

RELAZIONE SEMESTRALE
"DINAMICA OLMORFA E ANALISI E GEOMETRIA
COMPLESSA, IN UNA O PIÙ VARIABILI"

MATTEO FIACCHI

Assegnista di ricerca presso il Dipartimento di Matematica, Università di Pisa dal 1/1/2022 al 31/12/2022, tutor *Prof. Marco Abate*. Progetto: "Dinamica olomorfa e analisi e geometria complessa, in una o più variabili"

1. RICERCA SVOLTA

L'obiettivo principale della ricerca è quello di studiare la dinamica, sia forward che backward, delle mappe olomorfe nei domini di \mathbb{C}^n usando un approccio "metric geometry".

1.1. Modelli forward per mappe olomorfe iperboliche. Data una varietà complessa Kobayashi iperbolica X e una mappa olomorfa f da X in sé stesso, Arosio e Bracci in [2] hanno introdotto il concetto di modello canonico Kobayashi iperbolico, cioè una tripla (Ω, h, τ) dove Ω è una varietà complessa Kobayashi iperbolico, $h : X \rightarrow \Omega$ olomorfa e τ un automorfismo di Ω tali che

$$h \circ f = \tau \circ h.$$

Questo modello, quando esiste, è unico e permette di studiare in modo esaustivo la dinamica della mappa.

I modelli di mappe iperboliche, i.e. tali che

$$c(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_X(f^n(x), x)}{n} > 0$$

sono stati ben studiati nel disco [6], nella palla [4] e negli strettamente convessi [1]. Insieme a Leandro Arosio (Roma Tor Vergata) abbiamo sviluppato uno strumento, lo scaling metrico, che assicura l'esistenza del modello e permettere di studiare le sue proprietà. Ci sono nuove classi notevoli di domini dove si può applicare questo metodo, come ad esempio gli strettamente pseudoconvessi, convessi di tipo finito e pseudoconvessi di tipo finito in \mathbb{C}^2 . L'articolo al momento è in fase di scrittura.

Date: 29 Giugno 2022.

1.2. Dinamica backward in spazi Gromov iperbolici e applicazioni alla dinamica complessa. Gli spazi Gromov iperbolici sono una generalizzazione degli spazi a curvatura negativa nel contesto degli spazi metrici, concetto che si inserisce perfettamente nell'analisi complessa perché in generale le metriche olomorficamente invarianti non sono Riemanniane.

Gli spazi Gromov iperbolici hanno inoltre diverse proprietà utili, come una stabilità geodetica, una naturale compattificazione e le loro self-maps hanno interessanti proprietà dinamiche.

Negli ultimi anni si è notato che molti risultati classici della dinamica olomorfa del disco (primi tra tutti il Lemma di Julia e il Teorema di Denjoy-Wolff) sono validi in contesti molto più generali, come per le mappe non espansive di uno spazio Gromov iperbolico. Inoltre, molte classi di domini interessanti nell'analisi complessa sono Gromov iperbolici rispetto alla distanza di Kobayashi (vedi la prossima sezione). Al contrario, la dinamica backward introdotta da Poggi-Corradini nel disco [5] non è stata mai studiata in questi ambiti più generali. L'obiettivo, insieme a Leandro Arosio e Anders Karlsson (Université de Genève), è stato duplice: estendere i concetti e risultati classici della dinamica backward per mappe non espansive di un Gromov iperbolico e riuscire a dimostrare alcuni problemi aperti nel caso olomorfo usando l'approccio metrico. L'approccio si è rivelato molto proficuo, infatti abbiamo ottenuto importanti risultati in entrambe le direzioni. L'articolo al momento è in fase di scrittura.

1.3. Non Gromov iperbolicità dei Worm domains. Come si è visto nel precedente punto del progetto, la Gromov iperbolicità è una proprietà utile nella dinamica complessa e nella teoria geometrica delle funzioni.

Quindi, è naturale provare a caratterizzare i domini in \mathbb{C}^d che sono Gromov iperbolici rispetto ad una metrica invariante (per esempio la metrica di Kobayashi). Il caso convesso è ben chiaro grazie ai lavori di A. Zimmer [7, 8], al contrario il caso pseudoconvesso rimane ancora poco compreso. Nel caso in \mathbb{C}^2 , in [3] ho dimostrato che il tipo finito è una condizione sufficiente per la Gromov iperbolicità, perciò con il Gian Maria Dall'Ara (INdAM, Scuola Normale Superiore) e Leandro Arosio ci siamo soffermati sulle condizioni necessarie.

Per questo motivo abbiamo studiato il Worm domain di Diederich-Fornæss, dominio che appare spesso sia in problemi di geometria sia in quelli di analisi funzionale per i suoi comportamenti patologici. Tramite tecniche di localizzazione e di scaling siamo stati in grado di provare la non Gromov iperbolicità del worm domain e dei fiber bundle olomorfi, che sono in un certo senso modelli locali dei domini di tipo infinito. L'articolo è completato ed è in fase di revisione prima della pubblicazione su ArXiv.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. Altavilla, L. Arosio, L. Guerini, *Canonical Models on Strongly Convex Domains via the Squeezing Function*, Jour. of Geo. An. (2021).

- [2] L. Arosio, F. Bracci, *Canonical models for holomorphic iteration*, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016),
 - [3] M. Fiacchi, *Gromov hyperbolicity of pseudoconvex finite type domains in \mathbb{C}^2* , Math. Ann., (2021).
 - [4] P. Poggi-Corradini, *Canonical conjugations at fixed points other than the Denjoy-Wolff point*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 25 (2000).
 - [5] P. Poggi-Corradini, *Backward iteration sequences with bounded hyperbolic steps for analytic self-maps of the disk*, Rev. Mat. Iberoamericana 19 (2003).
 - [6] G. Valiron, *Sur l'iteration des fonctions holomorphes dans un demi-plan*, Bull. Sci. Math. 47 (1931).
 - [7] A. Zimmer. *Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on convex domains of finite type*, Math. Ann.,(2014).
 - [8] A. Zimmer. *Gromov hyperbolicity, the Kobayashi metric, and \mathbb{C} -convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017).
-

2. DIDATTICA

Durante tutto il primo semestre del 2022 sono stato tutor e in parte coordinatore del corso di "Differential Geometry" del "International Mathematics Master", Master organizzato dall'ICTP di Trieste in Pakistan e rivolto a studenti proveniente da paesi in via di sviluppo.

3. TALKS

- "*Horospheres in several complex variables*" in "CR Geometry and PDE's IX", Levico Terme (IT), 30/5-2/6/2022.
 - "*On the Gromov hyperbolicity of domains in \mathbb{C}^n* " in "Geometric Aspects of Complex and Harmonic Analysis", Alma Mater Studiorum University of Bologna, Italy, 17-18/01/2022.
-

4. PARTECIPAZIONI A CONFERENZE

- "CR Geometry and PDE's IX", Levico Terme (IT), 30/5-2/6/2022.
- "Geometric Aspects of Complex and Harmonic Analysis", Alma Mater Studiorum University of Bologna (IT), 17-18/01/2022.



In qualità di tutor esprimo una valutazione positiva sulla relazione.
Pisa, 30/06/2022

