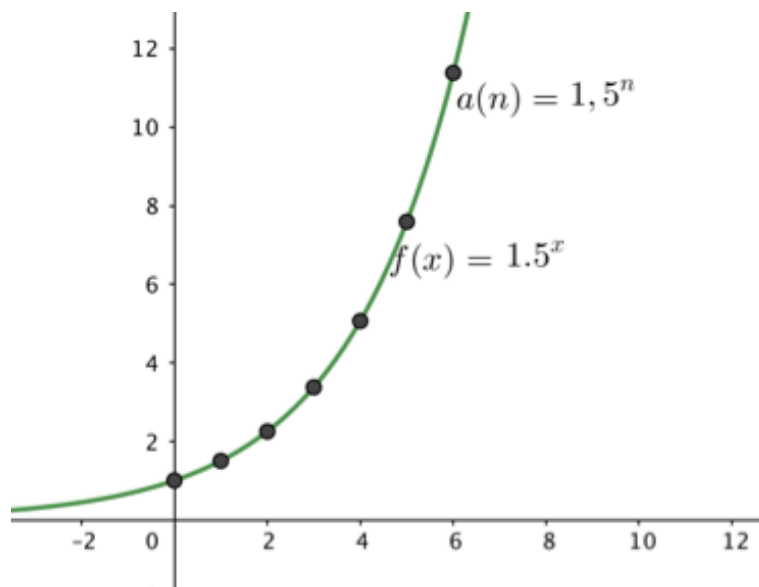


Figura 1.1: visualizzazione grafica della successione geometrica e della funzione esponenziale

stessa base, ma se pretendiamo questo, automaticamente dobbiamo inglobare nella funzione esponenziale tutte le proprietà della successione geometrica. Il fatto che queste due visualizzazioni grafiche non vengano messe in relazione fra loro dipende dal fatto che le successioni geometriche, quando vengono studiate, vengono studiate in maniera algebrica più che funzionale, con esercizi del tipo “trova il venticinquesimo termine della successione geometrica sapendo che il terzo e il quinto sono a e b ”.

Generalmente il passaggio dalla successione geometrica alla funzione esponenziale viene saltato, e, mentre si danno per scontate le sue proprietà, l'accento viene posto sull'andamento del grafico con gli strumenti dell'analisi, crescita, decrescenza, limiti.

Per esempio non si spiega in maniera semplice e chiara come mai si pretende che la funzione esponenziale debba avere una base positiva visto che non è richiesto per la successione geometrica: giusto perché finché l'esponente è intero si può parlare di numero pari o dispari, mentre dall'ampliamento a $\mathbb{Q}$ in poi non è più possibile.

Questo va imputato a una grande pecca dell'insegnamento della scuola su-

periore, l'assenza dell'aritmetica, e quindi della lontananza del concetto di multiplo e divisore, del concetto di numero pari o dispari, di numero primo, tutte proprietà che si “perdono” necessariamente, ma senza consapevolezza, nel passaggio da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$.

In una visione più utilitaristica lavorare con le potenze e le relative proprietà consente una semplificazione nelle operazioni di calcolo complicate; immaginiamo di aver a che fare con numeri molto grandi o molto piccoli e di dover operare con essi, il passaggio alla notazione esponenziale è miracoloso e permette di risolvere facilmente problemi del tipo “i chicchi di grano sulla scacchiera” oppure “quanti globuli rossi ci sono nel corpo umano” sapendo quanti ce ne sono in un mm^3 e sapendo quanti litri di sangue ci sono nel corpo umano: arrivare a $2,5 \cdot 10^{13}$ è semplice con la notazione esponenziale ma diventa ingestibile in una notazione decimale.

Avere a disposizione la notazione scientifica permette di avere idea dell'ordine di grandezza e quindi di controllare eventuali macroscopici errori di calcolo.

A un livello più alto la conservazione delle proprietà permette di rappresentare la forma esponenziale e^{ix} in forma trigonometrica $\cos x + i \sin x$ grazie all'unicità della funzione che ha queste proprietà senza dover aspettare lo sviluppo in serie.

Il passaggio dall'esponenziale al logaritmo è di solito il momento cruciale in cui gli studenti si perdono; con fatica riescono a gestire la funzione esponenziale con tutto il corredo di equazioni e disequazioni, con base maggiore di 1 o minore di 1, ma non reggono l'urto del logaritmo ossia la funzione inversa. Quello della operazione inversa e poi della funzione inversa è sempre un passaggio difficile, dalla potenza alla radice, dal seno all'arcoseno, ma prima ancora dalla somma alla differenza, dalla moltiplicazione alla divisione, la stessa definizione di soluzione di un'equazione gli è ostica, sanno trovarla ma non sanno dire cos'è perché è definita come “quel numero che...” e se non lo sanno dire vuol dire che il concetto non è chiaro. E questo succede tutte le volte che si definisce un oggetto per quello che fa e non per quello che è: “il logaritmo è l'esponente che devi dare alla base per avere il numero”: implica un'azione da fare per ricondursi all'operazione diretta ed è un

po' come costringere la mente a ragionare all'indietro, come riavvolgere un nastro. È un modo di pensare poco naturale.

Anche per le due identità $x = e^{\ln x}$ e $x = \ln e^x$ che provengono dall'applicazione della funzione con la sua funzione inversa occorre prima ricostruire il concetto di funzione composta e in particolare di funzione identica come risultato dell'applicazione della f con la f^{-1} ; un modo possibile per leggere le due identità può essere ricavato dal grafico.

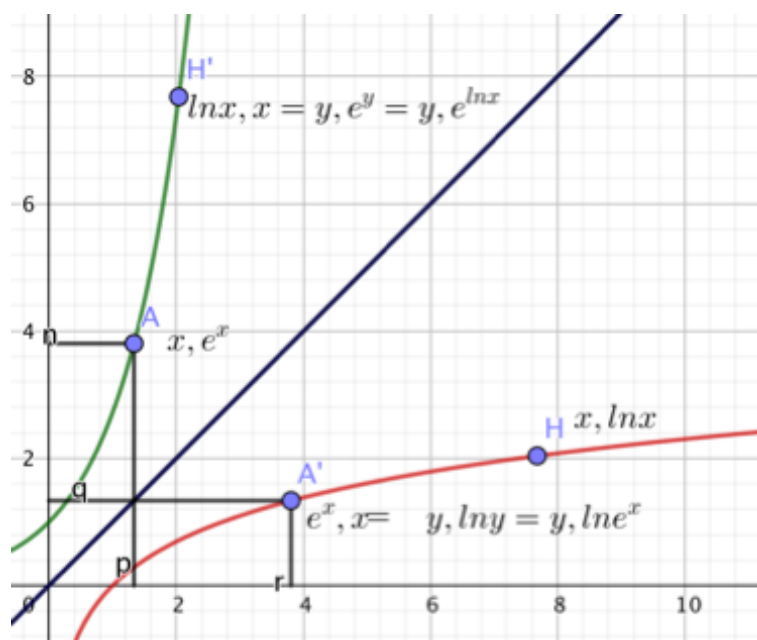


Figura 1.2: Grafici delle funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

1.4 Attività di consolidamento e autovalutazione

Questi sono alcuni esempi proposti dai tutor agli studenti per verificare la comprensione delle proprietà delle potenze e dei logaritmi.

- Quali sono i valori delle potenze 2^2 , $1/3^3$, $(-4)^4$?
- Quanto vale la radice quadrata del cubo di 4?

- Operazioni tipo 10^3 e proprietà delle potenze.
- Determinare la somma $3^{30} + 3^{30} + 3^{30}$.
- Semplifica le seguenti espressioni: $\frac{10^{-3}}{10^9}$, $\frac{0,00008}{0,4}$, $\frac{10^{-12}}{10^3}$.
- Quanto vale $2,5 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5}$?
- Semplifica le seguenti espressioni: $\frac{10^7 \cdot 10^{-4}}{10^{-2} \cdot 10^8}$, $\frac{2^3 \cdot 2^{-4}}{2^{-2} \cdot 4^2}$, $\frac{3^{2x+4}}{9^{x+1}}$.
- Qual è il valore di x tale che $e^x = 2$?
- Quanto vale il logaritmo in base 100 di 0,0001?
- Tra quali valori è compreso $\log_{10} 2567.000.000.000$?
- Quanto vale $\log_4 2 + \log_2 4$?
- Qual è il valore di n se il $\log_2 n = 6$?
- Il logaritmo di un numero x positivo in base 7 è un numero y tale che?
- Quanto vale $\log_3 81$?
- Se $\log_a 17 = 4$, allora quanto vale a ?
- Quanto vale $\log_{10} 1$?
- Quanto vale $\log 3 + \log 3$?
- Per $x > 0$, quanto vale $\log x + \log x + \log x$?
- Per quali valori di a e b , l'uguaglianza $\log_{10}(-a) + \log_{10}(-b) = \log_{10}(ab)$ è vera?
- Quanto vale $\log_{10} 4 + \log_{10} 3$?
- Nell'espressione $-\log_4 x = 1/2$, quanto vale x ?

Capitolo 2

Lettura di un grafico

Domanda: perché è importante lavorare sulla lettura di un grafico?

2.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti

Probabilmente questa domanda non è mai stata formulata in maniera così esplicita ma perché tutti i tutor si sono trovati a doverle dare una risposta? Probabilmente per cercare di arrivare in un modo indiretto alla comprensione del concetto di funzione che è il concetto chiave più difficile da digerire.

Gli studenti in realtà chiedono “cos’è una funzione” ma appena viene definita si perdono nelle parole, nei legami fra le parole, nell’astrazione dei concetti, nel non vederne il motivo, anche perché viene insegnata nel primo biennio delle superiori (14 o 15 anni).

Partiamo dall’inizio ed esaminiamo quali parole vengono utilizzate per arrivare alla definizione di funzione. (da un buon libro di testo per i licei)

Una *relazione* è un *insieme* di *coppie ordinate* di cui il primo elemento *appartiene* ad A e il secondo a B, quindi un *sottoinsieme* del *prodotto cartesiano* $A \times B$.

2.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti

Un'applicazione (*funzione*) da A a B è una relazione fra A e B che gode della *proprietà* che ad ogni *elemento* x di A corrisponde *un solo elemento* y di B.

L'insieme A si chiama *dominio* e l'insieme B *codominio*.

Un condensato di parole (quelle in corsivo) che a loro volta hanno bisogno di definizioni e che hanno un livello di astrazione altissimo. (tralascio altre parole, come *immagine*, *iniettiva*, *surgettiva*, *inversa*, *composta*) Ovviamente tutto questo percorso alla scuola secondaria viene affiancato da esempi, da disegni, da diagrammi, da problemi di vita quotidiana, ma ciò non toglie la difficoltà di muoversi a questo livello di astrazione e rappresenta quasi certamente il punto più difficile del percorso della matematica nella scuola media superiore.

Ci sono inoltre problemi di tipo linguistico che si sovrappongono, parole nuove e parole già in uso: la parola relazione ha molti significati, relazione umana, relazione amorosa, relazione diplomatica, scrivere una relazione, mettere in relazione fenomeni naturali col cambiamento climatico.

Anche funzione è una parola di uso corrente, mettere in funzione uno strumento, ricoprire una funzione istituzionale, ma qui è un'altra cosa. E' difficile attribuire un significato nuovo a una parola di uso quotidiano e ancora di più saperla gestire.

A questo punto, per gli studenti deboli, scatta il rifiuto, nel senso che imparano a memoria quello che serve per fare un compito, poi dimenticano tutto nella speranza che non gli serva mai più e quando, in seguito, capita di farci riferimento i loro visi si oscurano, gli occhi vagano nel vuoto e il cervello va in cerca di qualcosa di noto ma non lo trovano.

Per questo motivo è indispensabile passare attraverso un linguaggio diverso, che sia più accessibile delle parole.

In altri termini "aggirare l'ostacolo".

Questo forse doveva avvenire al liceo ma per come vanno le cose al momento di utilizzare le prime funzioni, retta, parabola, iperbole, all'inizio del triennio, si pone l'accento più sulla componente algebrica che sul concetto di funzione perché, per quanto siano in difficoltà anche sull'algebra, lo riten-

gono un ambiente più familiare, e quindi c'è meno resistenza ad imparare certe formule e certi procedimenti.

Passato questo momento, forse il più giusto per riprendere, consolidare e dare un significato a questa parola, si passa direttamente allo studio di funzioni con l'aiuto dei primi concetti di analisi più difficili ma anche più intriganti; infatti i concetti di infinito, infinitesimo suscitano interesse (al di là della definizione), aprono un mondo diverso da quello fino a quel momento conosciuto e quindi l'attenzione anche questa volta è più orientata ai nuovi concetti che a quelli antichi di cui non si sono mai impadroniti. In nessun caso l'attenzione degli studenti viene focalizzata sul concetto di funzione.

In queste condizioni arrivano all'università e questo leggere un grafico è uno strattagemma per arrivare al nodo centrale del problema senza passare dalle parole ma ricavando da una figura il significato di quelle parole.

2.2 Alcune risposte dei tutor tratte dai diari di bordo in itinere

All'interno del progetto i tutor hanno scelto di lavorare molto sulla lettura dei grafici, sottolineando come questo approccio si sia rivelato estremamente efficace per risolvere diverse tipologie di problemi. Ecco alcuni esempi tratti dalle esperienze dei tutor:

Risolvere disequazioni irrazionali

Per risolvere la disequazione $\sqrt{x} \leq 2 - x$ molti studenti sono passati alla disequazione $x \leq (2 - x)^2$ senza tener conto delle restrizioni del dominio della disequazione iniziale e controllando la validità delle soluzioni solo in seguito. In questo caso la lettura di un grafico può essere molto utile perché rende subito evidente qual è l'intervallo in cui la disequazione è vera, permettendo così di evitare di considerare anche l'intervallo $x > 4$ come verrebbe fatto nella risoluzione algebrica (spesso sbagliata).

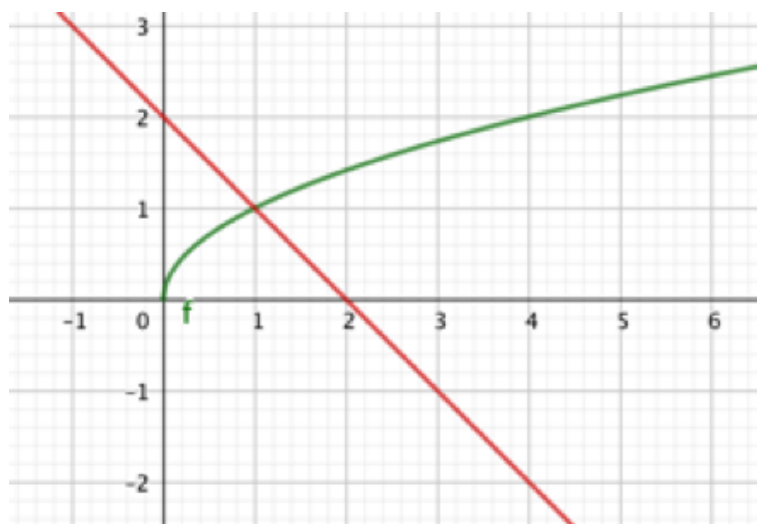


Figura 2.1: Risoluzione di disequazioni irrazionali per via grafica

Risolvere equazioni trigonometriche

Per risolvere l'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ con $x \in [0; 2\pi]$ si è rivelato molto utile fare una piccola introduzione sul significato della sovrapposizione di due grafici e su quali sono, date $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue, i punti x tali che $f(x) = g(x)$. A questo punto, per risolvere l'equazione è stato sufficiente disegnare la funzione coseno e la retta orizzontale $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, invitando gli studenti a ricordare il valore del coseno di $\pi/4$.

In questo caso la lettura del grafico evidenzia anche la presenza di più soluzioni: le intersezioni sul grafico, infatti, mostrano che c'è un'altra soluzione. Per trovarla è risultato efficace chiedere agli studenti di riflettere su un piccolo esercizio preliminare: scrivere $\cos(2\pi - x)$ in funzione di $\cos x$. In questo modo è emerso che $x = 7/4\pi$ è l'altra soluzione in $[0; 2\pi]$. Inoltre, prolungando la retta e la funzione coseno anche fuori dall'intervallo richiesto, è risultato subito ben visibile come, al variare dell'ampiezza dell'intervallo considerato, il numero di soluzioni cambiasse. In figura, in blu i punti A, B, C, D le cui ascisse sono le soluzioni in $[-2\pi; 2\pi]$.

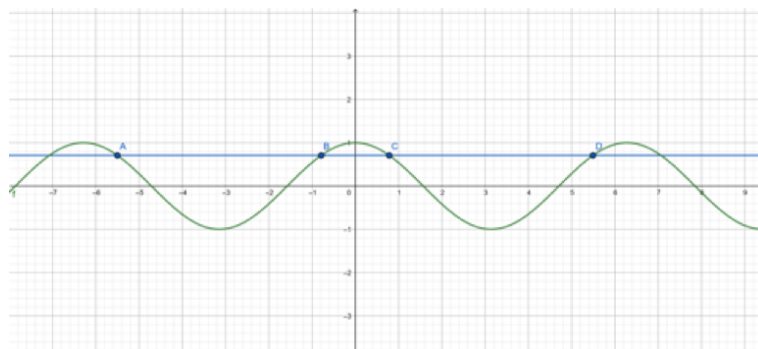


Figura 2.2: Risoluzione di disequazioni trigonometriche per via grafica

Visualizzare il teorema dell'esistenza degli zeri

La lettura del grafico è uno strumento che può rivelarsi utile anche per la risoluzione di problemi a prima vista più complessi, come dimostra un altro episodio accaduto alla stessa tutor del punto precedente. Riportiamo anche noi la sua esperienza per esemplificare come la lettura del grafico possa essere una strategia che risulta vantaggiosa per gli studenti anche in contesti molto diversi.

Per risolvere l'esercizio "Dimostrare che esiste uno zero della funzione $f(x) = e^x + x$ " è tornato molto utile aver capito in precedenza come individuare le ascisse dei punti in cui due grafici si incontrano. Infatti, scrivendo $f(x) = g(x) - h(x)$ con $g(x) = e^x$ e $h(x) = -x$ e sovrapponendo i grafici di queste due funzioni, gli studenti hanno potuto accorgersi immediatamente - a livello qualitativo - della presenza di un punto di intersezione, la cui ascissa rappresenta lo zero della funzione. A questo punto, per dimostrarne l'esistenza usando il teorema degli zeri è stato sufficiente considerare $a = -1$ e $b = 0$.

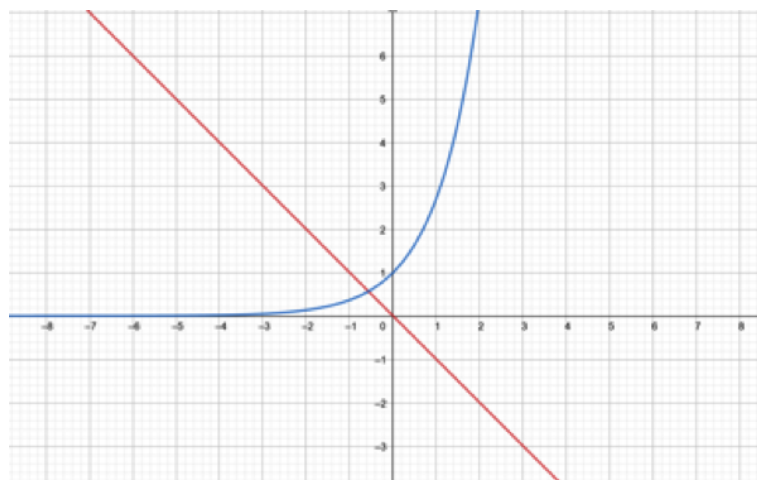


Figura 2.3: Visualizzazione del teorema di esistenza degli zeri per via grafica

Ricavare informazioni utili per la risoluzione di un limite

L'analisi del grafico dell'iperbole equilatera $y = 1/x$ ha evidenziato le seguenti caratteristiche:

- a) dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$;*
- b) immagine: $\mathbb{R} - \{0\}$;*
- c) è una funzione dispari;*
- d) non ci sono zeri della funzione;*
- e) è decrescente;*
- f) è bigettiva quindi invertibile e coincide con la sua inversa;*

e quindi ha permesso di dedurre che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Questo approccio è risultato illuminante per gli studenti, che hanno concordato di tenerlo come riferimento per prendere manualità e svolgere i primi limiti. In particolare è stato estremamente efficace per chiarire i dubbi degli studenti su quelle che possono inizialmente sembrare forme indeterminate (esempi: $0/\infty$ e $\infty/0$).

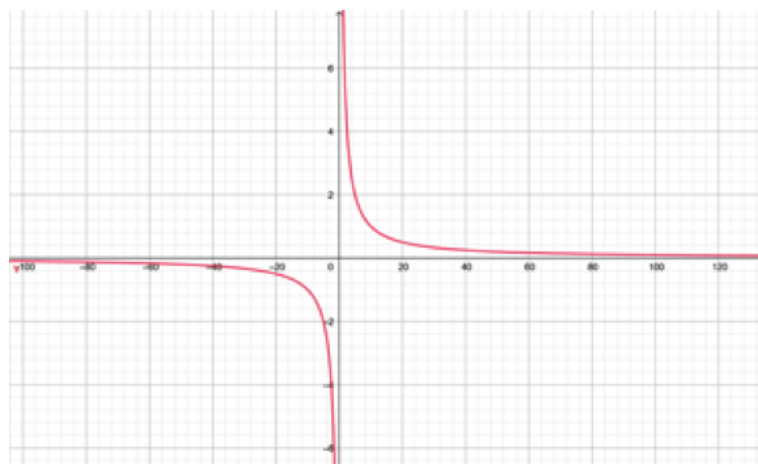


Figura 2.4: Visualizzazione dei limiti per via grafica.

Orientarsi qualitativamente in uno studio di funzione

Numerosi tutor hanno proposto la lettura dei grafici delle funzioni elementari, come ad esempio seno, coseno, tangente, esponenziale in base e, logaritmo naturale, ecc... come propedeutica per lo studio di funzioni. Quando in un problema erano coinvolte una o più funzioni sopra menzionate, è stato proposto di disegnarne il grafico e da esso ricavarne le informazioni necessarie. Ecco un esempio con la funzione esponenziale:

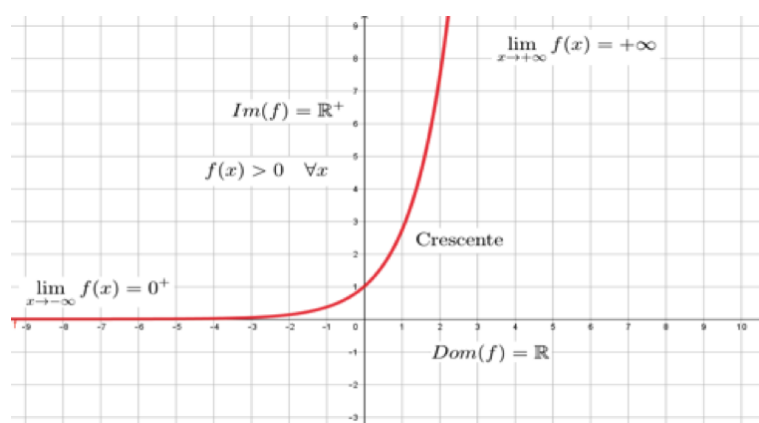


Figura 2.5: Studio qualitativo della funzione esponenziale per via grafica.

La stessa cosa per la funzione seno:

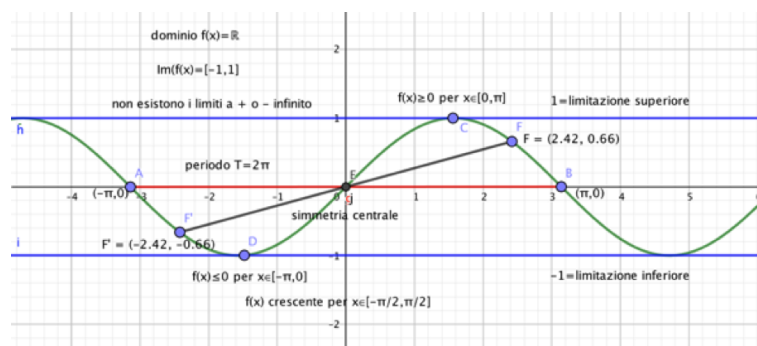


Figura 2.6: Studio qualitativo della funzione seno per via grafica.

La lettura dei grafici si configura quindi come uno strumento molto versatile ed efficace, che spesso può aiutare gli studenti a orientarsi nell'affrontare una molteplicità di problemi diversi.

La scelta di affrontare la lettura di un grafico insieme agli studenti risulta dunque vantaggiosa, perché permette di dare loro uno strumento utile per ragionare in molti contesti, a fronte del tempo a disposizione generalmente limitato in questo tipo di tutorati. Inoltre, come sottolinea uno dei tutor del progetto, vedere tutte le proprietà con un unico colpo d'occhio contribuisce a dare agli studenti la sensazione di avere la situazione sotto controllo, il posizionare le proprietà all'interno di una figura comprensibile dà loro una struttura, una gerarchia, un senso.

D'altro canto questo approccio ha inevitabilmente anche dei limiti. perché nel grafico non sono racchiuse le informazioni riguardanti, ad esempio, l'utilizzo delle funzioni trigonometriche per la risoluzione dei triangoli (non è un sacrificio da poco, visto che tale utilizzo sarà poi necessario nella parte di fisica per scomporre i vettori, come vedremo nella scheda dedicata alla trigonometria), il legame tra le funzioni trigonometriche, le proprietà del logaritmo e così via.

Terminiamo questa carrellata di esperienze tratte dalle lezioni effettivamente tenute dai tutor del progetto riportando come in alcuni casi si sia rivelata particolarmente efficace la scelta didattica di far lavorare gli stu-

denti tra pari, disegnando alla lavagna i grafici delle funzioni elementari e assegnando un grafico (o una coppia di grafici nel caso di esponenziale e logaritmo) a ogni gruppo di studenti, per poi invitarli a dedurne le informazioni principali e ad esporle alla lavagna con le relative motivazioni.

2.3 Riflessioni didattiche e possibili risposte

Per gli studenti in difficoltà che non sono in grado di rappresentare una funzione in un grafico, e che probabilmente non sanno neanche cosa sia una funzione, insegnar loro a leggere un grafico è un'operazione propedeutica alla successiva costruzione di grafici di funzioni: vuol dire prendere dimestichezza con una figura che ha delle proprietà, vuol dire, anche se in maniera ingenua, acquisire il concetto di funzione; un'acquisizione visivamente convincente soprattutto se messa in relazione a curve che funzioni non sono, ad esempio il cerchio. Un'immagine vale mille parole ed è vero che con questa mediazione grafica si possono introdurre, sempre in maniera ingenua, da sistemare rigorosamente in seguito, i concetti di limite, di dominio, di immagine, periodo, simmetrie.

Leggere vuol dire ricavare dal grafico tutte le proprietà che una funzione possiede, funzioni anche sconosciute; per cominciare è meglio provare con funzioni elementari, (che dovrebbero essere note ma in realtà non lo sono). Nel caso di funzioni reali di variabile reale i passaggi nodali sono i seguenti:

- Riconoscere la variabile indipendente x e la variabile dipendente y e saperle posizionarle sugli assi giusti. Questo è un errore ricorrente degli studenti, non saper distinguere la x dalla y , proprio perché sfugge loro il concetto di funzione e di prodotto cartesiano, e non sanno quindi a quale asse riferirsi. È buona pratica se si ha a disposizione un grafico, digitale o analogico, far vedere cosa cambia al variare del punto, riconoscere quale numero rappresenta la x e quale la y e, in qualche caso, a quale numero non corrisponda niente.
- Riconoscere dove la funzione assume valore 0. Anche questo è un punto interessante da trattare perché per gli studenti non è chiaro

a quale asse si riferisce lo 0, all'asse x o all'asse y ? Preferibilmente all'asse x . Inoltre trovare gli zeri pone un problema di attribuzione di senso a qualcosa di conosciuto ma non riconosciuto, le radici di un polinomio e le soluzioni di un'equazione incontrate per via algebrica ma non riconosciute per via grafica. E anche quando li si fa ragionare che si tratta di un'intersezione fra la curva e l'asse x e che quindi basta porre $y = 0$ e risolvere un'equazione, spesso l'unica cosa che viene in mente agli studenti è “ah sì, facciamo un sistema” come se la parola sistema fosse taumaturgica, una parola che risolve qualunque situazione imbarazzante.

- Riconoscere dove la funzione assume valori maggiori o minori di 0. Qui si ripresentano le stesse difficoltà dette per gli zeri ma con l'aggiunta della scelta del semipiano, ($x > 0$ o $y > 0$?) e quindi le difficoltà tecniche della risoluzione di disequazioni.
- Individuare dove è crescente o decrescente. A questo punto dal grafico risulta chiaro che si parla del crescere o decrescere della y e alcune ambiguità dovrebbero essere risolte così come l'individuazione dei massimi e minimi. Rimane il problema di attribuire un significato ai massimi (minimi) assoluti e relativi e questo va affrontato inizialmente con grafici di funzione come $y = x^3 - x$ o un segmento di retta.
- Capire cosa vuol dire che ci sono limitazioni, il seno e il coseno sono illuminanti in questo senso.
- Intuire i limiti agli estremi del dominio e cogliere la differenza fra limite e limitazione.
- Individuare proprietà geometriche come simmetrie centrali o assiali.

Perché tutto questo?

Per avere un controllo sui risultati ottenuti attraverso l'algebra e l'analisi. Ad esempio se la derivata prima risulta negativa in un intervallo in cui la funzione è crescente vuol dire che qualcosa è stato sbagliato, oppure se gli zeri calcolati per via algebrica non coincidono con quelli del grafico.

Per dare un senso alle parole “iniettiva, surgettiva, bigettiva, dominio e codominio” e distinguere fra codominio e immagine (occorre tener presente che questo è un errore indotto da molti libri di testo e quindi comprensibile). Per individuare gli intervalli in cui la funzione è invertibile e costruire il grafico della funzione inversa. Si pensi alla parabola e alla radice quadrata, all’esponenziale e al logaritmo. La simmetria della curva rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante induce a dare una risposta al problema della scelta degli intervalli e contemporaneamente a riconoscere la definizione di funzione; se si fa la simmetria della parabola $y = x^2$ si ottiene una curva che non è una funzione quindi si è obbligati a selezionare uno dei due intervalli.

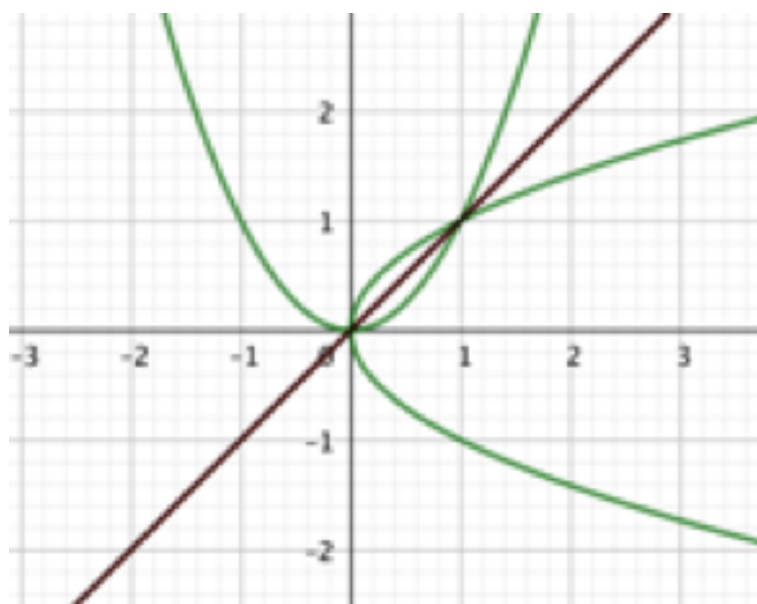


Figura 2.7: Simmetria della parabola $y = x^2$ rispetto alla retta $y = x$.

Per azzardare un grafico di una funzione composta.

Per individuare gli eventuali punti di incontro fra due funzioni.

Per analizzare il segno del prodotto di due funzioni.

Per ricavare dal grafico di una funzione il grafico della funzione reciproco o della funzione traslata senza dover ricominciare tutto dall’inizio.

Come si vede questa lettura si presta a lavorare a più livelli, da quello più basso in cui si vuol arrivare a far prendere confidenza agli studenti con il concetto di funzione, quindi lavorando con metodi elementari, a altri più alti, supportati dagli elementi di analisi che conoscono, in cui la visualizzazione li accompagna nello studio di oggetti più complicati, funzioni composte, limiti non immediati, utilizzo della monotonia di una funzione, continuità e derivabilità e altro ancora.

2.4 Attività di consolidamento e autovalutazione

Questi sono alcuni esempi proposti dai tutor agli studenti per verificare la capacità di lettura delle proprietà di una funzione dal suo grafico.

Esempio 1

La funzione $f(x) = x - [x]$.

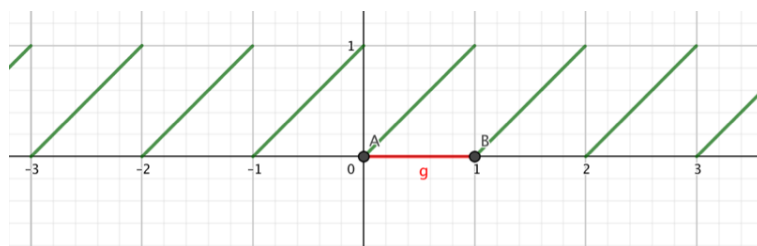


Figura 2.8: Grafico della funzione $f(x) = x - [x]$.

Gli studenti dovrebbero essere in grado di riconoscere dal grafico: il dominio, l'immagine, il segno, la continuità, i limiti destri e sinistri intorno ai numeri interi, il periodo, dire se esistono i limiti a $+\infty$ o $-\infty$.

Esempio 2

Analogamente per le due funzioni $f(x) = tg(x)$ e $g(x) = arctg(x)$.

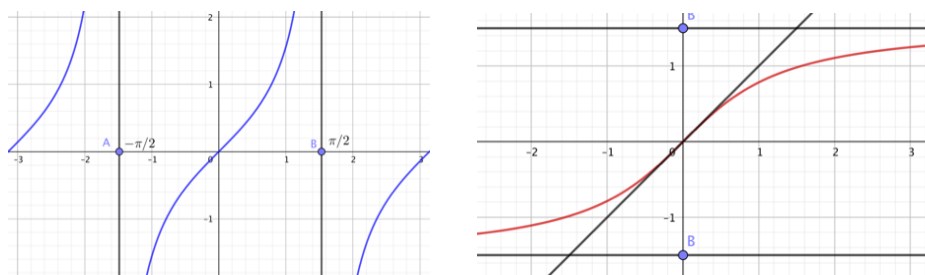


Figura 2.9: Grafici della funzioni $f(x) = tg(x)$ e $g(x) = arctg(x)$.

Riconoscere: il dominio, l'immagine, il segno, i limiti, gli asintoti, la crescita, le limitazioni.

Quale delle due ha un periodo e quale?

Che relazione di simmetria esiste fra la $f(x)$ e la $g(x)$?

Che trasformazione subiscono gli asintoti della $f(x)$ nel passaggio alla $g(x)$?

Esempio 3

La funzione $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

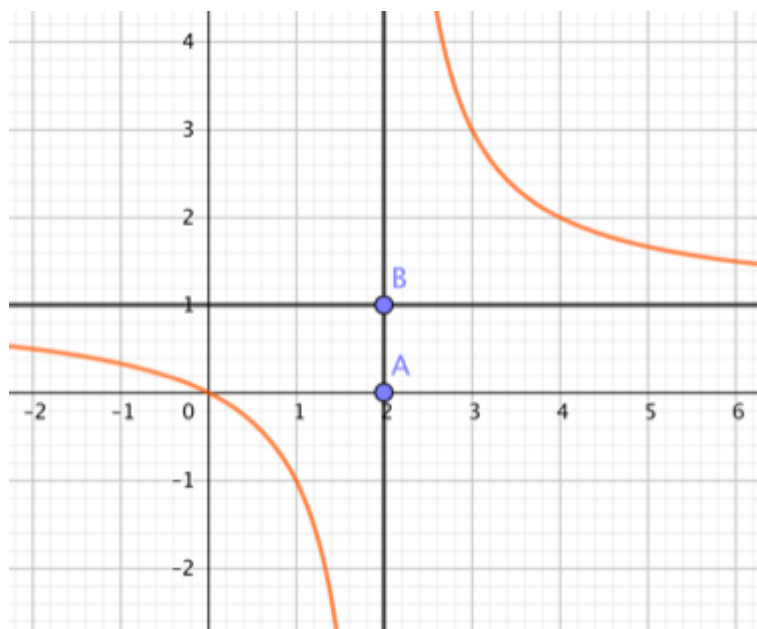


Figura 2.10: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

Questa è una funzione razionale fratta, di cui è possibile riconoscere: il dominio, l'immagine, il segno, i limiti, gli asintoti, gli zeri, la crescita o la decrescenza.

Riesci a individuare una simmetria? Rispetto a quale punto?

Con quale traslazione si riconduce all'iperbole equilatera?

Sapresti dire dove è maggiore di 1?

Esempio 4

Più difficile, la funzione $f(x) = e^{\sin(x)}$.

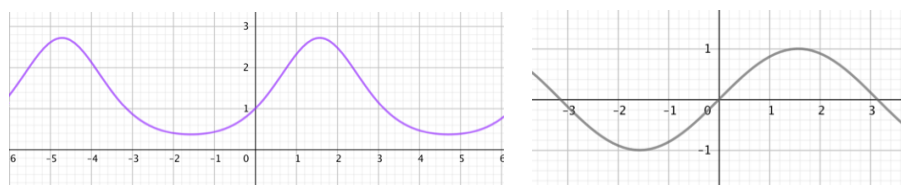


Figura 2.11: Grafici della funzioni $f(x) = e^{\sin(x)}$ e $g(x) = \sin x$.

Aiutandoti col grafico della funzione $g(x) = \sin x$ dedurre dal grafico di $e^{\sin x}$: il dominio, l'immagine, il segno, i limiti, i massimi e minimi, la crescita o la decrescenza, il periodo.

Come giustifichi il fatto che la funzione $\sin x$ è in parte positiva e in parte negativa mentre la $e^{\sin x}$ è tutta positiva?

Puoi dedurre che si conserva la crescita e la decrescenza fra le due funzioni?

Si mantiene anche la simmetria del $\sin x$?

Capitolo 3

Scrittura di un grafico

Domanda: come lavorare sul grafico di una funzione?

3.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti

Questo problema è stato sollevato dagli studenti di tutti i gruppi, e ha toccato tutti i tutor nessuno escluso. E' il problema inverso della lettura di un grafico, argomento che è stato trattato nella scheda precedente, e si scontra anch'esso con il concetto di funzione ma in modo diverso.

Sì, perché se nella scheda “lettura” si trattava di riconoscere dal grafico le proprietà che caratterizzavano una funzione, ora si tratta di costruirla a partire da conoscenze che fanno parte di sfere semantiche diverse, quella dell'algebra, dell'analisi, della geometria analitica, della geometria, della trigonometria, dell'aritmetica, ognuna conosciuta di per sé, come un segmento a parte della matematica, mai messa in condivisione con le altre e tanto meno messa al servizio di una sfera semantica diversa, quella grafica, fatta eccezione per la geometria analitica.

Forse sta proprio nella geometria analitica il punto critico: c'è incertezza nel significato delle coordinate, nella differenza fra ascissa e ordinata, e nella loro corrispondenza con i punti del piano. Questo dovrebbe far riflettere su come sia considerato facile il passaggio al piano cartesiano quando si comin-

3.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti

cia la geometria analitica, quando forse invece non lo è.

Se ci si pensa bene costruire il grafico di una funzione è un'indagine, vuol dire procedere per indizi, partire da dati conosciuti o che comunque si è in grado di conoscere (la cosiddetta âscaletta' ben nota agli studenti) e disporli nel piano fino a arrivare a comporre un puzzle per successive approssimazioni.

Allora perché tanta difficoltà e incertezza?

Una difficoltà riguarda il lessico, il non saper riconoscere le parole: ad esempio "le intersezioni con l'asse x ", "gli zeri" e "le soluzioni" di un'equazione rappresentano spesso cose diverse per gli studenti, forse perché sono state studiate in tempi diversi, con accezioni diverse e in contesti diversi; così come studiare il segno di una funzione e risolvere una disequazione non sono la stessa cosa: la disequazione magari la sanno risolvere, ma poi non sanno come utilizzarla.

La difficoltà maggiore riguarda proprio il passaggio dal linguaggio simbolico al linguaggio grafico: gli ingredienti ci sono, ma il problema è come trasferirli nel piano. A pensarci bene tutto questo è strano in un mondo in cui l'immagine predomina sulla parola, però è così: la difficoltà sta nel trasferire l'informazione in immagine.

Spesso mi è successo di osservare lo studente (ovviamente parlo di quello in difficoltà) che comincia a tracciare il grafico e la parola che meglio rende l'idea è "imbarazzato": non sa dove mettere le mani, procede con cautela domandandosi "chi è zero", l'asse x , l'asse y , l'origine? Analogamente per il maggiore o minore di zero: sopra, sotto, a destra, a sinistra?

Si tratta di due mondi estranei l'uno all'altro: quando si riesce a metterli in comunicazione il grosso del lavoro è fatto e tutto diventa semplice, le difficoltà continuano a essere quelle relative all'algebra o all'analisi ma a questo punto la visualizzazione grafica, anche parziale, aiuta e funziona come controllo.

Naturalmente ci sono altri ingredienti per procedere nell'indagine: il dominio, i massimi e minimi, i limiti.

3.2 Alcune risposte dei tutor tratte dai diari di bordo in itinere

Come abbiamo già anticipato, tutti i tutor all'interno del progetto hanno avuto occasione di lavorare sulla scrittura dei grafici, a vari livelli. Tra le tante, scegliamo di riportare qui l'esperienza di un tutor che illustra bene sia le difficoltà lessicali che possono emergere durante uno studio di funzione, sia le “trappole” nascoste in un apprendimento esclusivamente mnemonico della cosiddetta “scaletta”.

Il racconto tratta dello studio di una funzione razionale fratta affrontato alla lavagna da una sola studentessa (la sola presente al corso quel giorno), su sua esplicita richiesta. La collezione delle esperienze dei tutor ribadisce come questa sia stata sempre una domanda molto gettonata.

In questo caso la funzione in esame è:

$$f(x) = \frac{1 - 4x^2}{x^2 + x}$$

Il tutor sceglie di sedersi nei posti degli studenti (scelta non didatticamente neutra, come discuteremo nella scheda finale) e la studentessa inizia studiando il dominio, scrivendo subito correttamente:

$$x^2 + x \neq 0$$

Poi si blocca, indecisa sul da farsi, e chiede: “Ma qui si usa la formula col delta”? (che dimostra di ricordare benissimo)

Questa incertezza è l'occasione per fare chiarezza su alcuni aspetti lessicali che rimangono troppo spesso impliciti, accendendo i riflettori sui collegamenti semantici profondi che sussistono tra oggetti algebrici connessi ma distinti come equazioni e polinomi.

Il tutor coglie subito l'opportunità e intavola con la studentessa una breve discussione alla fine della quale chiariscono che:

- *la “formula col delta” serve per trovare le (eventuali) soluzioni di una equazione di secondo grado (scritta nella forma $ax^2 + bx + c = 0$);*
- *con tale formula si trovano **tutti e soli** i valori dell'incognita (x) che verificano l'equazione, e quindi che annullano il polinomio $ax^2 + bx + c$;*
- *per esplicitare la nostra condizione $x^2 + x \neq 0$ si può risolvere l'equazione $x^2 + x = 0$ per trovare tutti e soli i valori di x che annullano il denominatore, e poi, visto che per tutti gli altri valori di x siamo sicuri che il denominatore **non** si annulla, semplicemente **escludere** quei due valori dal dominio.*

Individuati i valori da escludere (0 e -1), la studentessa deve superare un nuovo scoglio dovuto ancora una volta al linguaggio della matematica, questa volta al suo formalismo: indecisa su come scrivere il dominio, in prima battuta prova le due forme

$$\{x \neq 0 \text{ o } x \neq -1\} \quad \{x \in \mathbb{R} < -1 \cup x > 0 \cup (-1, 0)\}$$

Il tutor non bolla subito come “sbagliate” le due scritture, ma prova a sistemare quanto proposto dalla studentessa: “L'idea c'è, ma così è scritto davvero male... Il dominio si può scrivere in più modi diversi, che hai però un po' mescolato tra loro: facciamo un po' d'ordine...”. Dopo una breve discussione “ortografica” chiariscono la differenza tra “e” e “o”, il formalismo insiemistico che usa le parentesi graffe, il formalismo degli intervalli aperti e chiusi, e in particolare la differenza tra l'uso delle parentesi graffe, quadre e tonde. Alla lavagna alla fine rimangono le seguenti tre scritture:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq -1\}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$

$$D = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$$

L'ultima scrittura è quella verso cui la studentessa mostra più ostilità (tanto che inizialmente non voleva nemmeno scriverla), ma il tutor decide di insistere per tenerla prevedendone la futura utilità per lo studio dei limiti (vedremo che a posteriori risulterà una scelta vincente...).

Si passa poi allo studio del segno, partendo dal numeratore:

$$1 - 4x^2 \geq 0$$

$$-4x^2 \geq -1$$

$$x^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$x \leq \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

Anche questo è un errore piuttosto classico nella risoluzione delle disequazioni... Tutor e studentessa fanno allora un'altra pausa per riflettere e accordarsi sul fatto che scritture del tipo $x = \pm 1/2$ possono avere un senso, mentre scritture del tipo $x < \pm 1/2$ non ce l'hanno.

Inoltre, e questo è un passo fondamentale per la “presa di coscienza” delle distinzioni tra i diversi passi previsti dalla famosa “scaletta”, riconoscono che in questo studio del segno è necessario risolvere una disequazione di secondo grado.

Il tutor continua quindi con un approccio maieutico, volto cioè a far emergere le conoscenze pregresse della ragazza senza fornire subito tutte le “ricette” già pronte, ma anzi valorizzando al massimo i contributi e le idee che provengono dalla studentessa.

“Si fa col delta?”, chiede lei.

“Può darsi: però prima abbiamo detto che quella formula serve per risolvere le equazioni di secondo grado, mentre questa è una disequazione... Come faresti, col delta?”

“Boh, non mi ricordo...”

“Allora facciamo un passo alla volta: prova intanto a risolvere l'equazione $1 - 4x^2 = 0$, poi vediamo se ci può servire per la disequazione...”

I conti ancora una volta filano lisci: $x = \pm 1/2$ (segno che, almeno nel caso di questa studentessa, le difficoltà non sono tanto nella tecnica quanto proprio nella comprensione del significato delle procedure che sa applicare), al che il tutor chiede se ricorda di aver visto disequazioni di secondo grado risolte usando una parabola: subito la studentessa richiama alla memoria la procedura, dimostrando di ricordarla benissimo (concavità in alto o in basso, intersezioni con l'asse x , segno). In poco tempo risolve correttamente sia questa disequazione che quella relativa al denominatore (riconoscendo che i conti erano già stati fatti mentre discuteva il dominio), e le combina insieme nel grafico dei segni (che hanno colloquialmente chiamato “cimitero”). Ha un unico dubbio sull'uso dei “pallini”: vuoti o pieni? Il tutor le suggerisce: “I pallini si usano in genere per indicare nel grafico dei segni che per quel valore di x una certa espressione fa zero, e quindi che non è né positiva né negativa” (e questo già lo ricordava, come la differenza tra avere uno zero al numeratore o al denominatore), “e di solito si usano i pallini vuoti per indicare degli zeri che “non vanno bene”, ad esempio se annullano il denominatore, rendendo senza significato la scrittura, e i pallini pieni per indicare degli zeri che “non danno problemi”, ad esempio se annullano il numeratore e quindi l'intera frazione”. Prontamente la studentessa riporta correttamente i pallini sul grafico dei segni, e il tutor si ferma per farle notare che i pallini vuoti che ha messo coincidono proprio con le condizioni che aveva imposto all'inizio nella

ricerca del dominio, mentre i pallini pieni rappresentano le intersezioni con l'asse x (e quindi non è necessario ri-calcolarle, come stava per fare...). Coglie così l'occasione per dimostrarle come un maggior controllo semantico su ciò che sta facendo possa da un lato favorire il controllo metacognitivo dei risultati raggiunti nei passi precedenti della "scaletta", e dall'altro farle risparmiare calcoli inutili, con un guadagno netto di tempo e fatica (tra l'altro, osserviamo che in uno studio di funzione il tempo viene quasi sempre percepito come un fattore importante di cui tenere conto, dato che in genere la risoluzione di un problema come questo può essere abbastanza lunga. In quest'ottica la possibilità di guadagnare tempo ragionando, invece di applicare ciecamente procedure apprese mnemonicamente, andrebbe sempre valorizzata e sottolineata esplicitamente ai ragazzi). Coinvolta in questo circolo virtuoso di osservazioni e ragionamenti, la studentessa conclude subito anche che non serve fare calcoli per le intersezioni con l'asse y , perché 0 non è nel dominio della funzione.

A questo punto è stata tracciata (correttamente) una prima bozza di grafico, che tenesse conto del dominio, del segno e delle intersezioni con gli assi, per poi passare al calcolo dei limiti.

Il tutor annota che l'ora stava per finire, ma riporta un ultimo commento interessante relativo al determinare quali limiti dovessero essere calcolati (come vedremo nelle riflessioni didattiche, questo è proprio uno dei passaggi che presenta maggiori difficoltà per molti studenti).

A questo punto il tutor ha richiamato l'attenzione su una delle scritture del dominio viste in precedenza, quella che usava gli intervalli: "In genere si dice di calcolare i limiti agli estremi del dominio, che sono proprio tutti e soli i valori che abbiamo usato per scrivere il dominio come unione di intervalli: $-\infty, -1$ (da sinistra e da destra), 0 (da sinistra e da destra) e $+\infty$...".

Questa osservazione ha permesso alla studentessa di riconsiderare e apprezzare le potenzialità proprio di quella formalizzazione che inizialmente le era sembrata inutilmente articolata: “Ah, ma allora quella scrittura complicata ha davvero un senso! A me sembrava la più brutta, ma invece è la più utile: ora che l’ho capita, userò sempre quella! Eh, c’era un motivo... tutto ha un motivo in matematica... basta capirlo! Eh, però, se non te lo dicono chiaramente uno come fa ad arrivarci?”.

In seguito sono stati fatti subito correttamente sia il calcolo dei limiti che il disegno del grafico probabile della funzione, e il racconto del tutor termina qui (specificando che a lezione non avevano ancora introdotto le derivate, per cui i loro studi di funzione per il momento si fermavano a questo stadio).

In conclusione, osserviamo come questo episodio permetta di evidenziare i vantaggi di un approccio più attento al significato di quello che si sta facendo, piuttosto che alla memorizzazione di una qualche “scaletta” (sempre utile, ma svuotata di senso se lo studio di funzione si riduce solo a questo), mettendo in luce anche le gratificazioni che un percorso come questo può riservare sia al docente che al discente. In questo caso infatti il tutor conclude osservando come la studentessa apparisse molto soddisfatta: prima sapeva solo eseguire benissimo (o quasi) una procedura (la scaletta per lo studio di una funzione, la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, l’uso delle parabole per risolvere le disequazioni di secondo grado, la composizione del grafico dei segni, il calcolo dei limiti), ora invece aveva capito perché si faceva così, e dava molta più soddisfazione (a entrambi).

Infine, richiamiamo anche l’attenzione su una delle criticità che emergono più spesso nel processo di insegnamento/apprendimento di uno studio di funzione: il fattore tempo. Come abbiamo già ricordato, infatti, la gestione del tempo a disposizione viene spesso riconosciuta dagli studenti come una delle maggiori criticità in uno (spesso lunghissimo) studio di funzione, e anche in questo caso un approccio più attento al ragionamento e al si-

gnificato delle procedure applicate può in molti casi permettere di evitare calcoli inutili (e di controllare quelli già svolti). A volte anche una certa “disinvoltura” può aiutare a risparmiare tempo: ad esempio, per un occhio esperto dovrebbe essere già chiaro che una funzione fratta come quella presa in esame nell’episodio riportato dal nostro tutor avrà le rette $x = -1$ e $x = 0$ come asintoti verticali e la retta $y = -4$ come asintoto orizzontale (e quindi nessun asintoto obliquo): svelare questi “trucchi” agli studenti può permettere loro, se non di saltare la ricerca degli asintoti, almeno di avere un controllo a priori su quali sono le caratteristiche della funzione che dovranno emergere dallo studio.

Ma il fattore tempo può rappresentare una criticità anche per il docente: l’esperienza del nostro tutor, infatti, mette in luce come un percorso di questo tipo, attento al senso, al lessico e ai collegamenti tra i diversi concetti matematici in gioco, richieda calma, tempi distesi e (forse) un po’ di fatica... ma crediamo che ne valga la pena!

3.3 Riflessioni didattiche e possibili risposte

Lo studio di funzione di solito viene affrontato in quinta quando si hanno strumenti potenti come i limiti e le derivate e assume un’importanza rilevante perché è elemento fondamentale delle prove d’esame, da qui l’abitudine da parte degli insegnanti di offrire agli studenti la cosiddetta “scaletta”, strumento rassicurante e quasi taumaturgico: lo studente in difficoltà si sente sicuro perché sa cosa deve fare, al di là del fatto che poi lo sappia effettivamente fare o meno. È una strategia molto comune, ma che forse avrebbe potuto e dovuto essere preparata nel tempo fin dalla terza quando si inizia a lavorare sul piano cartesiano.

Infatti fin da quando si parla di rette, parabole e iperboli, anche se in maniera intuitiva, si descrivono funzioni anche ai limiti del dominio, ad esempio si capisce come si comporta l’iperbole quando l’ascissa diventa molto molto grande o molto molto vicino a zero; un po’ come quando in fisica, non potendo far uso del differenziale si decide, per angoli piccoli, di approssimare l’angolo o l’arco con il seno dell’angolo: si tratta di escamotage che però

funzionano e permettono di trattare un problema in maniera completa.

Utilizzando il comportamento dell'iperbole (quindi alcuni limiti seppur in maniera ingenua) si possono studiare anzitempo molte altre funzioni, ad esempio i reciproci delle funzioni conosciute, e, sfruttando il buon senso e quel po' di algebra che dovrebbero conoscere, anche quello che nel passaggio da una funzione al suo reciproco si conserva o cambia: il segno, la crescita, i massimi e minimi, il diventare molto grande o molto piccolo.

Anche la geometria delle trasformazioni darebbe un aiuto nella rappresentazione nel piano di funzioni elementari eventualmente traslate, simmetriche, dilatate, inverse. Insomma sarebbe utile precorrere i tempi e iniziare uno studio di funzioni per via elementare che da un lato anticipi lo studio sistematico che verrà fatto in quinta e dall'altro renda il piano cartesiano un parco di lavoro innovativo e stimolante più di quanto lo sia con lo studio delle famiglie di parabole.

I punti chiave dello studio di funzione comunque sono, oltre gli zeri e il segno, il dominio, i limiti, i massimi e minimi, le eventuali simmetrie, talvolta il periodo. Gli strumenti a questo punto sono potenti, ci sono le definizioni di limite, e le derivate, la prima e la seconda.

Come evidenziato anche dall'esperienza del tutor che abbiamo riportato, per il dominio le difficoltà non stanno tanto nell'individuare gli intervalli in cui la funzione esiste: pensiamo alle radici quadrate, alle funzioni fratte, al logaritmo... in tutti questi casi magari gli studenti sono in grado di porre le condizioni giuste, ma rimane poi il problema algebrico di risolvere equazioni e disequazioni.

La domanda che emerge immediatamente poi è: *quali* limiti? Perché a più infinito e a meno infinito? Perché intorno a un asintoto? E come faccio?

Qui c'è una discrasia fra quello che hanno capito o studiato o creduto di capire nella teoria, con gli epsilon e i delta, e quello che si trovano ad applicare allo studio di funzione. Cercano di ricordare la definizione e pensano di dover andare a cercare il delta o la x_0 mentre ora serve solo il calcolo dei limiti, e ancor di più serve la ragionevolezza: a un asintoto la funzione algebrica può fare solo due cose andare a più infinito o a meno infinito, e questo dipende esclusivamente dal segno della funzione. E' una cosa semplice ma stranamente molti studenti non lo sanno, sembra che nessuno glielo abbia

mai detto.

Un po' più complicato il limite a più infinito perché lì serve il calcolo dei limiti e questo possono non saperlo fare per mancanza di pratica e di calcolo. Quanto al calcolo della derivata non è considerato uno scoglio, anzi è considerato un elemento di forza perché produce informazioni, il che è vero per la ricerca dei massimi, dei minimi e dei flessi; le difficoltà si ripropongono quindi solo nella risoluzione di equazioni e disequazioni che derivano dal porre la derivata uguale a zero o maggiore/minore di zero.

Ma anche nella ricerca dei massimi e minimi, gioca un ruolo importante il buon senso: se una funzione continua viene da più infinito e va a più infinito è ragionevole ipotizzare la presenza di un minimo e questo può essere un elemento di controllo sul calcolo del segno della derivata.

Sempre parlando di funzioni semplici, tipo quelle razionali fratte in cui il grado del numeratore supera di uno quello del denominatore, è interessante la ricerca di asintoti obliqui: la prassi prevede il calcolo di due limiti, necessari nel caso di funzioni più complicate tipo radici o altro, ma non necessari nel caso delle funzioni razionali, anzi direi controproducenti; infatti l'asintoto obliquo si ottiene direttamente come quoziente della divisione fra il numeratore e il denominatore. Così si è in grado di scrivere la frazione come una parte "intera" (una retta) più una frazione che tende a zero al tendere di x all'infinito e questo è esattamente il "significato" di asintoto, significato che si perde nel calcolo dei due limiti.

Tutte queste considerazioni tendono a privilegiare un atteggiamento meno formale ma più ricco di significato, un modo di muoversi magari un po' disinvolto ma nella maggior parte dei casi sufficiente a rappresentare nel piano una funzione non particolarmente complessa.

3.4 Attività di consolidamento e autovalutazione

Vorrei esaminare esempi di studi di funzione partendo proprio dall'esperienza diretta dei tutor.

Racconta un tutor:

Il percorso sullo studio di funzioni ha seguito queste tappe:

- *grafici delle funzioni fondamentali e loro descrizione;*
- *trasformazioni di grafici: isometrie, omotetie, valore assoluto, funzione inversa;*
- *costruzione di funzioni con caratteristiche assegnate: una funzione esponenziale che abbia un certo asintoto, o una trigonometrica che sia pari, contenga un coseno e valga 5 in $x = 0$, e così via...*

Proponiamo qualche esempio e, nella speranza che la cubica $y = x^3$ sia conosciuta e che il suo grafico sia noto, proviamo a modificarla.

Esempio 1

Cominciamo dalla funzione $f(x) = x^3 - x^2$.

La prima cosa da fare è scriverla in un altro modo $f(x) = x^2(x - 1)$.

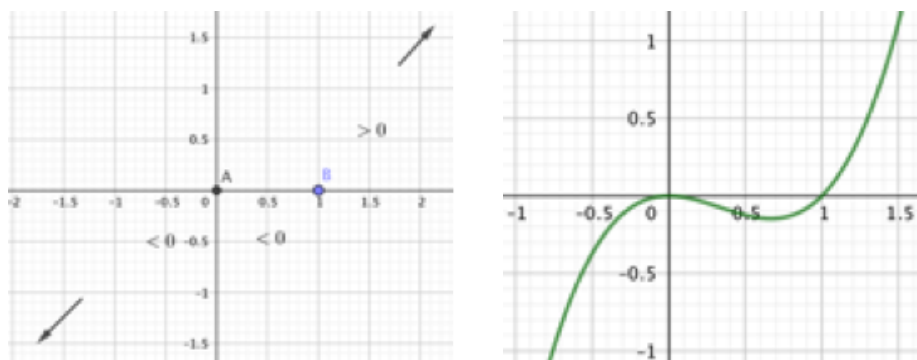


Figura 3.1: Studio e grafico della funzione $f(x) = x^3 - x^2$.

Così è più significativa, gli indizi ci permettono di accedere immediatamente al segno e agli zeri, si annulla in $x = 0$ e in $x = 1$, ed è positiva per $x > 1$; ma, in seconda battuta ci permettono di accedere anche ai massimi e minimi. O per lo meno al massimo: infatti una funzione che in un intervallo intorno a zero è minore o uguale a 0 e in $x = 0$ vale zero, in $x = 0$ deve avere un massimo. Non servono le derivate.

E se la funzione vale zero agli estremi di un intervallo ed è negativa all'interno, è ragionevole intuire che deve esistere un minimo: dove sia lo scopriranno

con le derivate.

Esempio 2

Analogamente per la $f(x) = x^3 - x$.

Questa volta la scrittura consigliata è $f(x) = x(x-1)(x+1)$ in cui gli zeri sono in $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ e i limiti a infinito sono gli stessi della cubica; sulla base di questi soli indizi si può ipotizzare il grafico della funzione; ovviamente per i dettagli occorrono le derivate ma almeno non ci saranno errori di scelta fra massimo e minimo, crescita e decrescenza.

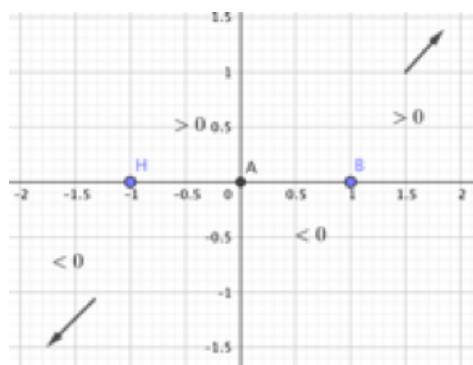


Figura 3.2: Grafico della funzione $f(x) = x^3 - x$.

Esempio 3

Analoghe considerazioni si possono fare con le funzioni immediatamente derivabili dalla cubica attraverso le trasformazioni del piano: $f(x) = -x^3$, $f(x) = x^3 + 3$, $f(x) = (x-1)^3$ e $f(x) = |x^3|$.

Esempio 4

Una domanda che ricorre spesso nell'analisi di studi di funzione con un parametro (del tipo $f(x) = x^3 + kx$) è “per quali valori di k la funzione è iniettiva”. Sempre nel caso di funzioni continue forse è il caso di far capire che c'è una relazione fra iniettività e monotonia della funzione: se la $f(x)$ è tutta crescente nel suo dominio (o decrescente) è anche iniettiva mentre una funzione che ha massimi e minimi non lo è.

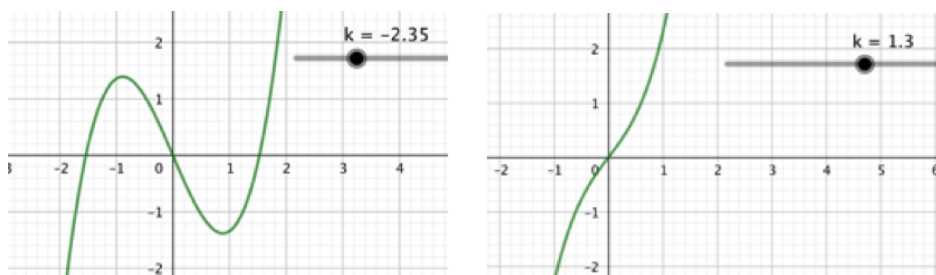


Figura 3.3: Grafico della funzione $f(x) = x^3 + kx$ per $k = -2.35$ e $k = 1.3$.

Esempio 5

Analogamente viene chiesto spesso per quale valore di un parametro k la funzione $y = f(x) - k$ ammette zeri e, se sì, quanti. Il primo passo è quello di spezzare la $y = f(x) - k$ in due funzioni di cui andare a cercare le intersezioni.

Un'immagine vale più di mille parole e dal grafico è immediato individuare gli intervalli in cui gli zeri esistono, quanti ne esistono e in quali intervalli. Molto meno immediato è risolvere le corrispondenti equazioni.

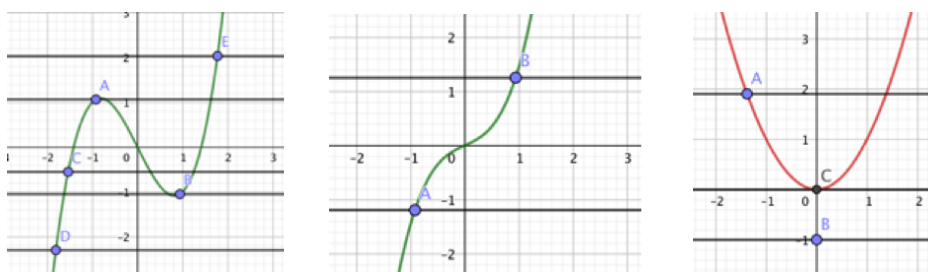


Figura 3.4: Risoluzione grafica di alcune equazioni del tipo $f(x) = k$.

Esempio 6

Anche le funzioni fratte possono essere costruite a partire da più funzioni elementari. Ad esempio la $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ può essere scomposta in una somma di due funzioni elementari, la $y = x$ e la $y = -\frac{1}{x}$; $f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$ quindi una retta e un'iperbole equilatera.

Non si tratta solo di una differenza sintattica di scrittura, ma di una dif-

ferenza semantica; le informazioni che si possono ricavare da questa forma sono molto maggiori e molto facilmente ricavabili anche per via elementare.

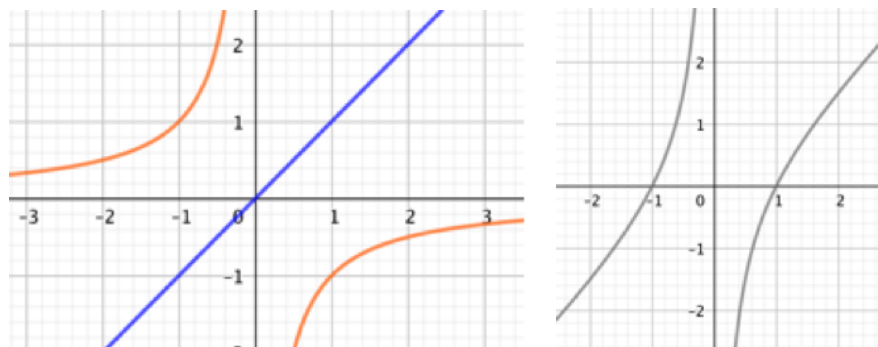


Figura 3.5: Grafico delle funzioni $y = x$ e $y = -\frac{1}{x}$ e di $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

Entrambe sono crescenti e simmetriche rispetto all'origine, la loro somma sarà quindi simmetrica rispetto all'origine e crescente, quindi non ci saranno né massimi né minimi. Quando x si avvicina a 0 si comporta come la $y = -\frac{1}{x}$, quindi ci sarà un asintoto verticale, mentre quando x tende all'infinito si avvicina alla retta $y = x$ che costituisce quindi un asintoto obliquo.

Esempio 7

In maniera analoga si può studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ e tutte le funzioni omografiche.

Esempio 8

La domanda del tutor era “costruire una funzione esponenziale con un certo asintoto”.

Occorre decidere che tipo di asintoto vogliamo, orizzontale, obliquo o verticale. Nel primo caso, ad esempio se vogliamo come asintoto, per x che tende a $+\infty$, la retta $y = 5$ è sufficiente una traslazione verticale $f(x) = e^{-x} + 5$, ma anche $f(x) = -e^{-x} + 5$ oppure $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 4$.

Nel secondo caso, asintoto obliquo, un esempio banale può essere la $f(x) = e^{-x} + x$, nel terzo la $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ per x che tende a 0^+ .

Esempio 9

Le funzioni trigonometriche pari sono tutte le funzioni $\cos x$ con tutte le sue varianti; porre alcune condizioni (che valga 5 in $x = 0$) vuol dire ad esempio costruire la $f(x) = \cos(3x) + 5$ oppure la $f(x) = 5\cos(x)$ o anche la $f(x) = \frac{1}{\cos x} + 5$, si tratta di partire dalla funzione coseno e modificarla opportunamente.

Esempio 10

Nello studio dei reciproci di funzioni conosciute, ad esempio $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ invece di procedere con la scaletta canonica è più interessante dedurre il grafico da quello del coseno ragionando sulle proprietà che si conservano e quella che variano.

Quello che si conserva: le simmetrie, il segno, la periodicità.

Quello che cambia: il dominio esclude gli zeri della funzione, e al loro posto compaiono gli asintoti verticali.

Si scambia la crescita con la decrescenza.

Si scambiano i massimi con i minimi (laddove esistono).

I limiti a $\pm\infty$ si traducono in infinitesimi (non è vero il contrario).

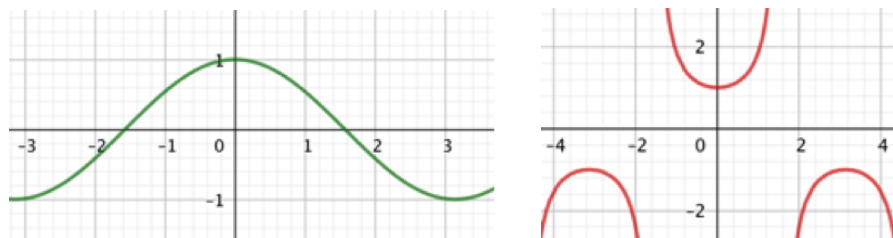


Figura 3.6: Grafico delle funzioni $f(x) = \cos x$ e $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Capitolo 4

Trigonometria

Domanda: cosa è necessario sapere sulla trigonometria?

4.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti

E' un fatto che tutti gli studenti hanno proposto ai tutor di rifare ex novo le basi della trigonometria, confessando che non sapevano nulla.

Ci deve essere un motivo (anche più d'uno) perché la trigonometria, nonostante venga insegnata per molti mesi alle superiori, non sia accettata né inserita nel proprio bagaglio culturale, come se fosse qualcosa di alieno, complicato, inutile. Un motivo risiede nella quantità di formule che vengono richieste (anche se in fondo, lavorando con intelligenza, potrebbero essere non molte di più di quelle della geometria analitica).

Un altro sta nel fatto che non è immediatamente visibile il suo utilizzo, non solo in matematica, ma anche in fisica; penso ai vettori che magari vengono insegnati in tempi diversi, da insegnanti diversi in contesti diversi.

Perché è una parte della geometria, che è effettivamente un argomento molto trascurato e occorre rifarsi alle conoscenze delle scuole medie, quindi troppo antiche.

Perché ha molti aspetti: da un lato la circonferenza trigonometrica con le sue implicazioni geometriche, da un altro parla di triangoli rettangoli e di

4.1 Ipotesi e considerazioni sulle difficoltà incontrate dagli studenti

rapporti fra i lati, e infine si tratta di funzioni in cui la variabile è un angolo. Perché ci sono tanti piani sovrapposti e la sovrapposizione di diversi piani di lettura induce l'incertezza e di conseguenza la tendenza alla rimozione; c'è il piano della geometria con le simmetrie, le rotazioni e le similitudini in gioco, il piano del calcolo con la risoluzione di equazioni e disequazioni e la manipolazione algebrica, il piano della contestualizzazione in problemi di realtà, auspicabile ma difficile per la traduzione di linguaggio che comporta, il piano della rappresentazione grafica, con l'estensione degli angoli ai numeri reali, le proprietà dei grafici attraverso l'uso delle trasformazioni del piano... Il saltare da un piano all'altro viene accettato con difficoltà ed è la ragione per cui gli studenti preferiscono avvitarsi nella risoluzione di una disequazione per via algebrica (sbagliando molto spesso) piuttosto che leggere, in maniera del tutto naturale, gli intervalli nella sua rappresentazione grafica.

Alla fine del percorso scolastico non dovrebbero esserci difficoltà nel riconoscere gli angoli, o nel risolvere semplici equazioni o disequazioni in seno, coseno, e tangente avendo sotto gli occhi la circonferenza e il relativo grafico. E invece ce ne sono perché le cose si complicano immediatamente, perché non c'è il tempo per soffermarsi su quelle semplici, ma si passa subito a equazioni e disequazioni complicate da manipolare, di secondo grado, lineari in seno e coseno, con angoli x e $2x$, in cui occorre andare in tangente, in cui compare anche la periodicità, in una casistica che induce gli studenti a pensare che per ognuna di quelle equazioni ci sia un metodo di risoluzione specifico che va imparato a memoria.

Complici i libri di testo, e gli insegnanti che a essi si adeguano, che propongono dosi massicce e inutili di esercizi artificiali, suddivisi per tipologia, con equazioni che hanno bisogno di virtuosismi acrobatici e poi miracolosamente finiscono tutte con angoli di 30° , 45° o 60° , con l'effetto di riuscire ad allontanare anche i più volenterosi.

Inoltre mentre per le equazioni algebriche la risoluzione si basa sui cosiddetti principi di equivalenza che portano fino alla soluzione, in trigonometria c'è un passaggio in più che è quello della funzione inversa: un conto è passare da $2x = 1$ a $x = 1/2$ un altro è passare da $\sin x = 1/2$ a $x = \pi/6$. Non c'è nessun meccanismo che permetta di passare dal seno di un angolo all'angolo

e questo spiega la confusione fra angoli e funzioni degli angoli.

4.2 Alcune risposte dei tutor tratte dai diari di bordo in itinere

Come per le altre schede, le riflessioni riportate in queste pagine derivano ovviamente dall'esperienza didattica di lunga data ma sono state stimulate anche dall'esperienza dei tutor del progetto che si sono trovati ad affrontare una situazione forse inaspettata e che hanno risolto in maniera spesso brillante e con successo.

Gli studenti dicono che a lezione stanno già facendo gli integrali, quando loro non hanno idea neanche di cosa sia seno e coseno. Ho notato che l'esigenza era quella di capire cose âcomplicate', come gli integrali, quando il vero problema è nelle cose semplici. Per questo, tra tutti gli argomenti abbiamo deciso di parlare di radianti, per poi passare alla goniometria e trigonometria. Ho iniziato raccontando un po' la teoria. Per farlo ho scelto di disegnare molto alla lavagna senza fornire nessun'altra informazione che le definizioni.

A questo punto li ho sfidati (guidandoli) a scoprire da soli le varie regole della goniometria. Siamo partiti dal capire dove si trovano gli angoli in radianti sulla circonferenza, per passare a quanto vale il seno o il coseno di quegli angoli, per poi concludere con esercizi del test d'ingresso.

Questo estratto del diario di bordo testimonia, insieme anche ad altre esperienze dei tutor collezionate durante il progetto, come in molti casi sia stato necessario ripartire proprio dalle conoscenze di base per trattare la trigonometria.

Un'altra tutor alla domanda “*Cosa dobbiamo sapere di $\sin x$ e $\cos x$?*”, posta dai suoi studenti durante le lezioni di tutorato, risponde in questo modo:

La trigonometria è un argomento ampiamente sviluppato per dei mesi nei licei scientifici quindi è impensabile fare lo stesso tipo di lavoro in qualche ora. La via che mi è sembrata più utile e facile per lasciare un'idea e qualche spunto utile anche per esercizi successivi è stata, come prima cosa, quella di introdurre la definizione con la circonferenza goniometrica e dire insieme ai ragazzi quali sono seno e coseno degli angoli $0, \pi/2, \pi/3, \pi, \pi/4, 2\pi$. Poi, usando la definizione data e guardando alla variabilità di entrambi, ho mostrato come si può tracciare un grafico qualitativo di entrambe le funzioni. Infine, ho mostrato le formule di addizione e sottrazione per seno e coseno. A questo punto la loro domanda è stata: “a cosa serve una formula così complicata?” Una possibile risposta è la dimostrazione della derivata di seno e coseno. Infatti, per calcolare derivata di seno e coseno, scrivendo il rapporto incrementale possiamo utilizzare la formula di addizione per entrambi questi oggetti. La difficoltà nel capire i passaggi della dimostrazione era proprio il non conoscere la formula di addizione.

Abbiamo scelto di riportare anche questo estratto perché in questo caso non c'è solo il proporre le conoscenze di base ma c'è anche un valore aggiunto importante: quello di mostrare la finalità delle conoscenze acquisite in un contesto immediato e richiesto dal corso universitario.

4.3 Riflessioni didattiche e possibili risposte

Ma vediamo quali sono gli scogli da superare e cosa è veramente necessario sapere per gli studenti che affrontano i corsi universitari, che sono sì deboli nelle loro conoscenze matematiche ma che sono più adulti dei ragazzi

della scuola superiore e che dovrebbero essere motivati a capire almeno le cose essenziali che non sono molte.

Quello che li disorienta spesso è la scelta del registro da usare: quando la circonferenza trigonometrica e quando la funzione? Questi due piani, che devono coesistere entrambi, sono visti come alternativi e non come integrati fra loro; per esempio se si deve risolvere un'equazione del tipo $\sin x = k$ è conveniente usare la circonferenza perché è immediato il riconoscimento dell'angolo, ma dovendo risolvere una disequazione conviene avere il grafico della funzione. Sarebbe consigliabile dividere la lavagna in due parti e utilizzare in una parte la circonferenza e nell'altra la funzione associata e utilizzare entrambi i registri. Coerentemente con questo approccio, anche noi dividiamo in due le nostre riflessioni.

4.3.1 Sulla circonferenza trigonometrica

Gradi o radianti? Meglio radianti, ma con cautela.

La definizione di seno e coseno è facile da accettare a patto che sia conosciuta la parola proiezione, ma c'è il problema della misura dell'angolo, gradi o radianti?

I gradi sono facili da riconoscere, gli studenti li conoscono dalle scuole elementari; non così facile il radiante che fa riferimento alla lunghezza della circonferenza, di solito sconosciuta, e inoltre si pone come unità di misura: forse qualche insegnante alla scuola media avrà fatto fare loro l'esperimento di prendere uno spago, misurare il raggio di un cilindro e osservare quante volte occorre riportare la lunghezza dello spago per completare una circonferenza, e trovare allora quel 6,28 o più esattamente ma più astrattamente 2π .

Quasi mai entra nel percorso didattico, anche in quinta, la definizione corretta di π con i poligoni inscritti e circoscritti. E ancor più difficile è accettare che gli angoli vengano misurati come gli archi in virtù di un'omotetia che, dato un angolo α , mantiene costante il rapporto l/r per circonferenze concentriche.

Infine occorre tenere presente che anche gli angoli negativi sulla circonferenza

za trigonometrica risultano ostici, spesso gli studenti preferiscono utilizzare angoli positivi fra 0 e 2π anziché gli angoli fra $-\pi$ e π trascurando in questo modo le simmetrie delle funzioni.

Quali (e quante) formule?

Per quanto riguarda le relazioni degli angoli associati, questi non costituiscono un problema, sono semplici da riconoscere, ma è bene insistere su quella più importante cioè quella della simmetria assiale di asse x ,

$$\cos(-x) = \cos x \text{ e } \sin(-x) = -\sin x$$

perché è la responsabile delle simmetrie delle funzioni, il coseno pari, il seno dispari.

Quanto alle formule necessarie si possono ridurre alle sole formule di addizione e alla relazione fondamentale del teorema di Pitagora; da queste si possono far derivare le altre, duplicazione, bisezione. Impararle può essere comodo ma non necessario.

Sulla formula di addizione ci può essere la difficoltà legata alla non linearità, forse è la prima volta che gli studenti si imbattono in una realtà in cui $f(x+y)$ non è uguale a $f(x) + f(y)$, occorrono esempi e controesempi.

Va detto che per i test di ingresso alle varie facoltà non sono necessari virtuosismi, bastano i concetti fondamentali e anche per alcune facoltà universitarie la conoscenza e capacità di ragionare su equazioni e disequazioni semplici è più che sufficiente.

Consigliamo quindi di evitare di perdere tempo in equazioni e disequazioni inutilmente complicate, le cui molte casistiche disorientano gli studenti inducendoli a credere di dover fare ricorso alla memoria per ricordare le diverse strategie risolutive: molto meglio guidarli verso una comprensione profonda dell'argomento e incoraggiare la consapevolezza che con il ragionamento è possibile risolvere quasi tutte le tipologie di esercizio.

4.3.2 Sulle funzioni trigonometriche

Diamo per conosciute le funzioni seno e coseno e supponiamo di avere a disposizione un software che faccia i grafici di funzioni; il livello che tutti

gli studenti devono raggiungere è la costruzione dei grafici di queste stesse funzioni ma modificate con le trasformazioni del piano.

Ad esempio:

passare dalla funzione $y = \cos x$ alle funzioni

$$y = 2\cos x$$

$$y = \cos(2x)$$

$$y = -\cos x$$

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$$

$$y = \cos x + 2.$$

Ognuna di esse si ottiene da quella elementare con una trasformazione geometrica; allora è possibile applicare queste trasformazioni una dopo l'altra, nell'ordine giusto, per arrivare a fare il grafico di $y = -2\cos(2(x - \frac{\pi}{3})) + 2$ passaggio per passaggio come in una striscia di un fumetto.

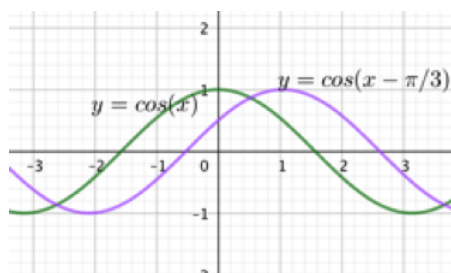


Figura 4.1: traslazione orizzontale
 $\cos x \rightarrow \cos(x - \pi/3)$.

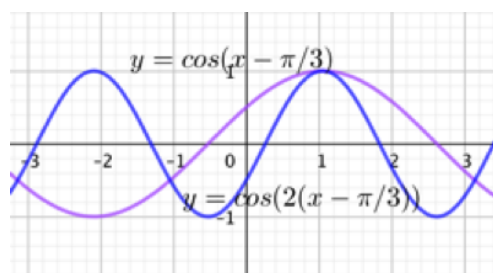


Figura 4.2: affinità
 $\cos(x - \pi/3) \rightarrow \cos(2(x - \pi/3))$.

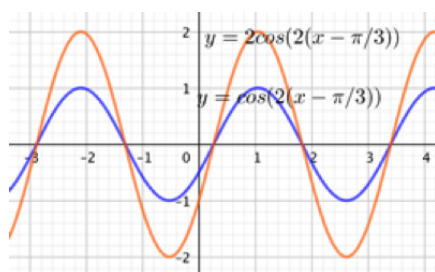


Figura 4.3: affinità
 $\cos(2(x - \pi/3)) \rightarrow 2\cos(2(x - \pi/3))$.

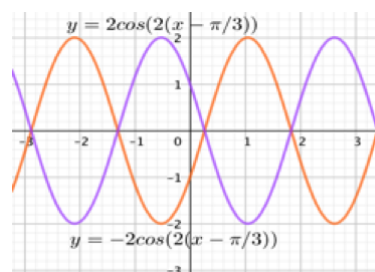


Figura 4.4: simmetria
 $2\cos(2(x - \pi/3)) \rightarrow -2\cos(2(x - \pi/3))$.

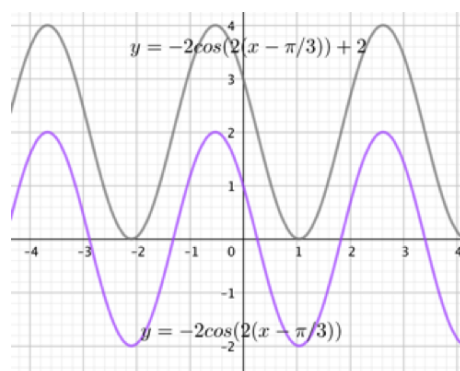


Figura 4.5: traslazione verticale $-2\cos(2(x - \pi/3)) \rightarrow -2\cos(2(x - \pi/3)) + 2$.

Un altro campo per cui è utile saper tracciare il grafico di una funzione trigonometrica elementare è, oltre studiarne gli zeri, il segno, la crescenza, la funzione inversa (laddove è possibile), la possibilità di ricavare le proprietà di un prodotto di funzioni, come viene richiesto nello studio di funzioni con cui vengono in contatto durante il corso universitario.

Ad esempio $y = \cos x(\sin x + 1)$ è formata da due funzioni elementari e dal loro grafico sovrapposto si possono ricavare molte informazioni:

- il periodo: 2π
- gli zeri: $x = \pi/2$ e $x = -\pi/2$
- il segno: positivo dove sono concordi e negativo dove sono discordi quindi $y > 0$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
- $y(0) = y(2\pi) = 1$

Inoltre in $x = -\pi/2$ ci sono tre intersezioni, una doppia della $y = \sin x + 1$ e una semplice del coseno, quindi uno zero di molteplicità 3 e questo implicherà la presenza di un flesso orizzontale e quindi la crescenza della funzione in un intorno di $x = -\pi/2$ e $x = 2\pi - \pi/2$.

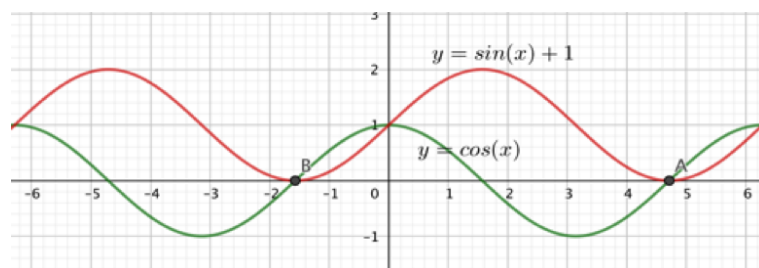


Figura 4.6: Grafico delle funzioni $y = \cos x$ e $y = \sin x + 1$.

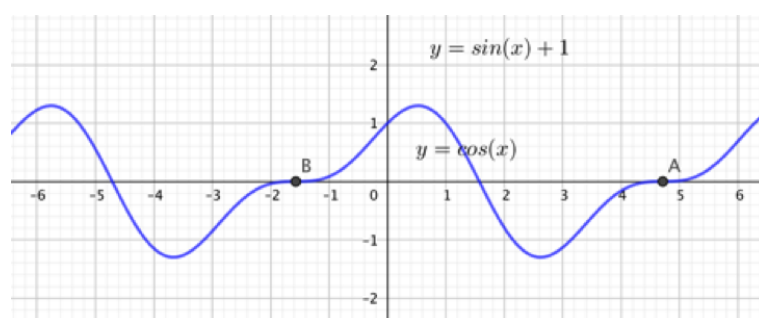


Figura 4.7: Grafico della funzione prodotto $y = \cos x(\sin x + 1)$.

Gli strumenti dell'analisi poi faranno il resto ma intanto questo è un metodo di controllo che può evitare errori.

4.3.3 Sulla risoluzione dei triangoli

Infine, un breve accenno alla risoluzione dei triangoli.

Le relazioni che è veramente importante affrontare probabilmente sono solo quelle relative alla risoluzione dei triangoli rettangoli, che spesso vengono date per buone e applicate senza nessuna spiegazione nei corsi di fisica dando così l'impressione a molti studenti che ci sia qualche “trucco di magia” che permette ai fisici di risolvere semplici esercizi (penso, ad esempio, a quelli sul piano inclinato) e che non ci sia altra soluzione se non quella di imparare a memoria le strategie illustrate a lezione dal professore (spesso diverso da quello che tiene il corso di matematica), formule inverse comprese.

Vale la pena allora, una volta introdotti seno e coseno sulla circonferenza,

investire qualche momento per mostrare la potenza dell'applicazione di questi concetti ai triangoli rettangoli, sempre incoraggiando il ragionamento a scapito della memorizzazione.

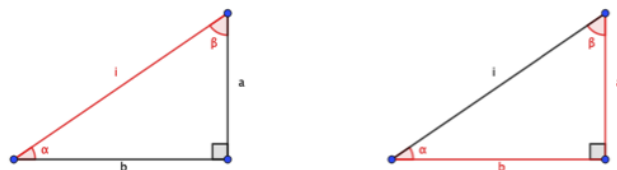


Figura 4.8: Risoluzione dei triangoli rettangoli.

In quest'ottica, ad esempio, consigliamo di introdurre solo le relazioni dovute al “primo teorema dei triangoli rettangoli” (quelle che legano le misure dei due cateti alla lunghezza dell'ipotenusa) e di lasciar ricavare agli studenti quelle tradizionalmente indicate come “secondo teorema dei triangoli rettangoli”, cogliendo così l'occasione per ribadire ancora una volta come comprendere poche relazioni fondamentali e ricavare le altre tramite il ragionamento sia una strategia di gran lunga più efficace del ricordare mille formule (spesso tutte tra loro equivalenti).

4.4 Attività di consolidamento e autovalutazione

Riportiamo alcuni degli esercizi proposti dai tutor del progetto, dai più semplici ai meno semplici, per accertare la comprensione dei concetti essenziali:

- Riconoscere sulla circonferenza il valore di alcuni angoli in radianti.
- Calcolo del seno e coseno di angoli “elementari” quali multipli di 30 e 45 gradi, senza l'utilizzo di “regole”, ma ragionando sulla geometria.
- Le equazioni $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = 2$ quante soluzioni hanno?

- Quanto vale l'espressione $\sin\frac{\pi}{2} + 2\sin\pi - 3\sin\frac{3}{2}\pi - 2\sin 0$?
- Usando semplicemente similitudini tra i triangoli e ragionando sul segno degli oggetti in gioco scrivere in funzione di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$:
 - $\sin(-\alpha)$ e $\cos(-\alpha)$
 - $\sin(\pi - \alpha)$ e $\cos(\pi - \alpha)$
 - $\sin(2\pi + \alpha)$ e $\cos(2\pi + \alpha)$
 - $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ e $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
 - Qualche esempio un po' più complicato.
- Come è fatto l'insieme degli x tali che $\sin(x - 2) \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ e che stanno in $[2, 10]$? Ritieni che sia più utile la circonferenza trigonometrica o il grafico?
- Disegnare il grafico delle funzioni $y = 3\sin(2x - 1)$ e $y = \cos(2x + 1)$.
- Risolvere graficamente la seguente disequazione $\cos(2x + 1) > 0$.

Capitolo 5

Meta-riflessioni didattiche

Domanda: come i tutor possono aiutare gli studenti in difficoltà?

5.1 Riflessioni didattiche e possibili risposte

Abbiamo scelto di terminare questa breve carrellata di temi “ostici” nello studio della matematica, o almeno reputati tali dagli studenti che hanno frequentato i corsi di tutorato, con una scheda “speciale”, dedicata alle strategie didattiche che i tutor hanno messo in campo e che in molti casi si sono rivelate vincenti. Questa scelta è dettata anche dalla convinzione che un intervento di recupero efficace debba cercare di intervenire sia sul versante dei contenuti sia su quello dell’atteggiamento verso la matematica, e che per entrambi gli obiettivi giochi un ruolo fondamentale anche l’approccio didattico adottato da chi conduce l’intervento.

L’esperienza da cui sono nate queste schede ha coinvolto otto tutor e diversi studenti del primo anno con difficoltà in matematica. I tutor erano tutti laureati in matematica, gli studenti provenivano da corsi in cui la matematica è “di servizio”, come agraria, veterinaria, farmacia, chimica e informatica, facoltà che spesso gli studenti scelgono a dispetto della matematica, sperando di riuscire a superare in qualche modo l’esame di analisi e poi non pensarci più. Le loro difficoltà potevano essere sancite dall’esterno (ad esempio da un mancato superamento dei test d’ingresso che aveva causato un debito

formativo in matematica da colmare nel corso del primo anno) oppure solo percepite soggettivamente, magari dopo essere usciti disorientati dalle prime lezioni del corso di matematica. La partecipazione degli studenti è stata in ogni caso volontaria, anche se in alcuni casi fortemente caldeggiata, e senza alcun obbligo di frequenza.

I risultati di questi percorsi di tutorato sono stati molto positivi, e crediamo che una parte di tale successo sia da ricercare anche nelle strategie didattiche che i tutor hanno scelto di mettere in atto durante il progetto. Vediamone alcune:

Scegliere un approccio informale

Durante le loro lezioni i tutor sono riusciti a far sentire gli studenti a proprio agio, in una condizione di parità che si è rivelata estremamente facilitante per l'apprendimento e il recupero. Hanno perseguito questo obiettivo scegliendo di sedersi tra i banchi degli studenti, di rinunciare al ruolo da protagonista nella lezione, di parlare in maniera semplice e questo, anche se talvolta gli ha impedito di usare il linguaggio strettamente rigoroso e corretto della matematica, gli ha consentito, con esempi tratti dalla loro vita vissuta, non necessariamente scolastica, di aprire una porta sul significato degli oggetti matematici, delle loro proprietà e relazioni; perché spesso è proprio la semantica che è mancata negli anni passati, offuscata dalla sintassi e dalle regole, e senza significato è inutile memorizzare regole.

Racconta una tutor del progetto:

“ho visto l'ansia nei suoi occhi e ho cercato di fargli capire che noi siamo là per persone come lui, che sono una buona percentuale e che non si deve vergognare di chiedere cose di base”.

Ha tenuto quest'atteggiamento informale e “alla pari” per tutta la durata del ricevimento ed è stata una scelta vincente. In questo modo ha conquistato la sua fiducia e quella degli altri compagni. Questo clima di serenità e fiducia ha dato a ognuno la libertà di esprimere le proprie difficoltà, di far emergere l'ignoranza di cose anche banali senza doversi vergognare di fronte agli altri ma anche di fronte a se stessi.

Sfruttare l'assenza della valutazione

Spesso la presenza di una valutazione, che il docente deve effettuare sulle conoscenze dei propri alunni, fa sì che molti studenti sperimentino a scuola un clima autoritario che continuano poi a vivere con i professori dei corsi universitari con cui dovranno sostenere gli esami; matura allora la “classica” strategia di sopravvivenza che consiglia loro di tacere il più possibile, data la convinzione diffusa che “meno si parla meno si rischia”.

L'intervento dei tutor ha cercato di trasformare questo rapporto di subordinazione in un rapporto paritario, fra persone, con la sola differenza che il tutor aveva più conoscenze specifiche ed era lì proprio per cercare di aiutare gli studenti a superare le proprie difficoltà.

Una tutor nel suo primo incontro con una ragazza, racconta come inizialmente questa fosse un po' impacciata e formale. Ha cercato di farle capire che non era lì per giudicarla ma per aiutarla. La frase chiave che l'ha sbloccata è stata:

“tanto non te lo faccio io l'esame, quindi puoi dirmi tutti gli sfondoni che vuoi!”.

Se durante gli anni di scuola fosse stato risolto e abbattuto il muro della valutazione forse non saremmo qui a organizzare test di recupero e iniziative di tutoraggio!

Perché così si possono affrontare i problemi e risolvere le difficoltà, eliminando la paura e ponendosi come âcompagni di viaggio' in una sorta di laboratorio di artigiano in cui c'è uno con più esperienza e gli altri che imparano facendo.

Rassicurarli e convincerli che ce la possono fare

Questo è forse il compito più difficile, ma evidentemente possibile dati i buoni risultati ottenuti; molti studenti dopo tanti anni di insuccessi sono ormai convinti che per loro la matematica non sarà mai comprensibile, al massimo potranno imparare qualcosa per superare l'esame. Perché l'incertezza dovuta alla mancanza di basi li costringe a muoversi come nelle sabbie mobili, procedendo a tentoni, pronti ad ammettere di aver sbagliato tutto.

E invece è possibile ma bisogna ripartire proprio dagli inizi, dalle mancate

conoscenze elementari, dalle proprietà dei numeri, delle potenze, del piano cartesiano... Come dice una tutor del progetto:

“il problema è che anche ragionare su un disegno è impossibile se mancano le basi. Infatti ad un certo punto mi sono resa conto che sarei dovuta partire ancora più dal principio, avendo loro problemi anche nello svolgimento di conti con frazioni”.

L’esperienza di una tutor che ha lavorato sulle proprietà delle potenze è illuminante, racconta di come gli studenti sono riusciti a fare esercizi di cui prima neanche capivano il testo, e che quando hanno provato a rispondere ad altre questioni misteriose, sui logaritmi, partire dalle proprietà delle potenze era per loro “rassicurante”, come a dire “*ok, per ora ti seguo, possiamo andare avanti*”.

Un’altra studentessa a cui era stato chiesto “cosa sapevo di matematica” ha risposto “*niente*”. La tutor del suo corso ha iniziato con degli esercizietti presi dai test d’ingresso e ha constatato che il problema principale era la traduzione in linguaggio matematico dell’esercizio. Dopo aver lavorato un po’ su questo con esercizi riguardanti percentuali, espressione decimale dei numeri, frazioni e proprietà delle potenze, ha capito che il suo problema è solo la mancanza delle basi, non manca certo di entusiasmo e voglia di migliorarsi. Ma quello che conta è che alla fine dell’incontro la ragazza sembrava molto soddisfatta.

Bisogna arrivare alle origini delle lacune ma occorre anche considerare che questi studenti sono adulti e motivati a proseguire gli studi e quindi si possono affrontare i problemi antichi con un linguaggio diverso, che risulta più accessibile perché si può far leva su conoscenze e competenze dettate dall’esperienza della vita vissuta non necessariamente scolastica.

Inoltre il fatto di essere adulti e motivati li spinge a voler raggiungere la consapevolezza di aver capito quei concetti che prima erano oscuri o confusi, di non accontentarsi di aver capito qualcosa (che equivale a non aver capito), ma di pretendere di fronte a se stessi di aver fatto davvero chiarezza, di riuscire a risolvere esercizi fino ad allora incomprensibili, insomma aver reso le sabbie mobili un terreno roccioso. Sentir dire a un ragazzo: “*finalmente ora ho capito quello che non avevo capito*” vuol dire avercela fatta, ed è una

grande soddisfazione sia per lo studente che per il tutor.

Convincerli che non è la memoria che conta, ma capire il perché

Parlando di trigonometria una tutor ha iniziato raccontando un po' la teoria. Ha scelto di disegnare molto alla lavagna senza dare nessun'altra informazione che le definizioni. A questo punto li ha sfidati (guidandoli) a scoprire da soli le varie regole della goniometria: dove si trovano gli angoli in radianti sulla circonferenza, per passare a quanto vale il seno o il coseno di quegli angoli, per poi concludere con esercizi del test d'ingresso. Anche se apparentemente gli esercizi del test d'ingresso non c'entravano nulla, gli studenti sono stati in grado di capire che non c'è bisogno di sapere tutte le regole per fare gli esercizi, anzi! Con il ragionamento è possibile rispondere correttamente alle domande senza aver già fatto "esercizi simili".

Convincerli che stare zitti, in disparte ad ascoltare, non funziona, si impara solo facendo in prima persona

Anche questa è stata una consuetudine sbloccata dalla maggior parte dei tutor: c'è voluto un po' di tempo ma poi gli studenti hanno capito che stare alla lavagna è un vantaggio, fare le cose è diverso dal vederle fare, si capisce di più, si diventa più autonomi, si partecipa più attivamente, prima di scrivere qualcosa alla lavagna ci si domanda perché, semplicemente si impara. Come racconta un tutor che per parecchi incontri è stato alla lavagna anche se come mero esecutore, alla fine:

"sono venuti loro alla lavagna a fare studi di funzione. Gli studenti si sono definitivamente sbloccati e vengono alla lavagna tranquillamente, proponendosi loro e facendo a turno, il che mi sembra molto positivo".

Non scandalizzarsi degli errori, anzi farne tesoro

Come abbiamo visto nell'esperienza riportata nella scheda dedicata alla scrittura di un grafico:

"da $x^2 < 1/4$ al classico $x < \pm 1/2$. Facciamo allora una pausa di riflessione per arrivare a capire che scritte del tipo

$x = \pm 1/2$ possono avere un senso, mentre scritture del tipo $x < \pm 1/2$, non ce l'hanno"; un passo alla volta riesce a farle tornare alla mente l'uso della parabola e dello studio del segno e a farle risolvere la disequazione e in seguito lo studio di funzione da cui la disequazione era tratta.

Tutto questo è stato possibile grazie all'atteggiamento informale, all'assenza di valutazione e, soprattutto, grazie al fatto che non il tutor ha mai demonizzato gli errori e gli strafalcioni ascoltati: questi sono gli elementi che hanno senza dubbio aiutato gli studenti a "sciogliersi" sempre di più da un incontro all'altro.

Questo il commento di una tutor dopo una lezione sui logaritmi:

"essendo solo in 2 ed entrambe interessate a capire la questione, l'incontro è risultato molto leggero ed efficace, nonostante la difficoltà effettiva dell'argomento. Le ragazze sono entrate ormai nell'idea che è importante dire un'idea che viene in mente, anche se sbagliata! Sono molto contenta di come siano entusiaste una volta arrivate alla fine del ragionamento, e della consapevolezza che pian piano stanno acquisendo. Inoltre sono soddisfatta di come abbiano pensato a diverse strategie per risolvere lo stesso esercizio".

Come riassume bene una tutor, il successo di questa esperienza di tutorato si è giocato su alcuni ingredienti fondamentali:

- *far vivere ai ragazzi la matematica come una scoperta, non come un set di regole trovate sui libri;*
- *fornire loro gli "ingredienti necessari e far scoprire a loro le varie proprietà;*
- *far capire loro che non c'è bisogno di sapere tutto, ma le varie regole si possono ricavare facilmente grazie alla comprensione profonda degli argomenti!;*

- *testare la loro effettiva comprensione non solo tramite esercizi precisi e mirati, ma richiamare in continuazione i concetti che dovrebbero aver assimilato, facendogli capire che anche se l'esercizio non si chiama "applica le proprietà delle potenze", ci potrebbe esser lo stesso bisogno di usarle!;*
- *non esiste idea veramente sbagliata! Fargli capire che possono sempre provare a dire la loro idea e le loro considerazioni, nonostante a volte siano completamente fuori strada.*

Bibliografia

Testi Consigliati

- [1] Ferrari P. L. (1996): *La formazione in matematica degli studenti all'inizio dell'università*. Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis, Torino.
- [2] Ferrari P. L. (2001): *Linguaggio quotidiano e linguaggio matematico*. Controrelazione presentata al XVIII Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, tenutosi presso l'Università di Pisa.
- [3] Ferrari P. L. (2004): *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Pitagora editrice, Bologna.
- [4] Grice P. (1975): Logic and conversation. *Syntax and Semantics*, Volume 3, 41-58.
Traduzione italiana: Logica e conversazione. Il Mulino, Bologna, 1993.
- [5] Prodi G. (1980): Syllabus di matematica: conoscenze e capacità per l'accesso all'Università. *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana* (UMI), Volume 1, No. 3, 5-16.
- [6] Prodi G. (1989): Insegnamento secondario e insegnamento universitario della matematica. *Archimede*, Volume 41, No. 4, 163-174.
- [7] Villani V. (2003): *Cominciamo da zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (aritmetica e algebra)*. Pitagora Editore, Bologna.

-
- [8] Villani V. (2006): *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (geometria)*. Pitagora Editore, Bologna.
- [9] Zan R. (1996): Un intervento metacognitivo di “recupero” a livello universitario, ovvero imparare a studiare la matematica. *La matematica e la sua didattica*, Volume 10, No. 1, 65-89.
- [10] Zan R. (1997): Mortalità universitaria e mortalità matematica. *Tracciati*, rivista online, No. 2.
Disponibile online sul sito:
<http://www.graffinrete.it/tracciati/storico/tracciati2/mort.htm>
- [11] Zan R. (2007): *Difficoltà in matematica - Osservare, interpretare, intervenire*. Springer, Milano.
- [12] Zan R. (2008): *Matematica: un problema da risolvere*. Quaderni di rassegna, Edizioni Junior, Azzano San Paolo.
- [13] Zan R., Baccaglini-Frank A. (2017): *Avere successo in matematica. Strategie per l'inclusione e il recupero*. UTET Università, Torino.